

Série
Schaum

Hwei P. Hsu

Communications analogiques et numériques

Cours et problèmes

434 problèmes résolus

Série Schaum

Communications analogiques et numériques

Cours et problèmes

Hwei P. Hsu

Fairleigh Dickinson University

Traduit par
Bernard Loubières

McGRAW-HILL

New York – St. Louis – San Francisco – Auckland
Bogotá – Caracas – Lisbonne – Londres – Madrid – Mexico
Milan – Montréal – New Delhi – Panama – San Juan
São Paulo – Singapour – Sydney – Tokyo – Toronto

Hwei P. Hsu a obtenu son baccalauréat en science à l'université nationale de Taiwan et sa maîtrise en science et son Ph.D. au *Case Institute of Technology*. Il est actuellement professeur à l'université *Fairleigh Dickinson* et directeur du département de génie électrique de cette université.

Maquette de couverture : Françoise Rojare

Copyright ©1994, McGraw-Hill, Inc., Paris.
ISBN : 2-7042-1283-X
ISSN : 0768-2727

Ce livre est traduit de l'édition américaine de *Schaum's Outline of Theory and Problems of Analog and Digital Communications*

© 1993 by McGRAW-HILL Inc., New York
ISBN : 0-07-030636-2

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

Avant-propos

Ce livre a pour ambition d'être un utile complément des ouvrages sur la théorie des communications à l'usage de l'ingénieur, mais il peut tout aussi bien être utilisé indépendamment de la littérature spécialisée. Chaque sujet y est traité au moyen d'un exposé théorique assorti de nombreux problèmes résolus (qui font partie intégrante de l'exposé).

Le chapitre 1 passe en revue les bases mathématiques permettant l'analyse des signaux et l'étude des systèmes linéaires au moyen des méthodes de Fourier. Les chapitres 2 et 3 appliquent ces méthodes à l'étude de la modulation d'amplitude et d'argument d'un signal en l'absence de bruit. Le chapitre 4 traite de l'échantillonnage et de la transmission numérique des signaux analogiques. La théorie des probabilités et les signaux aléatoires font l'objet des chapitres 5 et 6. Aucune connaissance préliminaire de ces sujets n'est requise. Le chapitre 7 concerne l'application pratique des développements qui précèdent à l'influence du bruit sur les systèmes de communication. Le chapitre 8, pour conclure, présente une théorie élémentaire de l'information et du codage.

Je tiens à remercier le Professeur Gordon Silverman, de Manhattan College, pour son aide, ses remarques et sa relecture soignée du manuscrit. Je n'oublierai pas non plus Jiri Naxera et Wenchang Wu qui en ont vérifié le texte et les figures. Je remercie par ailleurs M. David Burleigh pour son aide, M. John Aliano pour ses conseils avisés et son appui ainsi que Ms. Maureen Walker pour tout le soin qu'elle a mis à préparer ce livre. Enfin, ma reconnaissance va à mon épouse Daisy dont la compréhension et le soutien constant se sont révélés indispensables à la parution de cet ouvrage

Hwei P. HSU

Table des matières

Chapitre 1	SIGNAUX ET SYSTÈMES	1
	1.1. Classification des signaux	1
	1.2. Fonctions singulières	2
	1.3. Décomposition en série de Fourier	3
	1.4. Transformée de Fourier	4
	1.5. Convolution	6
	1.6. Corrélation et densité spectrale	7
	1.7. Représentation et classification d'un système	8
	1.8. Réponse impulsionnelle et réponse en fréquence	10
	1.9. Systèmes linéaires et filtrage	11
	1.10. Filtres	12
	1.11. Bande passante	15
	1.12. Relation entre densités spectrales d'entrée et de sortie d'un système	16
	Problèmes résolus	16
Chapitre 2	MODULATION D'AMPLITUDE	48
	2.1. Introduction	48
	2.2. Modulation d'amplitude	48
	2.3. Modulation à bande passante latérale double	48
	2.4. Modulation d'amplitude ordinaire	50
	2.5. Modulation à bande latérale unique	52
	2.6. Modulation à bande latérale résiduelle	55
	2.7. Transposition de fréquence et mixage	57
	2.8. Multiplexage à division de fréquence	58
	Problèmes résolus	59
Chapitre 3	MODULATION D'ARGUMENT	75
	3.1. Introduction	75
	3.2. Modulation d'argument et fréquence instantanée	75
	3.3. Modulation de phase et de fréquence	75
	3.4. Spectre de Fourier des signaux modulés en argument	77
	3.5. Modulation d'argument à bande étroite	77
	3.6. Modulation sinusoïdale (ou à fréquence pure)	78
	3.7. Largeur de bande des signaux à modulation d'argument	79
	3.8. Système de modulation d'argument	80
	3.9. Démodulation des signaux modulés en argument	81
	Problèmes résolus	83
Chapitre 4	TRANSMISSION NUMÉRIQUE DES SIGNAUX ANALOGIQUES	98
	4.1. Introduction	98
	4.2. Modulation par impulsions codées (PCM)	98
	4.3. Théorème de l'échantillonnage	98
	4.4. Échantillonnage	99
	4.5. Modulation d'impulsions en amplitude (PAM)	101
	4.6. Quantification	101
	4.7. Codage	104
	4.8. Largeur de bande de la modulation PCM	105
	4.9. Modulation delta	106

	4.10. Formatage des signaux	107
	4.11. Multiplexage temporel	109
	4.12. Bande passante requise pour le multiplex temporel	110
	4.13. Formes d'impulsion et diaphone	110
	4.14. Systèmes de modulation numérique	112
	Problèmes résolus	114
Chapitre 5	PROBABILITÉ ET VARIABLES ALÉATOIRES	138
	5.1. Introduction	138
	5.2. Probabilités	138
	5.3. Variable aléatoires, fonctions de répartition et densités	141
	5.4. Fonctions de variables aléatoires	144
	5.5. Moyennes statistiques	145
	5.6. Lois de répartition particulières	148
	Problèmes résolus	152
Chapitre 6	SIGNAUX ALÉATOIRE ET BRUIT	184
	6.1. Introduction	184
	6.2. Définition des processus stochastiques	184
	6.3. Statistique des processus aléatoires	185
	6.4. Corrélation et densité spectrale de puissance	187
	6.5. Processus aléatoire et système linéaire	189
	6.6. Processus stochastiques remarquables	191
	Problèmes résolus	194
Chapitre 7	PERFORMANCE D'UNE LIAISON EN PRÉSENCE DE BRUIT	220
	7.1. Introduction	220
	7.2. Bruit additif et rapport signal sur bruit	220
	7.3. Bruit sur les liaisons en bande de base	221
	7.4. Bruit en modulation d'amplitude	222
	7.5. Bruit en modulation d'argument	226
	7.6. Détection d'un signal binaire et test d'hypothèse	230
	7.7. Probabilité d'erreur et maximum de vraisemblance	231
	7.8. Détection optimale	233
	7.9. Probabilité d'erreur des systèmes de transmission binaires	235
	Problèmes résolus	237
Chapitre 8	INFORMATION ET CODAGE	263
	8.1. Introduction	263
	8.2. Mesure de l'information	263
	8.3. Canaux discrets sans mémoire	265
	8.4. Information mutuelle	268
	8.5. Capacité d'un canal	269
	8.6. Canal avec bruit blanc gaussien additif	270
	8.7. Codage de source	271
	8.8. Codage entropique	273
	8.9. Codage d'un canal de transmission	274
	8.10. Codage avec contrôle d'erreur	275
	8.11. Détection et correction d'erreur en codage par blocs linéaire	278
	Problèmes résolus	279

Annexe A	TRANSFORMÉE DE FOURIER	314
Annexe B	FONCTIONS DE BESSEL $J_n(\beta)$	316
Annexe C	FONCTION COMPLÉMENTAIRE $Q(z)$ DE LA FONCTION D'ERREUR $\text{ERF}(z)$..	317
Annexe D	FORMULES MATHÉMATIQUES USUELLES	318
Annexe E	SYMBOLES MATHÉMATIQUES ET ABRÉVIATIONS	321
INDEX	325

Signaux et systèmes

1.1 CLASSIFICATION DES SIGNAUX

On appelle signal une fonction qui représente l'évolution dans le temps d'une quantité physique. La représentation mathématique d'un signal se fait au moyen d'une fonction de la variable indépendante t , où t est le temps. On désigne par exemple un signal par la notation $x(t)$.

A. Signaux continus et signaux discrets

On dit que $x(t)$ est un *signal continu* si t est une variable continue, au sens mathématique. Si t est une variable discrète, dont les valeurs ne sont définies qu'à des instants donnés, $x(t)$ est appelé *signal discret*. Ce signal étant défini à des instants précis, on le représente souvent comme une *suite* de valeurs, notée $\{x(n)\}$ ou $x[n]$, où n est un nombre entier.

B. Signaux analogiques et numériques

Lorsqu'un signal continu $x(t)$ peut prendre une valeur quelconque appartenant à l'intervalle (a,b) , où a peut valoir $-\infty$ et b peut valoir $+\infty$, on dit qu'il s'agit d'un signal *analogique*. Lorsqu'un signal discret $x[n]$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes, on dit qu'il s'agit d'un signal *numérique*.

Un signal discret $x[n]$ résulte souvent de l'échantillonnage d'un signal continu $x(t)$, avec $x[n] = x(nT_s)$, où T_s est appelé *période d'échantillonnage*. Par la suite, nous traiterons principalement de signaux continus.

C. Signaux réels et signaux complexes

On dit qu'un signal $x(t)$ est *réel* si sa valeur appartient à l'ensemble des réels. On dit qu'il est *complexe* si sa valeur appartient à l'ensemble des complexes.

D. Signaux déterministes et signaux aléatoires

La valeur d'un signal *déterministe* est parfaitement définie à tout instant. Celle d'un signal *aléatoire* ne peut être que statistiquement définie. Nous traiterons les signaux aléatoires dans le chapitre 6.

E. Signaux à énergie finie et à puissance finie

L'énergie E d'un signal $x(t)$ a pour expression :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.1)$$

La *puissance moyenne* P d'un signal $x(t)$ a pour expression :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.2)$$

Si $0 < E < \infty$, c'est-à-dire si E a une valeur finie (donc $P = 0$), on dit que $x(t)$ est un signal *transitoire*. Il est de durée limitée. Si $E = \infty$, avec $0 < P < \infty$, sa puissance est finie, on dit qu'il s'agit d'un signal *permanent*.

F. Signaux périodiques et non périodiques

Un signal $x(t)$ est dit *périodique* s'il existe un nombre positif T_0 tel que :

$$x(t + T_0) = x(t) \quad (1.3)$$

Le plus petit des nombres positifs T_0 satisfaisant à cette relation est appelé *période*, tandis que son inverse est appelé *fréquence fondamentale* f_0 :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \text{ hertz (Hz)} \quad (1.4)$$

On déduit de la relation (1.3) que :

$$x(t + nT_0) = x(t) \quad (1.5)$$

Un signal pour lequel n'existe aucune valeur T_0 satisfaisant à la relation (1.3) est dit *non périodique* ou *apériodique*.

Un signal périodique dont l'énergie par période est de valeur finie est un signal permanent dont la puissance moyenne peut être calculée sur une seule période.

1.2 FONCTIONS SINGULIÈRES

Un certain nombre de *fonctions singulières*, encore appelées *fonctions généralisées*, constituent en théorie des télécommunications une sous-classe importante de signaux apériodiques. Nous allons étudier ici deux de ces fonctions, la fonction échelon unitaire $u(t)$ et la fonction impulsion unitaire $\delta(t)$.

A. Fonction échelon unitaire

La définition de la *fonction échelon unitaire* $u(t)$ est la suivante :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

comme le représente la figure 1-1.



Fig. 1-1 Fonction échelon unitaire

On notera que cette fonction est discontinue en $t = 0$ et que sa valeur n'y est pas définie.

B. Fonction impulsion unitaire

La *fonction impulsion unitaire* $\delta(t)$, appelée aussi *fonction de Dirac*, n'est pas une fonction au sens propre du terme; elle est définie par une intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t) dt = \phi(0) \quad (1.7)$$

où $\phi(t)$ est une fonction quelconque, continue en $t = 0$.

On peut déduire quelques propriétés intéressantes de $\delta(t)$ de la définition (1.7) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \phi(t_0) \quad (1.8)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (1.9)$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1.10)$$

$$x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t) \quad (1.11)$$

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0) \quad (1.12)$$

Une définition différente de $\delta(t)$ peut être donnée, au moyen des deux relations suivantes :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad t_1 < t_0 < t_2 \quad (1.13)$$

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad t \neq t_0 \quad (1.14)$$

Les conditions (1.13) et (1.14) font apparaître la fonction impulsion unitaire comme limite d'une fonction dont l'aire sous la courbe conserve la valeur 1 tandis que sa largeur tend vers 0. On représente symboliquement $\delta(t)$ comme le montre la figure 1-2.

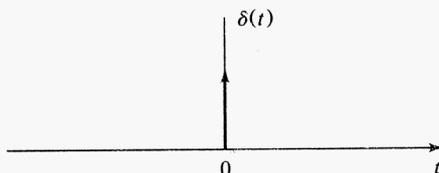


Fig. 1-2 Fonction impulsion unitaire

C. Dérivation des fonctions singulières

Si $g(t)$ est une fonction généralisée, sa dérivée $g'(t)$ se définit au moyen de la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \phi'(t) dt \quad (1.15)$$

où $\phi'(t)$ est la dérivée de $\phi(t)$. En faisant appel à la relation (1.15), on montre que la dérivée de $u(t)$ est égale à $\delta(t)$, c'est-à-dire que

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (1.16)$$

1.3 DÉCOMPOSITION EN SÉRIE DE FOURIER

A. Série de Fourier à coefficients complexes

Soit $x(t)$ une fonction périodique de période T_0 . On définit la décomposition de $x(t)$ en série de Fourier de la façon suivante :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1.17)$$

où $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi f_0$ est la *pulsation fondamentale* et f_0 la *fréquence fondamentale* du signal. Notons que dans la suite de cet ouvrage, on parlera de fréquence alors que les formules utiliseront la variable ω pour éviter le terme pulsation, moins usité, et alléger les formules du facteur 2π qui s'introduit quand on emploie la variable

$$f = 2\pi/\omega, \quad \omega = 2\pi f$$

Les coefficients c_n sont appelés *coefficients de Fourier* de la décomposition, qui se calculent au moyen de la relation suivante :

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1.18)$$

où t_0 est une valeur quelconque. En choisissant $t_0 = -T_0/2$, il vient :

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1.19)$$

B. Spectre de fréquence

Si l'on a un signal périodique réel, alors

$$c_n = |c_n| e^{j\theta_n} \quad c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j\theta_n} \quad (1.20)$$

où $|c_n|$ est l'amplitude et θ_n la phase du coefficient c_n , l'astérisque indiquant qu'il s'agit de la valeur complexe conjuguée. On notera, au passage, que

$$|c_{-n}| = |c_n| \quad \theta_{-n} = -\theta_n \quad (1.21)$$

Le tracé de $|c_n|$ en fonction de la pulsation $\omega = 2\pi f$, ou plus simplement en fonction de la fréquence f , est appelé *spectre d'amplitude* du signal périodique $x(t)$. Le tracé de θ_n en fonction de ω constitue le *spectre de phase* de $x(t)$. L'ensemble de ces deux tracés forment le *spectre de fréquence* du signal $x(t)$. Comme l'indice n ne prend que des valeurs entières, on en déduit que le spectre de fréquence d'un signal périodique n'est défini que sur un ensemble de fréquences discrètes $n\omega_0$. C'est pourquoi l'on parle de *spectre de fréquences discrètes* et de *raies spectrales*. D'après la relation (1.21), l'on voit que le spectre d'amplitude est une fonction paire de ω tandis que le spectre de phase est une fonction impaire de ω .

C. Puissance d'un signal périodique

La *puissance* d'un signal périodique $x(t)$ de période T_0 se calcule comme moyenne quadratique du signal sur une période :

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.22)$$

D. Théorème de Parseval

Le théorème de Parseval sur les séries de Fourier établit que, si $x(t)$ est un signal périodique de période T_0 , on a :

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (1.23)$$

1.4 TRANSFORMÉE DE FOURIER

Pour étendre l'expression des séries de Fourier sous la forme (1.17) dans le domaine des fréquences au cas des fonctions non périodiques, on introduit la notion de transformée de Fourier.

A. Définition

Soit $x(t)$ un signal aperiodique. On définit la *transformée de Fourier* de $x(t)$, que l'on note \mathcal{F} , au moyen de la relation suivante :

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.24)$$

La transformée de Fourier inverse de $X(\omega)$, notée \mathcal{F}^{-1} , se calcule au moyen de la relation suivante :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.25)$$

Les relations (1.24) et (1.25) définissent ce que l'on appelle *une paire de transformées de Fourier*. On peut écrire $X(\omega)$ en faisant apparaître l'amplitude et la phase, sous la forme

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (1.26)$$

Si $x(t)$ est un signal réel, on montre que :

$$X(-\omega) = X^*(\omega) = |X(\omega)| e^{-j\theta(\omega)} \quad (1.27)$$

soit

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)| \quad \theta(-\omega) = -\theta(\omega) \quad (1.28)$$

Tout comme dans le cas des séries de Fourier complexes, le *spectre d'amplitude* de $x(t)$, noté $|X(\omega)|$ est une fonction paire de ω , tandis que le *spectre de phase* $\theta(\omega)$ est une fonction impaire de ω . L'ensemble de ces deux fonctions constitue le *spectre en fréquence* de $x(t)$. La relation (1.27) constitue la condition nécessaire et suffisante pour que $x(t)$ soit un signal réel (voir problème 1.17).

B. Propriétés de la transformée de Fourier

Nous utiliserons la notation

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

pour désigner une paire de transformées de Fourier.

1. Linéarité (*superposition*)

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) \quad (1.29)$$

où a_1 et a_2 sont des constantes.

2. Décalage temporel

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (1.30)$$

3. Décalage fréquentiel

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \quad (1.31)$$

4. Changement d'échelle

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (1.32)$$

5. Inversion du temps

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) \quad (1.33)$$

6. Dualité

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \quad (1.34)$$

7. Différentiation

Dérivée par rapport au temps :

$$x'(t) = \frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j\omega X(\omega) \quad (1.35)$$

Dérivée par rapport à la fréquence :

$$(-jt)x(t) \leftrightarrow X'(\omega) = \frac{d}{d\omega} X(\omega) \quad (1.36)$$

8. Intégration

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) \quad (1.37)$$

C. Transformée de Fourier de quelques signaux usuels

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (1.38)$$

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} \quad (1.39)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (1.40)$$

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (1.41)$$

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (1.42)$$

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (1.43)$$

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (1.44)$$

$$e^{-at}u(t) \quad a > 0 \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + a} \quad (1.45)$$

$$e^{-a|t|} \quad a > 0 \leftrightarrow \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \quad (1.46)$$

1.5 CONVOLUTION

La *convolution* de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, opération que l'on note $x_1(t) * x_2(t)$ engendre un nouveau signal $x(t)$ tel que :

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau \quad (1.47)$$

A. Propriétés de la convolution

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) \quad (1.48)$$

$$[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] \quad (1.49)$$

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t) \quad (1.50)$$

B. Convolution avec la fonction $\delta(t)$

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \quad (1.51)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (1.52)$$

C. Théorèmes de convolution

Considérons deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dont les transformées de Fourier respectives sont $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$, on a les deux relations suivantes :

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega) \quad (1.53)$$

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega) \quad (1.54)$$

La relation (1.53) est connue sous le nom de *théorème de la convolution temporelle*, tandis que la relation (1.54) constitue le *théorème de la convolution fréquentielle*.

1.6 CORRÉLATION ET DENSITÉ SPECTRALE

A. Corrélation de deux signaux

Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux à valeurs réelles. On définit l'intercorrélation $R_{12}(\tau)$ de ces deux signaux au moyen de la relation suivante :

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t - \tau) dt \quad (1.55)$$

La fonction d'*autocorrélation* du signal $x_1(t)$, intercorrélation du signal $x_1(t)$ avec lui-même, se définit au moyen de la relation suivante :

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_1(t - \tau) dt \quad (1.56)$$

Propriétés des fonctions de corrélation :

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau) \quad (1.57)$$

$$R_{11}(\tau) = R_{11}(-\tau) \quad (1.58)$$

$$R_{11}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t)]^2 dt = E \quad (1.59)$$

où E est l'énergie contenue dans le signal.

B. Densité spectrale énergétique

Soit $R_{11}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation du signal $x_1(t)$. L'intégrale définie S_{11} qui suit

$$S_{11}(\omega) = \mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{11}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.60)$$

est appelée *densité spectrale énergétique* du signal $x_1(t)$. Prenons maintenant les transformées de Fourier inverses des membres de la relation (1.60), il vient :

$$R_{11}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_{11}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{11}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.61)$$

Si le signal $x_1(t)$ est réel, on a les relations :

$$S_{11}(\omega) = \mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = |X_1(\omega)|^2 \quad (1.62)$$

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.63)$$

En faisant $\tau = 0$, on obtient :

$$R_{11}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(\omega)|^2 d\omega \quad (1.64)$$

et en utilisant la relation (1.59) :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [X_1(\omega)]^2 d\omega \quad (1.65)$$

C'est la raison pour laquelle la quantité $S_{11}(\omega) = |X_1(\omega)|^2$ est appelée densité spectrale énergétique du signal $x_1(t)$. La relation (1.65) est aussi connue sous le nom de *théorème de Parseval* relatif à la transformée de Fourier.

C. Puissance d'un signal et autocorrélation

La fonction d'autocorrélation moyennée temporellement $\bar{R}_{11}(\tau)$ d'un signal réel $x_1(t)$ se définit au moyen de la relation :

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_1(t - \tau) dt \quad (1.66)$$

Notons que

$$\bar{R}_{11}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x_1(t)]^2 dt = P_1 \quad (1.67)$$

Si le signal $x(t)$ est périodique, de période T_0 , l'intégrale se calcule sur une période, et l'on a :

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_1(t - \tau) dt \quad (1.68)$$

D. Densité spectrale de puissance

La *densité spectrale de puissance* du signal $x_1(t)$, que l'on note $\bar{S}_{11}(\omega)$, se définit comme suit :

$$\bar{S}_{11}(\omega) = \mathcal{F}[\bar{R}_{11}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_{11}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.69)$$

D'où l'on déduit que :

$$\bar{R}_{11}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\bar{S}_{11}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}_{11}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.70)$$

En faisant $\tau = 0$, il vient :

$$\bar{R}_{11}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}_{11}(\omega) d\omega \quad (1.71)$$

Et en tenant compte de la relation (1.67) :

$$P_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x_1(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}_{11}(\omega) d\omega \quad (1.72)$$

C'est bien la raison pour laquelle $\bar{S}_{11}(\omega)$ est appelée densité spectrale de puissance du signal $x_1(t)$.

1.7 REPRÉSENTATION ET CLASSIFICATION D'UN SYSTÈME

A. Représentation d'un système

On appelle système la modélisation mathématique d'un processus physique qui relie un signal d'entrée (source ou excitation) à un signal de sortie (réponse).

Soit respectivement $x(t)$ et $y(t)$ les signaux d'entrée et de sortie d'un système. On dit que le système effectue une transformation de $x(t)$ en $y(t)$. On représente cela de façon symbolique :

$$y(t) = \mathcal{P}[x(t)] \quad (1.73)$$

où \mathcal{P} est l'opérateur qui transforme $x(t)$ en $y(t)$, comme le représente la figure 1-3.

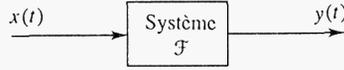


Fig. 1-3 Représentation d'un système par un opérateur

B. Classification d'un système

1. Systèmes à temps continu et systèmes à temps discrétisé

Si les signaux d'entrée et de sortie $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues du temps, on dit qu'il s'agit d'un *système à temps continu*, appelé généralement *système analogique*. Si ces signaux sont constitués de séquences de valeurs discrètes, il s'agit d'un *système à temps discrétisé* appelé en général *système échantillonné*. Dans la suite de cet ouvrage, nous traiterons essentiellement des systèmes analogiques.

2. Systèmes linéaires

Si l'opérateur \mathcal{P} de la relation (1.73) satisfait aux deux conditions suivantes, alors \mathcal{P} est un opérateur linéaire et le système représenté par \mathcal{P} est un *système linéaire*.

a. Additivité

$$\mathcal{P}[x_1(t) + x_2(t)] = \mathcal{P}[x_1(t)] + \mathcal{P}[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t) \quad (1.74)$$

pour tout couple de signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$.

b. Homogénéité

$$\mathcal{P}[ax(t)] = a\mathcal{P}[x(t)] = ay(t) \quad (1.75)$$

pour tout signal $x(t)$ et scalaire a .

Un système qui ne satisfait pas à la relation (1.74) et/ou à la relation (1.75) est dit *non linéaire*.

3. Système invariant dans le temps

Si un système satisfait la condition suivante, il est dit *temporellement invariant* :

$$\mathcal{P}[x(t - t_0)] = y(t - t_0) \quad (1.76)$$

où t_0 est une constante réelle quelconque. La relation (1.76) signifie qu'un retard sur le signal d'entrée produit le même retard sur le signal de sortie. Un système qui ne satisfait pas cette condition est dit *variable dans le temps*.

4. Systèmes linéaires invariants dans le temps (SLIT)

Si le système est d'une part invariant dans le temps et de plus linéaire, on dit qu'il s'agit d'un *système linéaire invariant dans le temps* (SLIT).

1.8 RÉPONSE IMPULSIONNELLE ET RÉPONSE EN FRÉQUENCE

A. Réponse impulsionnelle

La *réponse impulsionnelle* d'un système linéaire invariant dans le temps est le signal de sortie fourni par le système lorsque le signal d'entrée est la fonction $\delta(t)$, c'est-à-dire :

$$h(t) = \mathcal{P}[\delta(t)] \quad (1.77)$$

La fonction $h(t)$ est arbitraire, elle peut ne pas être de valeur nulle pour $t < 0$. Si, en revanche, on a la relation

$$h(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0 \quad (1.78)$$

le système est dit *causal*.

B. Réponse à une entrée arbitraire

La réponse $y(t)$ d'un SLIT à un signal d'entrée quelconque $x(t)$ s'exprime comme convolution de $x(t)$ avec la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système, c'est-à-dire :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad (1.79)$$

comme l'opération de convolution est commutative, on peut aussi écrire la relation de la façon suivante :

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau \quad (1.80)$$

C. Réponse d'un système causal

D'après les relations (1.78) et (1.79) ou (1.80), la réponse $y(t)$ d'un système causal linéaire indépendant du temps est donnée par :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} x(t - \tau)h(\tau) d\tau \quad (1.81)$$

Un signal $x(t)$ est dit *causal* s'il est à valeurs nulles pour $t < 0$. Si le signal d'entrée est causal, on a donc :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(t - \tau)h(\tau) d\tau \quad (1.82)$$

D. Réponse en fréquence

Si l'on applique maintenant le théorème de la convolution (1.53) relatif à la transformée de Fourier à la relation (1.79), on obtient :

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (1.83)$$

où $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$, $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$, et $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$.

$H(\omega)$ est appelée *réponse en fréquence* ou *fonction de transfert* du système. On a donc :

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (1.84)$$

La figure 1-4 illustre les relations (1.77), (1.79) et (1.83).

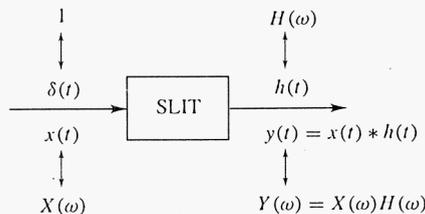


Fig. 1-4 Relations entre signaux d'entrée et de sortie d'un SLIT

En prenant la transformée de Fourier inverse de la relation (1.83), on obtient pour expression du signal de sortie :

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1.85)$$

On voit ainsi que la réponse impulsionnelle $h(t)$ ou la réponse en fréquence $H(\omega)$ définit complètement le système SLIT.

1.9 SYSTÈMES LINÉAIRES ET FILTRAGE

A. Spectre de fréquence

La réponse en fréquence $H(\omega)$ est une propriété caractéristique d'un système SLIT. Il s'agit généralement d'une quantité complexe, qui peut s'écrire sous la forme :

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta_h(\omega)} \quad (1.86)$$

Dans le cas d'un SLIT dont la réponse temporelle $h(t)$ est à valeurs réelles, $H(\omega)$ satisfait la relation de symétrie-conjugaison [relation (1.27)] :

$$H(-\omega) = H^*(\omega) \quad (1.87)$$

ce qui est équivalent à :

$$|H(-\omega)| = |H(\omega)| \quad (1.88a)$$

$$\theta_h(-\omega) = -\theta_h(\omega) \quad (1.88b)$$

Ce qui montre que l'amplitude $|H(\omega)|$ est une fonction paire de la fréquence, tandis que la phase $\theta_h(\omega)$ est une fonction impaire de la fréquence. Posons

$$Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{j\theta_y(\omega)} \quad X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\theta_x(\omega)}$$

On peut alors écrire la relation (1.83) sous la forme :

$$\begin{aligned} |Y(\omega)|e^{j\theta_y(\omega)} &= |X(\omega)|e^{j\theta_x(\omega)}|H(\omega)|e^{j\theta_h(\omega)} \\ &= |X(\omega)||H(\omega)|e^{j[\theta_x(\omega)+\theta_h(\omega)]} \end{aligned} \quad (1.89)$$

On a donc

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)||H(\omega)| \quad (1.90a)$$

$$\theta_y(\omega) = \theta_x(\omega) + \theta_h(\omega) \quad (1.90b)$$

Remarquons au passage que le spectre d'amplitude du signal de sortie est le produit du spectre d'amplitude du signal d'entrée par celui de la réponse impulsionnelle, tandis que le spectre de phase du signal de sortie est la somme du spectre de phase du signal d'entrée et de celui de la réponse impulsionnelle. On peut donc dire qu'un système SLIT filtre le signal d'entrée qui lui est appliqué. On utilise ici le mot *filtre* pour désigner un système qui présente une certaine sélectivité dans le domaine des fréquences.

B. Transmission exempte de distorsion

La transmission sans distorsion d'un signal au sein d'un système impose la reproduction fidèle en sortie du signal d'entrée. Si $x(t)$ est le signal d'entrée, le signal de sortie doit donc être de la forme

$$y(t) = Kx(t - t_r) \quad (1.91)$$

où t_r est un *retard* et K une *constante de gain*, comme l'illustrent les figures 1-5(a) et 1-5(b). Si l'on prend la transformée de Fourier des deux membres de la relation (1.91), on obtient

$$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_r} X(\omega) \quad (1.92)$$

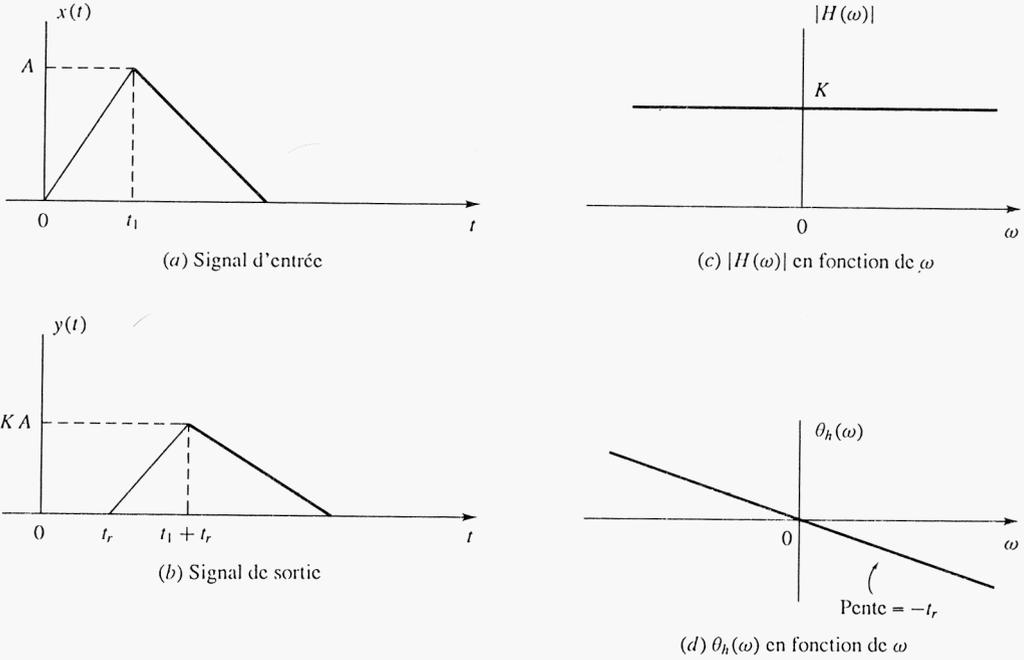


Fig. 1-5 Transmission d'un signal sans distorsion

D'après la relation (1.83), il apparaît que la condition pour qu'un système soit exempt de distorsion est :

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta_h(\omega)} = K e^{-j\omega t_r} \tag{1.93}$$

Ce qui veut dire que l'amplitude de $H(\omega)$ doit être constante quelle que soit la fréquence, tandis que la phase de $H(\omega)$ doit être une fonction linéaire de la fréquence, comme l'illustrent les figures 1-5(c) et (d).

C. Distorsion d'amplitude et distorsion de phase

Lorsque le spectre d'amplitude $|H(\omega)|$ de la réponse du système varie dans la bande de fréquence dans laquelle on travaille, les diverses composantes fréquentielles du signal sont transmises avec un gain ou une atténuation qui varie d'une fréquence à l'autre. On dit qu'il y a *distorsion d'amplitude*.

Lorsque la phase $\theta_h(\omega)$ du système ne varie pas linéairement avec la fréquence, la forme du signal de sortie diffère de celle du signal d'entrée parce que ses composantes fréquentielles sont toutes affectées de retards différents. On dit qu'il y a *distorsion de phase*.

1.10 FILTRES

Un filtre est un système dont la réponse en fréquence $H(\omega)$ évolue dans certaines bandes de fréquence. On classe les filtres en passe-haut, passe-bas, passe-bande ou coupe-bande (ce dernier étant parfois appelé réjecteur).

A. Filtre passe-bas idéal

On définit le filtre passe-bas idéal au moyen de la relation :

$$H_{PB}(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_r} & \text{pour } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.94}$$

La figure 1-6(a) représente l'amplitude et la phase de $H_{PB}(\omega)$. Le filtre passe-bas idéal transmet toutes les composantes du signal de pulsation ω inférieure à ω_c sans distorsion; $\omega_c = 2\pi f_c$ où f_c est la *fréquence de coupure* du filtre. Aucune des composantes du signal de pulsation supérieure à ω_c n'est transmise.

La réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal s'obtient en prenant la transformée de Fourier inverse de la relation (1.94), ce qui donne :

$$h_{PB}(t) = \frac{\sin \omega_c(t - t_r)}{\pi(t - t_r)} \quad (1.95)$$

La figure 1-6(b) représente la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal $h_{PB}(t)$.

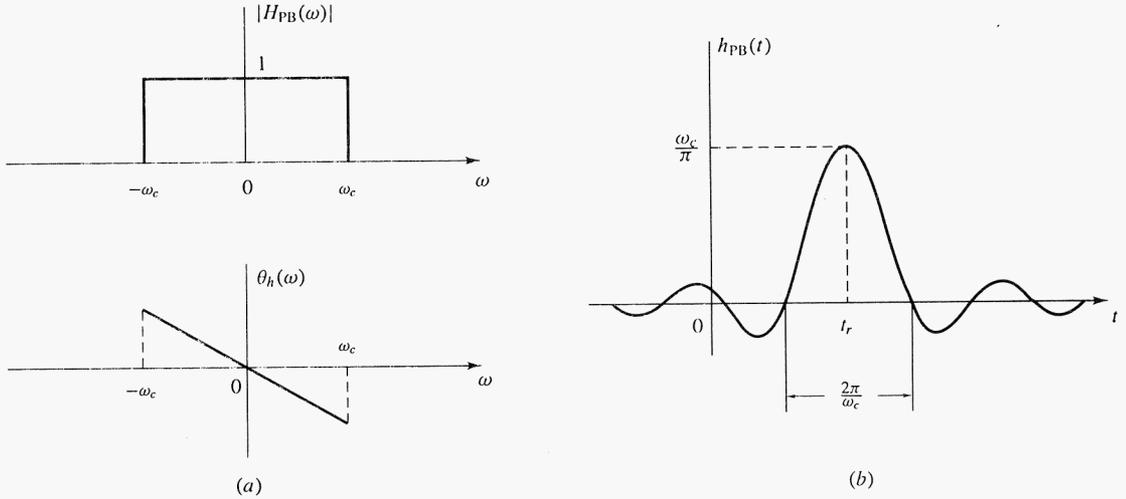


Fig. 1-6 Réponse en fréquence et réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal

B. Filtre passe-haut idéal

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut idéal répond à la définition suivante :

$$H_{PH}(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_r} & \text{pour } |\omega| \geq \omega_c \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.96)$$

La figure 1-7 représente la loi de variation de l'amplitude et de la phase en fonction de ω . Un filtre passe-haut idéal élimine du signal d'entrée qui lui est appliqué toutes les composantes dont la pulsation ω est inférieure à la valeur $\omega_c = 2\pi f_c$, où f_c est la fréquence de coupure. Il laisse passer sans distorsion toutes les composantes de pulsation ω supérieure à ω_c .

La réponse en fréquence d'un filtre passe-haut idéal peut s'exprimer de la façon suivante :

$$H_{PH}(\omega) = e^{-j\omega t_r} - H_{PB}(\omega) \quad (1.97)$$

où $H_{PB}(\omega)$ répond à la définition (1.94).

C. Filtre passe-bande idéal

Un filtre passe-bande idéal répond à la définition suivante :

$$H_B(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_r} & \text{pour } \omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.98)$$

La figure 1-8 représente la phase et l'amplitude de $H_B(\omega)$.

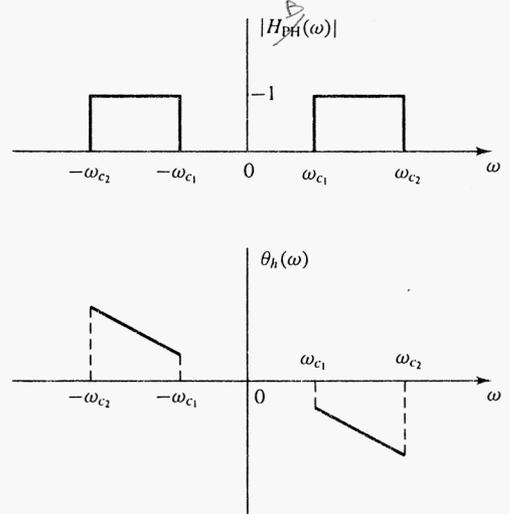
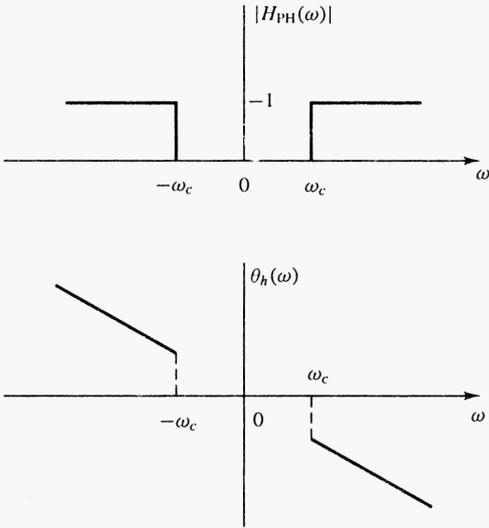


Fig. 1-7 Réponse en fréquence d'un passe-haut idéal **Fig. 1-8** Réponse en fréquence d'un passe-bande idéal

D. Filtre coupe-bande idéal

Un filtre coupe-bande idéal élimine les composantes de fréquence d'un signal dont la pulsation se situe entre les valeurs ω_{c1} et ω_{c2} , les autres composantes étant transmises sans distorsion. La figure 1-9 représente la phase et l'amplitude de la réponse en fréquence $H_{CB}(\omega)$ d'un filtre coupe-bande idéal.

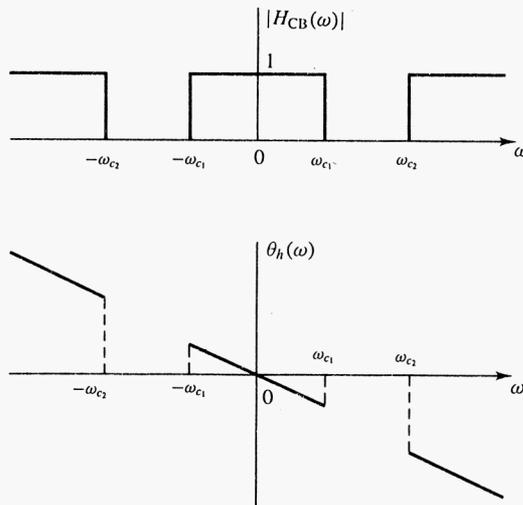


Fig. 1-9 Réponse en fréquence d'un coupe-bande idéal

La réponse en fréquence du filtre coupe-bande idéal s'exprime comme suit :

$$H_{CB}(\omega) = e^{-j\omega t_r} - H_B(\omega) \quad (1.99)$$

où $H_B(\omega)$ est donné par la relation (1.98).

E. Filtre causal

On notera que tous les filtres que nous venons de passer en revue sont du type non causal puisque $h(t) \neq 0$ pour $t < 0$. Il est impossible de réaliser des filtres idéaux. Comme le montre la relation (1.78), un filtre causal (physiquement réalisable) doit satisfaire la condition :

$$h(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

1.11 BANDE PASSANTE

A. Bande passante d'un filtre (ou d'un système)

La bande passante B_P d'un filtre passe-bas idéal est égale à sa fréquence de coupure, c'est-à-dire (si l'on raisonne sur la pulsation) $B_P = \omega_c$ [fig. 1-6(a)]. De même, la bande passante d'un filtre passe-bande idéal est donnée par $B_P = \omega_{c_2} - \omega_{c_1}$ (fig. 1-8). Le point de pulsation médiane $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_{c_1} + \omega_{c_2})$ est la *fréquence centrale* du filtre. On dit qu'un filtre est à *bande étroite* si $B_P \ll \omega_0$. On ne définit pas de bande passante pour un filtre passe-haut ou pour un coupe-bande.

On utilise couramment pour les filtres réalisables, donc non idéaux, la notion de bande passante à 3 dB, $B_{3\text{ dB}}$. Pour un passe-bas, $B_{3\text{ dB}}$ est égal à la fréquence (positive) pour laquelle le spectre d'amplitude $|H(\omega)|$ franchit en décroissant une valeur égale à $|H(0)|/\sqrt{2}$, comme l'illustre la fig. 1-10(a). Pour un filtre passe-bande, $B_{3\text{ dB}}$ est défini comme la différence des fréquences auxquelles le spectre d'amplitude $|H(\omega)|$ franchit en décroissant une valeur égale à $|H(\omega_0)|/\sqrt{2}$ où $|H(\omega_0)|$ est la valeur maximale du spectre d'amplitude, à la valeur ω_0 , fréquence centrale du filtre. Cette définition, quelque peu arbitraire, peut devenir ambiguë, voire multiple dans le cas de réponses en fréquence présentant plusieurs maximums, mais elle est largement répandue dans la pratique. On aura noté, au passage, que ces définitions concernent uniquement l'axe des fréquences positives, ignorant les éléments symétriques du domaine des fréquences négatives.

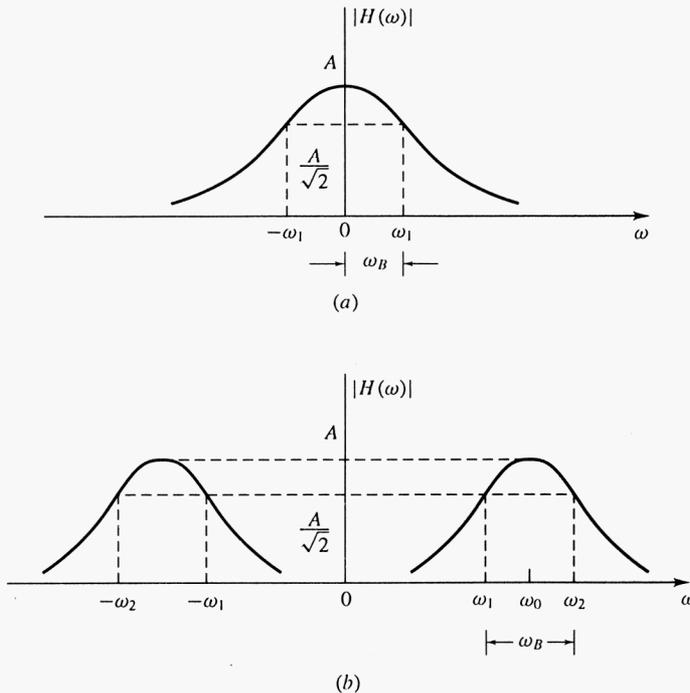


Fig. 1-10 Bande passante d'un filtre

B. Largeur de bande d'un signal

On entend par *largeur de bande d'un signal* la gamme de fréquence dans laquelle se répartit la partie *significative* de son énergie. Cette définition est ambiguë et donne donc lieu à des interprétations diverses. On retiendra que la bande passante en *puissance* d'un signal est la différence $\omega_2 - \omega_1$ où $\omega_1 < \omega < \omega_2$ définit l'intervalle de fréquence dans lequel réside 99% de la puissance du signal.

La largeur de bande d'un signal $x(t)$ peut être définie au moyen du concept de bande passante à 3 dB d'un filtre, en étudiant le spectre d'amplitude $|X(\omega)|$ du signal. C'est ainsi qu'en remplaçant $|H(\omega)|$ par $|X(\omega)|$ sur les figures 1-6, 1-7 et 1-8, on obtient les représentations de signaux respectivement de spectre basse fréquence, de spectre haute fréquence et de spectre limité en fréquence.

1.12 RELATION ENTRE DENSITÉS SPECTRALES D'ENTRÉE ET DE SORTIE D'UN SYSTÈME

Considérons un système linéaire indépendant du temps dont la fonction de transfert est $H(\omega)$ auquel est appliqué un signal d'entrée $x(t)$ et qui délivre un signal de sortie $y(t)$. S'il s'agit de signaux de durée limitée, d'après la relation (1.62) leurs densités spectrales énergétiques sont respectivement $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$ et $S_{yy}(\omega) = |Y(\omega)|^2$. Comme $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$, il en résulte que :

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (1.100)$$

Une relation semblable existe pour les signaux de durée illimitée dont on peut évaluer la puissance moyenne, en utilisant la densité spectrale de puissance de ces signaux :

$$\overline{S}_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 \overline{S}_{xx}(\omega) \quad (1.101)$$

Problèmes résolus

CLASSIFICATION DES SIGNAUX

1.1. Tracer les signaux suivants et déterminer s'il s'agit de signaux à énergie finie, à puissance finie ou n'appartenant à aucune de ces deux catégories.

(a) $x(t) = A \sin t, -\infty < t < \infty$

(b) $x(t) = A[u(t+a) - u(t-a)], a > 0$

(c) $x(t) = e^{-a|t|}, a > 0$

(d) $x(t) = u(t)$

(e) $x(t) = tu(t)$

(a) $x(t) = A \sin t$ (voir fig. 1-11). Comme $x(t)$ est périodique de période 2π , il s'agit d'un signal à puissance finie.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \sin^2 t dt \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) dt = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

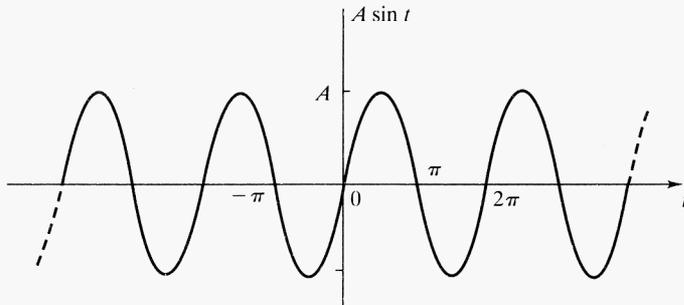


Fig. 1-11

- (b) $x(t) = A[u(t+a) - u(t-a)]$, $a > 0$ (voir fig. 1-12). Ce signal a une durée limitée, il est donc à énergie finie.

$$E = \int_{-a}^a A^2 dt = 2aA^2$$

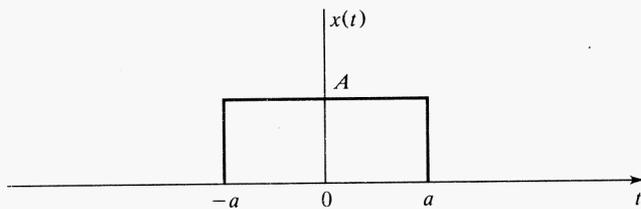


Fig. 1-12

- (c) $x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases}$ (Voir Figure 1-13.)

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{a} < \infty \end{aligned}$$

$x(t)$ est donc un signal à énergie finie.

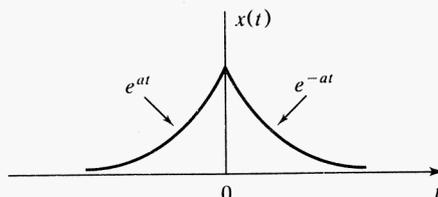


Fig. 1-13

(d) $x(t) = u(t)$ (Voir figure 1-14)

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T/2} 1^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2} = \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$x(t)$ est donc un signal à puissance finie

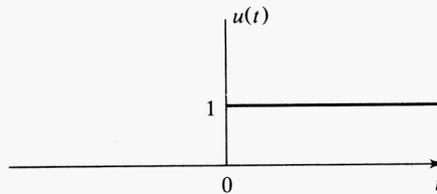


Fig. 1-14

(e) $x(t) = tu(t)$ (Voir figure 1-15.)

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T/2} t^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty \\ P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} t^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{(T/2)^3}{3} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T^2}{24} = \infty \end{aligned}$$

Ainsi $x(t)$ n'est ni un signal à énergie finie ni un signal à puissance finie.

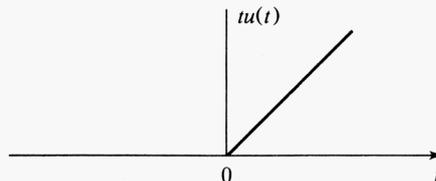


Fig. 1-15

- 1.2. Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux périodiques de périodes respectives T_1 et T_2 . Dans quelles conditions la somme

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

est-elle périodique et, dans ce cas, quelle est sa période?

D'après la relation (1.5),

$$x_1(t) = x_1(t + T_1) = x_1(t + mT_1) \quad \text{avec } m \text{ entier}$$

$$x_2(t) = x_2(t + T_2) = x_2(t + nT_2) \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

Si donc T_1 et T_2 sont tels que

$$mT_1 = nT_2 = T \tag{1.102}$$

alors

$$x(t + T) = x_1(t + T) + x_2(t + T) = x_1(t) + x_2(t) = x(t)$$

ce qui signifie que $x(t)$ est périodique. La condition pour cela est que l'on ait la relation :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m} = \text{un nombre rationnel}$$

La valeur de la période commune est le plus petit commun multiple des nombres T_1 et T_2 , déduit de la relation (1.102), lorsque m et n sont premiers entre eux. Si, en revanche, le rapport T_1/T_2 est irrationnel, les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ n'ont pas de période commune et $x(t)$ n'est pas périodique.

- 1.3. Les signaux qui suivent sont-ils périodiques? S'ils le sont, trouver leur période.

(a) $x(t) = \cos \frac{1}{3}t + \sin \frac{1}{4}t$

(b) $x(t) = \cos t + 2 \sin \sqrt{2}t$

(a) $\cos \frac{1}{3}t$ est une fonction périodique de période $T_1 = 6\pi$, et $\sin \frac{1}{4}t$ est périodique de période $T_2 = 8\pi$. Comme $T_1/T_2 = 6\pi/8\pi = \frac{3}{4}$, valeur rationnelle, $x(t)$ est périodique, de période $T = 4T_1 = 3T_2 = 24\pi$.

(b) $\cos t$ est périodique, de période $T_1 = 2\pi$, et $\sin \sqrt{2}t$ est périodique, de période $T_2 = \sqrt{2}\pi$. Comme $T_1/T_2 = 2\pi/(\sqrt{2}\pi) = \sqrt{2}$, valeur irrationnelle, $x(t)$ n'est pas périodique.

FONCTIONS SINGULIÈRES

- 1.4. Vérifier les propriétés (1.9) et (1.10) :

(a) $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

(b) $\delta(-t) = \delta(t)$

La démonstration de ces propriétés repose sur la *relation d'équivalence* suivante :

Soit $g_1(t)$ et $g_2(t)$ deux fonctions généralisées, il existe une relation d'équivalence qui énonce que $g_1(t) = g_2(t)$ si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)\phi(t) dt \tag{1.103}$$

quelle que soit la fonction $\phi(t)$.

- (a) En faisant le changement de variable, $at = \tau$, $t = \tau/a$, $dt = (1/a)d\tau$, on obtient :

Si $a > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t) dt &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\phi\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{a} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{|a|} \phi(0) \end{aligned}$$

Si $a < 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t) dt &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} \delta(\tau)\phi\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\phi\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau \\ &= -\frac{1}{a} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right) \Big|_{\tau \rightarrow 0} = \frac{1}{|a|} \phi(0) \end{aligned}$$

Ainsi, quel que soit a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t) dt = \frac{1}{|a|} \phi(0)$$

En utilisant la relation (I.7) pour $\phi(0)$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\phi(t) dt = \frac{1}{|a|} \phi(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \delta(t)\phi(t) dt$$

quelle que soit la fonction $\phi(t)$. En invoquant alors l'équivalence de la relation (I.103), on obtient :

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

(b) En faisant $a = -1$ dans la relation ci-dessus, il vient :

$$\delta(-t) = \frac{1}{|-1|} \delta(t) = \delta(t)$$

ce qui montre que $\delta(t)$ est une fonction paire.

1.5. Vérifier la propriété (I.12) :

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

Si $x(t)$ est continue à $t = t_0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)\delta(t - t_0)]\phi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)[x(t)\phi(t)] dt \\ &= x(t_0)\phi(t_0) \\ &= x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\phi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_0)\delta(t - t_0)]\phi(t) dt \end{aligned}$$

et ceci quelle que soit la fonction $\phi(t)$. En invoquant la relation d'équivalence (I.103), on conclut que :

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

1.6. Montrer que les propriétés suivantes s'appliquent aussi aux dérivées de $\delta(t)$:

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta'(t) dt = -\phi'(0) \quad (1.104)$$

(b)

$$t\delta'(t) = -\delta(t) \quad (1.105)$$

(a) En utilisant les relations (I.15) et (I.7), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t) dt = -\phi'(0)$$

(b) En utilisant à nouveau les relations (I.15) et (I.7), il vient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [t\delta'(t)]\phi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)[t\phi(t)] dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \frac{d}{dt}[t\phi(t)] dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)[\phi(t) + t\phi'(t)] dt \\ &= -[\phi(t) + t\phi'(t)]|_{t=0} \\ &= -\phi(0) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [-\delta(t)]\phi(t) dt \end{aligned}$$

En invoquant l'équivalence (I.103), on en déduit que :

$$t\delta'(t) = -\delta(t)$$

1.7. Evaluer les intégrales qui suivent.

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + \cos \pi t)\delta(t-1) dt$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta(2t-2) dt$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\delta'(t) dt$$

(a)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + \cos \pi t)\delta(t-1) dt &= (t^2 + \cos \pi t)|_{t=1} \\ &= 1 + \cos \pi = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta(2t-2) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\delta[2(t-1)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \frac{1}{|2|} \delta(t-1) dt \\ &= \frac{1}{2} e^{-t} \Big|_{t=1} = \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}\delta'(t) dt &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}(e^{-2t})\delta(t) dt \\ &= 2e^{-2t} \Big|_{t=0} = 2 \end{aligned}$$

SÉRIES DE FOURIER

1.8. Trouver la série de Fourier complexe du signal :

$$x(t) = \cos \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t$$

Nous pourrions faire appel à la relation (1.19) pour calculer les coefficients de la série mais utilisons ici les formules d'Euler qui définissent le sinus et le cosinus.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + \left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} - \frac{1}{4}(e^{2j\omega_0 t} - 2 + e^{-2j\omega_0 t}) \\ &= -\frac{1}{4}e^{-2j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{4}e^{2j\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

On trouve en définitive que $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$, $c_2 = c_{-2} = -\frac{1}{4}$ et que tous les autres coefficients sont identiquement nuls.

1.9. Trouver la décomposition en série de Fourier du train d'impulsions $\delta_T(t)$ représenté sur la figure 1-16(a), défini par la relation

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.106)$$

Posons

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

D'après la relation (1.19), les coefficients c_n sont donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

Ainsi :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_0 t} \quad (1.107)$$

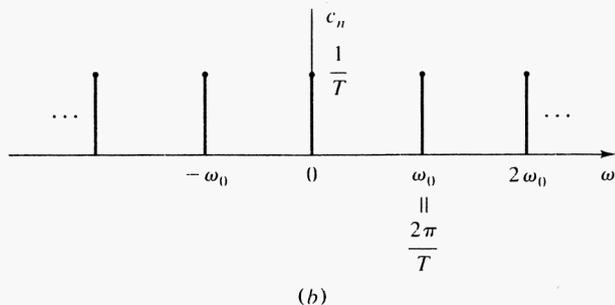
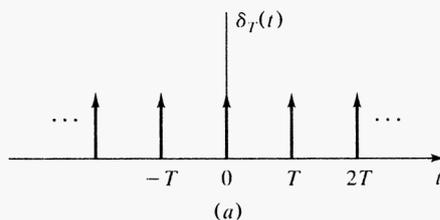


Fig. 1-16

1.10. Calculer et tracer le spectre d'amplitude du signal carré périodique $x(t)$ représenté sur la figure 1-17(a)

pour

(a) $d = T/4$ et (b) $d = T/8$.

D'après la relation (1.18) (en faisant $t_0 = 0$), avec $\omega_0 = 2\pi/T$, il vient :

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T} \int_0^d e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^d = \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} (1 - e^{-jn\omega_0 d}) \\
 &= \frac{A}{T} \frac{1}{jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 d/2} (e^{jn\omega_0 d/2} - e^{-jn\omega_0 d/2}) \\
 &= \frac{Ad \sin(n\omega_0 d/2)}{T n\omega_0 d/2} e^{-jn\omega_0 d/2}
 \end{aligned} \tag{1.108}$$

On notera que $|c_n| = 0$ chaque fois que $n\omega_0 d/2 = m\pi$, soit :

$$n\omega_0 = \frac{m2\pi}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

(a) $d = T/4, n\omega_0 d/2 = n\pi d/T = n\pi/4$

$$|c_n| = \frac{A}{4} \left| \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4} \right|$$

Le spectre d'amplitude correspondant est représenté sur la figure 1-17(b).

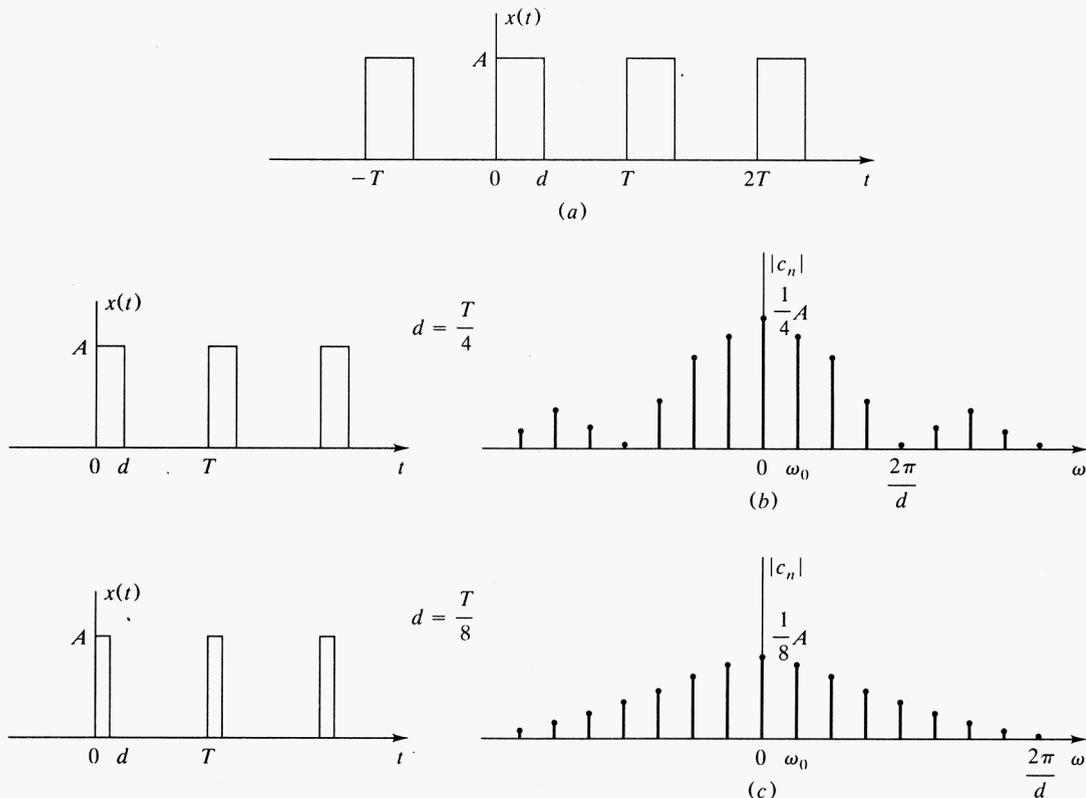


Fig. 1-17

$$(b) \quad d = T/8, \quad n\omega_0 d/2 = n\pi d/T = n\pi/8$$

$$|c_n| = \frac{A}{8} \left| \frac{\sin(n\pi/8)}{n\pi/8} \right|$$

Le spectre d'amplitude correspondant est représenté sur la figure 1-17(c).

1.11. Soit $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux signaux périodiques de période T , dont les séries complexes de Fourier s'expriment comme suit :

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t} \quad x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Montrer que le signal $x_1(t)x_2(t)$ est périodique de période T et peut se mettre sous la forme

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

où c_n a pour expression :

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{n-k} \quad (1.109)$$

$$x(t+T) = x_1(t+T)x_2(t+T) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

Donc $x(t)$ est périodique de période T . Posons donc

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Alors :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \right) x_2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_2(t) e^{-j(n-k)\omega_0 t} dt \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{n-k} \end{aligned}$$

1.12. Reprenons les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du problème 1.11. Montrer que

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_{-n} \quad (1.110)$$

La relation (1.110) est connue sous le nom de *formule de Parseval*.

D'après le problème 1.11 et la relation (1.109), on a :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{n-k}$$

En faisant $n = 0$ dans l'expression précédente, on obtient :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e_{-n}$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

1.13. Quelle est la transformée de Fourier de l'impulsion rectangulaire $x(t)$, représentée sur la figure 1-18(a), d'expression

$$x(t) = p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases} \quad (1.111)$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{2 \sin a\omega}{\omega} = 2a \frac{\sin a\omega}{a\omega} \end{aligned} \quad (1.112)$$

La figure 1-18(b) représente la transformée de Fourier de $p_a(t)$.

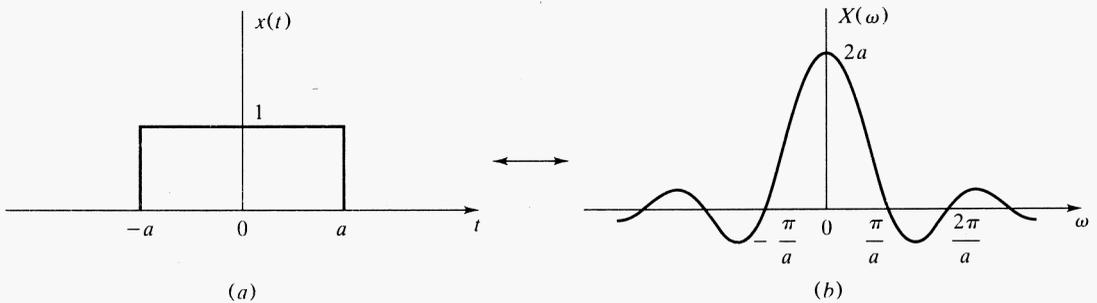


Fig. 1-18

1.14. Calculer la transformée de Fourier du signal représenté sur la figure 1.19(a), qui a pour expression :

$$x(t) = \frac{\sin at}{\pi t} \quad (1.113)$$

D'après la solution du problème 1.13, nous avons :

$$\mathcal{F}[p_a(t)] = \frac{2}{\omega} \sin a\omega$$

En invoquant la propriété de dualité (1.34) de la transformée de Fourier, il vient :

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{t} \sin at\right] = 2\pi p_a(-\omega)$$

Donc

$$X(\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{\sin at}{\pi t}\right] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left[\frac{2}{t} \sin at\right] = p_a(-\omega) = p_a(\omega) \quad (1.114)$$

où $p_a(\omega)$ répond à la définition suivante [voir relation (1.111) et figure 1-19(b) :

$$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

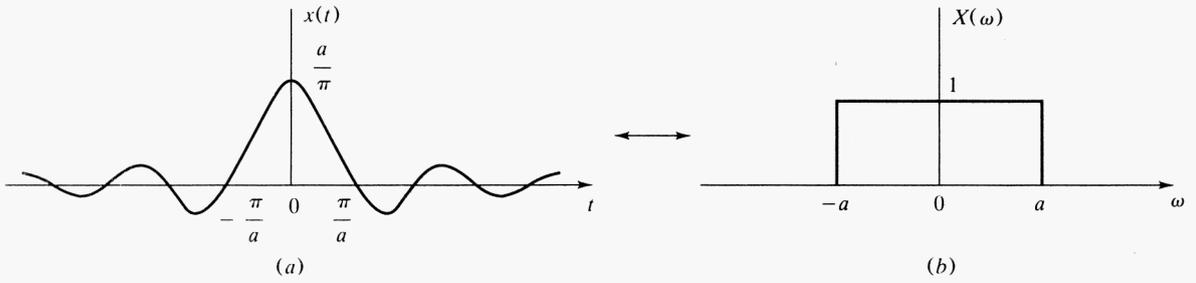


Fig. 1-19

1.15. Montrer que si

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

alors

$$x(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) \quad (1.115)$$

La relation (1.15) est connue sous le nom de *théorème de la modulation*.

En appliquant la *formule d'Euler*

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

si l'on invoque alors la propriété (1.31) relative au décalage en fréquence, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t) \cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}\right] \\ &= \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

1.16. La transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ a pour expression

$$X(\omega) = \frac{1}{2} p_a(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} p_a(\omega + \omega_0)$$

Trouver l'expression de $x(t)$ et en donner la représentation graphique.

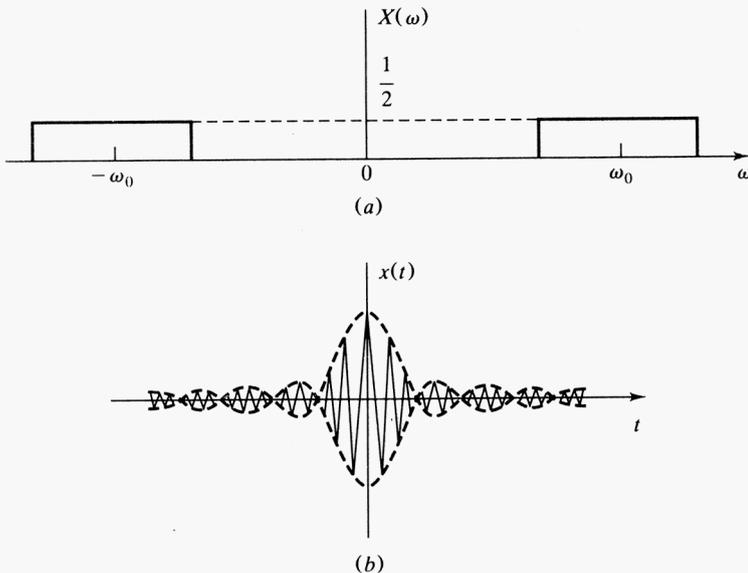


Fig. 1-20

D'après la relation (1.114) et le théorème de la modulation, on peut écrire :

$$x(t) = \frac{\sin at}{\pi t} \cos \omega_0 t$$

fonction que l'on a représentée sur la figure 1.20(b).

1.17. Soit $x(t)$ un signal réel et sa transformée $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$, montrer que l'on a :

$$\mathcal{F}[x(-t)] = X(-\omega) = X^*(\omega) \quad (1.116)$$

D'après la définition (1.24) on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(-t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j(-\omega)\lambda} d\lambda = X(-\omega) \end{aligned}$$

Si donc $x(t)$ est un signal réel,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \right]^* = X^*(\omega)$$

D'où finalement :

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

1.18. Considérons un signal réel $x(t)$ et sa transformée :

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = A(\omega) + jB(\omega) \quad (1.117)$$

(a) Montrer que $x(t)$ peut se décomposer comme suit :

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t) \quad (1.118)$$

où $x_p(t)$ et $x_i(t)$ sont les composantes respectivement paire et impaire de $x(t)$.

(b) Montrer que :

$$x_p(t) \leftrightarrow A(\omega) \quad (1.119)$$

$$x_i(t) \leftrightarrow jB(\omega) \quad (1.120)$$

(a) Posons

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

alors

$$x(-t) = x_p(-t) + x_i(-t) = x_p(t) - x_i(t)$$

et l'on a :

$$x_p(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (1.121a)$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (1.121b)$$

(b) Maintenant, si $x(t)$ est un signal réel, d'après la relation (1.116) du problème 1.17, on a :

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

$$\mathcal{F}[x(-t)] = X(-\omega) = X^*(\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$$

D'où l'on conclut que

$$\mathcal{F}[x_p(t)] = \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{2}X^*(\omega) = A(\omega)$$

$$\mathcal{F}[x_i(t)] = \frac{1}{2}X(\omega) - \frac{1}{2}X^*(\omega) = jB(\omega)$$

Les relations (1.119) et (1.120) montrent que la transformée de Fourier d'un signal réel pair est une fonction réelle de ω et que celle d'un signal réel impair est une fonction imaginaire pure de ω .

- 1.19.** Trouver la transformée de Fourier de la fonction *signe* notée $\text{sgn}(t)$ (voir fig. 1-21), définie de la façon suivante :

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (1.122)$$

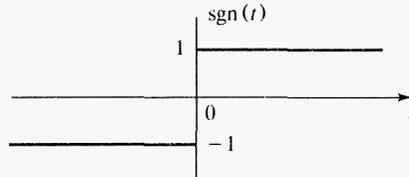


Fig. 1-21 Fonction signe

La fonction signe $\text{sgn}(t)$ peut aussi s'exprimer de la façon suivante :

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

La relation (1.16) permet d'écrire

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) = 2\delta(t)$$

Soit

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = X(\omega)$$

En appliquant le théorème de dérivation (1.35), on obtient :

$$j\omega X(\omega) = \mathcal{F}[2\delta(t)] = 2$$

et

$$X(\omega) = \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega} \quad (1.123)$$

On aura remarqué au passage que $\text{sgn}(t)$ est une fonction impaire et que, donc, sa transformée de Fourier est une fonction imaginaire pure de ω .

- 1.20.** Vérifier la relation (1.44), qui établit que :

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Comme on l'a vu sur la figure 1-22, $u(t)$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

Notons que $\frac{1}{2}$ est la composante paire de $u(t)$ et que $\frac{1}{2} \text{sgn}(t)$ est la composante impaire de $u(t)$, il en résulte que :

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2} \mathcal{F}[1] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[\text{sgn}(t)]$$

ce qui devient, en invoquant les relations (1.40) et (1.123) :

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

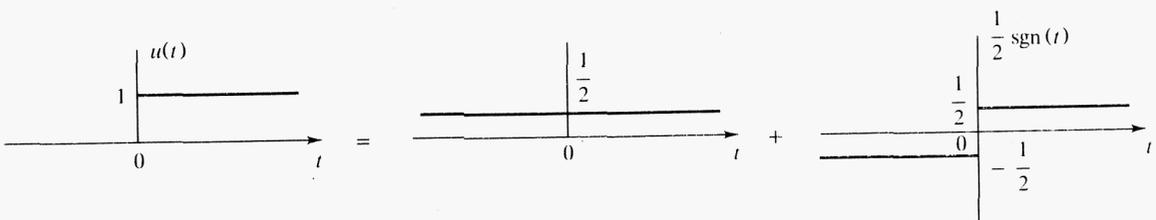


Fig. 1-22 Fonction échelon unitaire et ses composantes paire et impaire

1.21. Quelle est la structure de la transformée de Fourier d'un signal $x(t)$ périodique, de période T ?

On peut exprimer $x(t)$ sous la forme :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de cette relation et en tenant compte de la relation (1.41), on obtient :

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \tag{1.124}$$

La transformée de Fourier d'un signal périodique se compose d'une suite de raies aux fréquences harmoniques de la fréquence fondamentale du signal.

1.22. Calculer la transformée de Fourier du train d'impulsions périodique $\delta_T(t)$ [figure 1-23(a) et relation (1.106)].

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

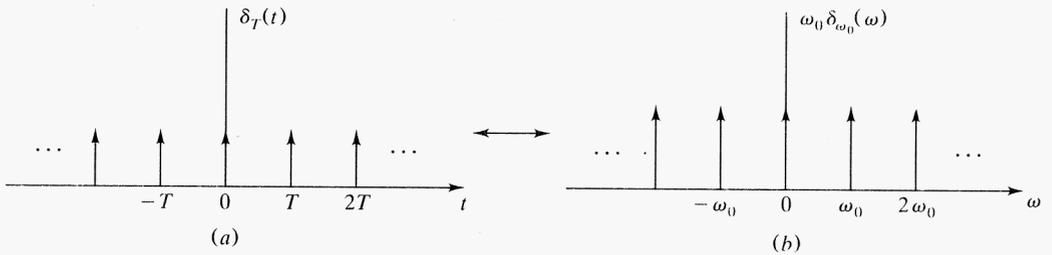


Fig. 1-23 Train d'impulsions unitaires et sa transformée de Fourier

D'après la relation (1.107) du problème 1.9, le développement en série de Fourier complexe de $\delta_T(t)$ est le suivant :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

En appliquant la relation (1.24) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_T(t)] &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \end{aligned}$$

or il se trouve que :

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right] = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \tag{1.125}$$

Il en résulte que la transformée de Fourier d'un train d'impulsions unitaires de période T est aussi un train d'impulsion unitaire, de période $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ [voir fig. 1-23 (b)].

CONVOLUTION

1.23. Démontrer la relation (I.52), qui énonce que :

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Si l'on invoque la propriété (I.48) de commutativité de la convolution ainsi que la propriété (I.8) relative à la fonction δ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t - t_0) &= \delta(t - t_0) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0) x(t - \tau) d\tau \\ &= x(t - \tau)|_{\tau=t_0} = x(t - t_0) \end{aligned}$$

1.24. Montrer que

$$x(t) * \delta'(t) = x'(t) \quad (I.126)$$

Il nous sera utile de démontrer tout d'abord que :

$$\delta'(-t) = -\delta'(t) \quad (I.127)$$

Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(-t) \phi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \phi(-t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi'(-t) dt && \text{relation (I.15)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi'(t) dt && \text{puisque } \phi'(-t) = -\phi'(t) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \phi(t) dt && \text{relation (I.15)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [-\delta'(t)] \phi(t) dt \end{aligned}$$

Si l'on invoque la propriété d'équivalence (I.103),

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

et d'après la définition de la convolution (I.47) :

$$\begin{aligned} x(t) * \delta'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta'(t - \tau) d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta'(\tau - t) d\tau && \text{relation (I.127)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x'(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = x'(t) && \text{relation (I.15)} \end{aligned}$$

1.25. Démontrer le théorème temporel de la convolution (I.53), à savoir :

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &\leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega) \\ \mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

En échangeant l'ordre des intégrations, il vient :

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

Et en appliquant la propriété de translation temporelle (I.30) de la transformée de Fourier,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = X_2(\omega) e^{-j\omega\tau}$$

On obtient en définitive :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) X_2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] X_2(\omega) = X_1(\omega) X_2(\omega) \end{aligned}$$

1.26. Montrer que :

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

et calculer sa transformée de Fourier.

D'après la définition de la convolution (I.47), on a :

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

Puisque

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \tau < t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$

Ensuite, en invoquant le théorème de la convolution (I.53) et la relation (I.44), il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] &= X(\omega) \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= \pi X(\omega) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \\ &= \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \end{aligned}$$

Puisque $X(\omega) \delta(\omega) = X(0) \delta(\omega)$ d'après la relation (I.11).

1.27. Montrer que, si $x(t)$ est un signal dont la bande passante est limitée, c'est-à-dire

$$X(\omega) = 0 \quad \text{pour } |\omega| > \omega_c$$

alors

$$x(t) * \frac{\sin at}{\pi t} = x(t) \quad \text{si } a > \omega_c$$

D'après le problème 1.14, on a :

$$\frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

On a aussi, d'après le théorème de la convolution (I.53),

$$x(t) * \frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow X(\omega) p_a(\omega) = X(\omega) \quad \text{si } a > \omega_c$$

D'où :

$$x(t) * \frac{\sin at}{\pi t} = x(t) \quad \text{si } a > \omega_c$$

- 1.28.** Utiliser le théorème de convolution relatif au domaine des fréquences (I.54) pour déduire le théorème de la modulation (I.115). (Voir problème 1.15.)

D'après la relation (I.42), on a :

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

D'après le théorème de la convolution (I.54),

$$x(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)$$

la seconde égalité résulte de la relation (I.52).

- 1.29.** Soit deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dont les transformées de Fourier sont, respectivement, $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$. Montrer que l'on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega \quad (I.128)$$

D'après le théorème de la convolution (I.54), nous avons :

$$\mathcal{F}[x_1(t)x_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(\omega - \lambda) d\lambda$$

C'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t)x_2(t)]e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(\omega - \lambda) d\lambda$$

En faisant $\omega = 0$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(-\lambda) d\lambda$$

Et en changeant le nom de la variable muette d'intégration :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega$$

- 1.30.** Démontrer le théorème de Parseval [relation (I.65)] pour la transformée de Fourier.

Si $x(t)$ est réel, on déduit de la relation (I.116) du problème 1.17 l'égalité suivante :

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

En utilisant la relation (I.128) du problème 1.29, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t)]^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_1(-\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_1^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

CORRÉLATION ET DENSITÉ SPECTRALE

- 1.31.** Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation $R_{11}(\tau)$ de la fonction

$$x_1(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$$

D'après la définition (I.55) de l'autocorrélation,

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_1(t - \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-a(t-\tau)}u(t - \tau) dt \\ &= e^{a\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at}u(t)u(t - \tau) dt \end{aligned}$$

Pour $\tau > 0$ on a :

$$u(t)u(t - \tau) = \begin{cases} 1 & t > \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

Ainsi,

$$R_{11}(\tau) = e^{a\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} e^{-a\tau}$$

Comme $R_{11}(\tau)$ est une fonction paire de τ [relation (1.58)], on en déduit que :

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2a} e^{-a|\tau|} \quad a > 0$$

ce qu'illustre la figure 1-24.

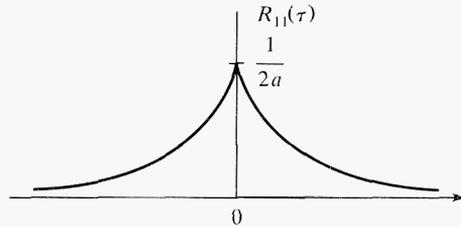


Fig. 1-24

1.32. Montrer que la fonction d'intercorrélation des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ peut s'écrire sous forme d'une convolution :

$$R_{12}(\tau) = x_1(\tau) * x_2(-\tau) \quad (1.129)$$

Si l'on applique la définition de la convolution :

$$\begin{aligned} x_1(\tau) * x_2(-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda) x_2[-(\tau - \lambda)] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda) x_2(\lambda - \tau) d\lambda = R_{12}(\tau) \end{aligned}$$

1.33. Montrer que si

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega) \quad \text{et} \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(\omega)$$

Alors

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = X_1(\omega) X_2(-\omega) \quad (1.130)$$

$$\mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = X_1(\omega) X_1(-\omega) \quad (1.131)$$

D'après la propriété d'inversion du temps (1.33) de la transformée de Fourier :

$$x(-\tau) \leftrightarrow X(-\omega)$$

En appliquant le théorème de la convolution (1.53) à la relation (1.129), on obtient :

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = X_1(\omega) X_2(-\omega)$$

Et en faisant $x_2(t) = x_1(t)$, il vient :

$$\mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = X_1(\omega) X_1(-\omega)$$

1.34. Démontrer la relation (1.62) qui établit, si $x_1(t)$ est réel, que :

$$S_{11}(\omega) = \mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = |X_1(\omega)|^2$$

Si $x_1(t)$ est réel, on peut écrire, d'après la relation (1.116) du problème 1.17 :

$$x_1(-t) \leftrightarrow X_1(-\omega) = X_1^*(\omega)$$

Et en appliquant la relation (1.13) nous obtenons :

$$S_{11}(\omega) = \mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = X_1(\omega)X_1(-\omega) = X_1(\omega)X_1^*(\omega) = |X_1(\omega)|^2$$

1.35. Vérifier la relation (1.62) pour $x_1(t) = e^{-at}u(t)$.

D'après la relation (1.45),

$$X_1(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

donc

$$|X_1(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + a^2}$$

Nous avons aussi, d'après le problème 1.31 :

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{2a}e^{-a|\tau|} \quad a > 0$$

Et d'après la relation (1.46) :

$$S_{11}(\omega) = \mathcal{F}[R_{11}(\tau)] = \frac{1}{\omega^2 + a^2} = |X_1(\omega)|^2$$

1.36. Montrer que la fonction d'autocorrélation moyennée temporellement d'un signal périodique de période T_1 est périodique et de même période.

Soit $x_1(t)$ un signal périodique de période T_1 . On peut écrire que :

$$x_1(t) = x_1(t + T_1)$$

$$x_1(t - \tau) = x_1(t - \tau + T_1)$$

En appliquant la relation (1.68)

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11}(\tau - T_1) &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t)x_1[t - (\tau - T_1)] dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t)x_1(t - \tau + T_1) dt \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t)x_1(t - \tau) dt \\ &= \bar{R}_{11}(\tau) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\bar{R}_{11}(\tau)$ est périodique, de période T_1 .

1.37. Calculer la fonction d'autocorrélation moyennée temporellement du signal sinusoïdal :

$$x_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \phi) \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

D'après la relation (1.68),

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11}(\tau) &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t)x_1(t - \tau) dt \\ &= \frac{A^2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \sin(\omega_1 t + \phi) \sin[(\omega_1(t - \tau) + \phi)] dt \\ &= \frac{A^2}{2T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [\cos \omega_1 \tau - \cos(2\omega_1 t + 2\phi - \omega_1 \tau)] dt \\ &= \frac{A^2}{2T_1} \cos \omega_1 \tau \int_{-T_1/2}^{T_1/2} dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega_1 \tau \end{aligned} \tag{1.132}$$

1.38. Vérifier la relation (1.72) pour le signal sinusoïdal du problème 1.37.

D'après les résultats obtenus au problème 1.37, la relation (1.132), et en invoquant la relation (1.142), l'expression de la densité spectrale de puissance $\overline{S}_{11}(\omega)$ de $x_1(t)$ est la suivante :

$$\overline{S}_{11}(\omega) = \mathcal{F}[\overline{R}_{11}(\tau)] = \frac{\pi A^2}{2} \delta(\omega - \omega_1) + \frac{\pi A^2}{2} \delta(\omega + \omega_1)$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S}_{11}(\omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\pi A^2}{2} \delta(\omega - \omega_1) + \frac{\pi A^2}{2} \delta(\omega + \omega_1) \right] d\omega \\ &= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] d\omega \\ &= \frac{A^2}{4} (1 + 1) = \frac{A^2}{2} = P_1 \end{aligned}$$

Où P_1 est la puissance moyenne du signal $x_1(t)$ sur une période.

REPRÉSENTATION ET CLASSIFICATION DES SYSTÈMES

1.39. Considérons le système dont la relation entre signal d'entrée $x(t)$ et le signal de sortie $y(t)$ est linéaire :

$$y(t) = ax(t) + b$$

où a et b sont des constantes. Peut-on dire que ce système est linéaire ?

On représente la relation entre signal d'entrée et signal de sortie au moyen d'un opérateur \mathcal{P} , tel que :

$$y(t) = \mathcal{P}[x(t)] = ax(t) + b$$

Considérons deux signaux d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$, les signaux de sortie correspondants seront respectivement :

$$y_1(t) = \mathcal{P}[x_1(t)] = ax_1(t) + b$$

$$y_2(t) = \mathcal{P}[x_2(t)] = ax_2(t) + b$$

Si l'on applique maintenant un signal $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, le signal de sortie s'exprime comme suit :

$$y(t) = \mathcal{P}[x_1(t) + x_2(t)] = a[x_1(t) + x_2(t)] + b$$

On constate que

$$y(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$$

ce qui prouve que la propriété d'additivité (1.74) n'est pas satisfaite et que le système n'est donc pas linéaire.

D'ailleurs, la propriété d'homogénéité (1.75) n'est pas satisfaite non plus puisque

$$\mathcal{P}[2x(t)] = 2ax(t) + b \neq 2y(t)$$

1.40. Déterminer si les systèmes proposés ci-après sont linéaires ou non.

(a) $\mathcal{P}[x(t)] = x(t) \cos \omega_c t$

(b) $\mathcal{P}[x(t)] = [A + x(t)] \cos \omega_c t$

(a)
$$\begin{aligned} \mathcal{P}[x_1(t) + x_2(t)] &= [x_1(t) + x_2(t)] \cos \omega_c t \\ &= x_1(t) \cos \omega_c t + x_2(t) \cos \omega_c t \\ &= \mathcal{P}[x_1(t)] + \mathcal{P}[x_2(t)] \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}[\alpha x(t)] = [\alpha x(t)] \cos \omega_c t = \alpha \mathcal{P}[x(t)]$$

Le système (a) est donc linéaire.

(b)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}[x_1(t) + x_2(t)] &= [A + x_1(t) + x_2(t)] \cos \omega_c t \\
 &\neq \mathcal{P}[x_1(t)] + \mathcal{P}[x_2(t)] \\
 &= [A + x_1(t)] \cos \omega_c t + [A + x_2(t)] \cos \omega_c t \\
 &= [2A + x_1(t) + x_2(t)] \cos \omega_c t
 \end{aligned}$$

Le système (b) n'est donc pas linéaire. Il ne satisfait pas non plus à la condition d'homogénéité (1.75). On retiendra au passage que le système (a) est appelé *modulateur équilibré*. Il est utilisé en télécommunication pour obtenir la modulation d'amplitude de la fréquence porteuse (voir paragraphe 2.3 de cet ouvrage) au moyen de deux bandes latérales symétriques, d'où l'appellation DBL (double bande latérale) de ce procédé. Le système (b) correspond à un modulateur couramment utilisé en modulation d'amplitude *classique* (voir paragraphe 2.4).

1.41. Considérons le système représenté par la relation :

$$\mathcal{P}[x(t)] = x^*(t)$$

où $x^*(t)$ est le complexe conjugué de $x(t)$. Ce système est-il linéaire ?

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}[x_1(t) + x_2(t)] &= [x_1(t) + x_2(t)]^* = x_1^*(t) + x_2^*(t) \\
 &= \mathcal{P}[x_1(t)] + \mathcal{P}[x_2(t)]
 \end{aligned}$$

La condition d'additivité des signaux est bien remplie et il faut maintenant vérifier si la condition d'homogénéité (1.75) est satisfaite. Soit donc α une constante quelconque,

$$\mathcal{P}[\alpha x(t)] = [\alpha x(t)]^* = \alpha^* x^*(t) = \alpha^* \mathcal{P}[x(t)] \neq \alpha \mathcal{P}[x(t)]$$

ce qui montre que ce système ne répond pas à la définition d'un système linéaire.

1.42. Considérons un système dont l'entrée et la sortie sont reliées comme suit :

$$y(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

(a) S'agit-il d'un système linéaire ?

(b) Ce système est-il invariant dans le temps ?

(a) Soit $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Alors :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= [x_1(t) + x_2(t)]\delta_T(t) = x_1(t)\delta_T(t) + x_2(t)\delta_T(t) \\
 &= y_1(t) + y_2(t)
 \end{aligned}$$

De même, soit $x(t) = \alpha x_1(t)$, on a :

$$y(t) = [\alpha x_1(t)]\delta_T(t) = \alpha[x_1(t)\delta_T(t)] = \alpha y_1(t)$$

Ce système est donc linéaire.

(b) Soit le signal

$$x_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

alors

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(nT)\delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{T}nT\right)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant le signal d'entrée

$$x_2(t) = x_1\left(t - \frac{T}{4}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

1.52. Considérons un filtre de fonction de transfert $H(\omega) = 1/(1 + j\omega)$ auquel on applique un signal d'entrée $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

(a) Calculer la densité spectrale énergétique du signal de sortie.

(b) Montrer que l'énergie délivrée en sortie est le tiers de celle qui est fournie à l'entrée du filtre.

(a)

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 4}$$

La densité spectrale énergétique du signal de sortie, d'après la relation (1.99), s'exprime comme suit :

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{\omega^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{\omega^2 + 4}$$

(b) En invoquant le *théorème de Parseval* (1.65) et en tenant compte des relations suivantes :

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0 \rightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad |X(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + a^2}$$

on obtient :

$$E_{\text{entrée}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 + 4} = \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{4}$$

$$E_{\text{sortie}} = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-2t} dt - \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-4t} dt$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} E_{\text{entrée}}$$

1.53. Considérons un différentiateur idéal tel que le représente la figure 1-31(a). On applique à son entrée un signal dont la densité spectrale de puissance est représentée sur la figure 1-31(b). Calculer et tracer la densité spectrale de puissance du signal de sortie. Evaluer la moyenne quadratique de ce signal.

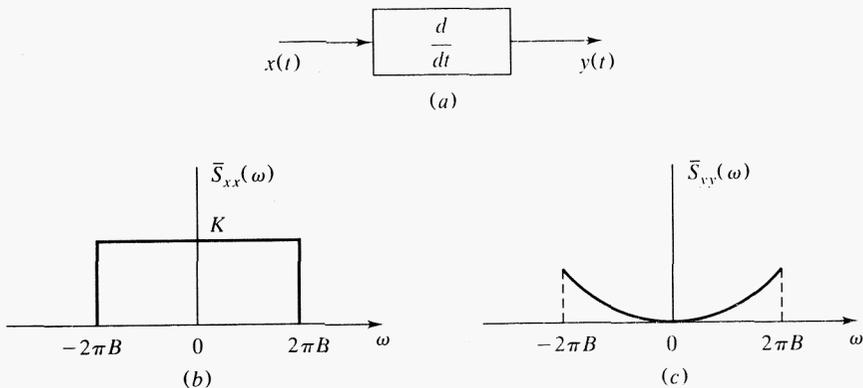


Fig. 1-31

D'après la relation (1.35), on peut écrire :

$$H(\omega) = j\omega$$

En invoquant la relation (1.100), on obtient :

$$\overline{S}_{yy}(\omega) = |j\omega|^2 \overline{S}_{xx}(\omega) = \omega^2 \overline{S}_{xx}(\omega)$$

courbe représentée sur la figure 1-31(c).

D'après la relation (1.72), la moyenne quadratique de $y(t)$ s'obtient en évaluant l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [y(t)]^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S}_{yy}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} K \omega^2 d\omega \\ &= \frac{K}{\pi} \int_0^{2\pi B} \omega^2 d\omega = \frac{8\pi^2 K B^3}{3} \end{aligned}$$

Problèmes supplémentaires

1.54. Montrer que si

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(\omega) \\ x^{(n)}(t) &= \frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega) \end{aligned}$$

Indication : Appliquer n fois le théorème de la dérivation (1.35).

1.55. Appliquer les méthodes de dérivation et le résultat obtenu au problème 1.54 pour obtenir la transformée de Fourier de l'impulsion triangulaire représentée sur la figure 1-32.

Réponse :

$$Ad \left[\frac{\sin(\omega d/2)}{\omega d/2} \right]^2$$

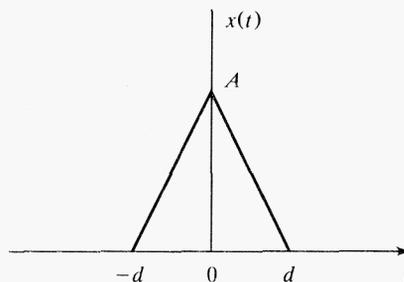


Fig. 1-32

1.56. Soit $R_{11}(\tau)$ et $R_{22}(\tau)$ les fonctions d'autocorrélation respectives de $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Soit $R_{12}(\tau)$ leur fonction d'intercorrélation. Montrer que les relations suivantes sont valables pour toute valeur de τ :

- (a) $R_{11}(0) \geq |R_{11}(\tau)|$
 (b) $R_{22}(0) \geq |R_{22}(\tau)|$
 (c) $R_{11}(0) + R_{22}(0) \geq 2|R_{12}(\tau)|$

Indication : utiliser la relation suivante, valable pour toute valeur de τ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t) \pm x_2(t - \tau)]^2 dt \geq 0$$

1.57. Calculer la fonction d'autocorrélation moyennée temporellement et la densité spectrale de puissance du signal suivant :

$$x(t) = \cos 2\pi t + 2 \cos 4\pi t$$

Réponse :

$$\begin{aligned} \overline{R}_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2} \cos 2\pi \tau + 2 \cos 4\pi \tau \\ \overline{S}_{xx}(\omega) &= \frac{1}{2} \pi [\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)] + 2\pi [\delta(\omega - 4\pi) + \delta(\omega + 4\pi)] \end{aligned}$$

1.58. Lorsqu'on applique un signal borné à l'entrée d'un système stable, on obtient en sortie un signal borné. Montrer qu'un système est stable, au sens qui précède, si sa réponse impulsionnelle est intégrable en valeur absolue, c'est-à-dire si :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Indication : Prendre la valeur absolue des deux membres de la relation (1.82) en tenant compte de ce que $|x(t - \tau)| < K$.

1.59. Montrer que, si la réponse impulsionnelle d'un SLIT causal ne présente pas de pic à $t = 0$, et en posant :

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

$A(\omega)$ et $B(\omega)$ satisfont les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \\ B(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \end{aligned}$$

Ces relations définissent ce que l'on appelle une *paire de transformées de Hilbert* (voir problème 1.47).

Indication : Poser $h(t) = h_e(t) + h_o(t)$ et utiliser la causalité de $h(t)$ pour montrer que $h_e(t) = h_o(t)[\text{sgn}(t)]$, $h_o(t) = h_e(t)[\text{sgn}(t)]$.

1.60. Montrer que :

(a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} [m(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{m}(t)]^2 dt$$

(b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} m(t) \widehat{m}(t) dt = 0$$

où $\widehat{m}(t)$ est la transformée de Hilbert de $m(t)$.

Indication : (a) Utiliser la relation (1.141) et appliquer le théorème de Parseval (1.65) relatif à la transformée de Fourier.

(b) Utiliser la relation (1.141) ainsi que la relation (1.128) du problème 1.29.

- 1.61.** Déterminer la réponse impulsionnelle et la bande passante à 3 dB d'un filtre dont la fonction de transfert est $H(\omega) = 10/(\omega^2 + 100)$.

Réponse : $h(t) = \frac{1}{2}e^{-10|t|}$, $B_{3\text{dB}} = 6,44$ rad/s.

- 1.62.** Un filtre gaussien est un système linéaire dont la réponse en fréquence (ou fonction de transfert) est :

$$H(\omega) = e^{-a\omega^2} e^{-j\omega t_0}$$

Calculer (a) la bande passante à 3 dB $B_{3\text{dB}}$ et (b) la bande équivalente B_{eq} définie par la relation suivante :

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{2} \frac{1}{H(0)} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)| d\omega$$

Réponses : (a) $B_{3\text{dB}} = \frac{0,59}{\sqrt{a}}$ (b) $B_{\text{eq}} = \frac{0,886}{\sqrt{a}}$

- 1.63.** Un filtre de *Butterworth* passe-bande a pour fonction de transfert :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^{2n}}}$$

où n est le nombre de composants réactifs (inductances ou capacités).

(a) Montrer que lorsque $n \rightarrow \infty$, $|H(\omega)|$ s'approche de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas idéal, telle que la représente la figure 1-6(a), avec $\omega_0 = \omega_c$.

(b) Trouver n pour que $|H(\omega)|^2$ soit constante à 1 dB près sur l'intervalle de fréquence $|\omega| = 0,8\omega_0$

Réponse : (a) On aura vu que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2n} = \begin{cases} \infty & \text{pour } \omega > \omega_0 \\ 0 & \text{pour } \omega < \omega_0 \end{cases}$$

(b) $n = 3$

- 1.64.** Soit $x(t)$ et $y(t)$ les signaux d'entrée et de sortie à puissance finie d'un SLIT de fonction de transfert $H(\omega)$. Montrer que les fonctions d'autocorrélation moyennées temporellement du signal d'entrée et du signal de sortie satisfont la relation suivante :

$$\bar{R}_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \bar{R}_{xx}(\tau + \sigma - \beta) d\sigma d\beta$$

Indication : Utiliser les relations (1.80) et (1.66).

- 1.65.** Justifier la relation (1.101)

Indication : Utiliser le résultat du problème 1.64 et la relation (1.69).

- 1.66.** Un signal de puissance finie $x(t)$ et de densité spectrale constante K est appliqué au filtre passe-bas RC du problème 1.46 [fig. 1-25(a)]. Evaluer la moyenne quadratique du signal de sortie.

Réponse : $\frac{K}{2RC}$

Modulation d'amplitude

2.1 INTRODUCTION

La transmission d'un signal porteur d'informations — d'un message — dans la bande passante d'un canal de communication, comme une ligne téléphonique ou une liaison par satellite, impose souvent la transposition de la gamme de fréquence occupée par le signal dans une autre bande propre à la transmission. Un moyen d'obtenir cette transposition consiste à effectuer une *modulation* d'un signal appelé porteur par le signal porteur d'informations. Il s'agit de faire varier une des caractéristiques de cette porteur en fonction du signal utile. Le signal obtenu est donc une *porteur modulée*, le signal utile étant le *signal modulant*.

Les systèmes de modulation les plus simples s'appliquent à une onde entretenue pure, une *porteur continue* sinusoïdale d'expression $A_p \cos(\omega_p t + \phi)$, dont on module l'*amplitude* ou la *phase* instantanée. On représente un tel signal, $x_p(t)$, de la façon suivante :

$$x_p(t) = A(t) \cos[\omega_p t + \phi(t)] \quad \omega_p = 2\pi f_p \quad (2.1)$$

Dans la relation (2.1), f_p est la *fréquence porteur*, $A(t)$ et $\phi(t)$ sont respectivement l'*amplitude instantanée* et la *phase instantanée* de la porteur modulée. Lorsque $A(t)$ dépend de façon linéaire du signal utile $m(t)$, on a une modulation d'amplitude. Si la phase $\phi(t)$ ou sa dérivée dépend linéairement de $m(t)$, on dit qu'on a une *modulation de phase* ou de *fréquence*. On regroupe ces deux dernières méthodes sous l'appellation de *modulation d'argument*, comme nous le verrons au chapitre 3.

La *modulation d'impulsion* consiste à utiliser un train d'impulsions courtes périodiques comme support de l'information à acheminer.

2.2 MODULATION D'AMPLITUDE

Dans le cas de la modulation d'amplitude, on représente la porteur, sans restreindre la généralité de l'exposé, par un signal sinusoïdal dont la phase $\phi(t)$ est nulle.

$$x_p(t) = A(t) \cos \omega_p t \quad (2.2)$$

où l'amplitude $A(t)$ de la porteur est une fonction linéaire du signal utile $m(t)$. On parle d'ailleurs parfois de *modulation linéaire* à propos de la modulation d'amplitude. Suivant le type de relation spectrale entre $m(t)$ et $A(t)$, on discerne plusieurs types de modulation d'amplitude, la modulation à *double bande latérale* (BLD), la modulation d'amplitude *ordinaire* (AM), la modulation à *bande latérale unique* (BLU) et la modulation à *bande latérale résiduelle* (BLR).

2.3 MODULATION À BANDE LATÉRALE DOUBLE

On est en présence d'une modulation à bande latérale double lorsque l'amplitude $A(t)$ est proportionnelle au signal utile $m(t)$, c'est-à-dire :

$$x_{\text{BLD}}(t) = m(t) \cos \omega_p t \quad (2.3)$$

où l'on a supposé que la constante de proportionnalité est égale à 1. La relation (2.3) montre que ce procédé consiste à effectuer le produit du signal représentant la porteur, $\cos \omega_p t$, par le signal utile, $m(t)$. Si l'on applique le théorème de la modulation, relation (1.115), le spectre d'un signal BLD s'exprime ainsi :

$$X_{\text{BLD}}(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_p) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_p) \quad (2.4)$$

A. Obtention d'un signal BLD

La figure 2-1(a) illustre le procédé de modulation à bande latérale double. Les formes du signal modulant $m(t)$ et du signal modulé x_{BLD} sont représentées respectivement sur les figures 2-1(b) et (c), tandis que leurs domaines spectraux apparaissent sur les figures 2-1(d) et (e), $M(\omega)$ ayant une largeur de bande ω_M .

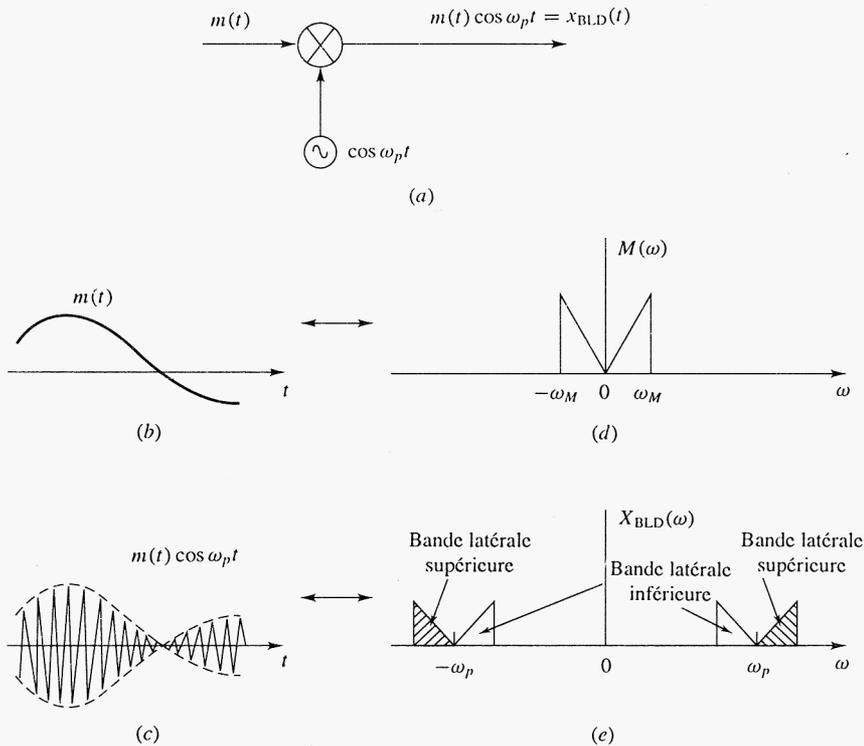


Fig. 2-1 Modulation à bande latérale double

Les spectres $M(\omega - \omega_p)$ et $M(\omega + \omega_p)$ constituent le spectre du signal utile transposé autour des fréquences $\omega = \omega_p$ et $\omega = -\omega_p$. La partie du spectre située au-dessus de ω_p est appelée *bande latérale supérieure* tandis que la partie au-dessous de ω_p est appelée *bande latérale inférieure*. Le domaine spectral occupé par le signal utile est appelé *bande de base*, raison pour laquelle on appelle parfois le signal utile *signal de base*. Comme on le voit sur la figure 2-1(e), le spectre de $x_{BLD}(t)$ ne présente aucune trace de la porteuse. C'est pourquoi ce système de modulation est parfois appelé *modulation à double bande latérale et suppression de porteuse*. La valeur de la fréquence porteuse ω_p est, en général, grande devant celle du signal utile ω_M , $\omega_p \gg \omega_M$.

B. Démodulation d'un signal BLD

Lorsqu'on reçoit un signal modulé, il faut en extraire le signal utile. Cette opération s'appelle *démodulation* ou *détection*. Le message $m(t)$ peut être extrait du signal modulé $x_{BLD}(t)$ en le multipliant par une porteuse locale et en utilisant un filtre passe-bas pour éliminer du signal produit les fréquences hors du domaine du signal utile, comme le montre la figure 2-2 (voir problème 2.1).

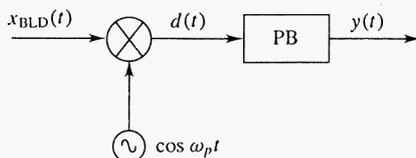


Fig. 2-2 Démodulateur synchrone

La difficulté principale de cette méthode de démodulation, on le voit, est de disposer localement d'un signal de même fréquence que celle de la porteuse qui a servi à élaborer le signal modulé et qui soit rigoureusement en phase avec cette porteuse (problèmes 2.2 et 2.3). Ce type de démodulation utilise ce qu'on appelle un *démodulateur synchrone* pour effectuer une *détection cohérente*.

2.4 MODULATION D'AMPLITUDE ORDINAIRE

Le procédé de modulation d'amplitude le plus courant, largement utilisé en radiodiffusion, consiste à laisser une porteuse d'amplitude significative dans un signal à double bande latérale. Ce procédé est bien connu sous le nom d'AM (pour amplitude modulation), par opposition à FM (*frequency modulation*). Le signal obtenu se présente sous la forme suivante :

$$x_{AM}(t) = m(t) \cos \omega_p t + A \cos \omega_p t = [A + m(t)] \cos \omega_p t \quad (2.5)$$

Le spectre du signal $x_{AM}(t)$ a pour expression :

$$X_{AM}(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega - \omega_p) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_p) + \pi A [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] \quad (2.6)$$

La figure 2-3 donne un exemple de signal modulé en amplitude ainsi qu'une représentation du domaine spectral occupé par ce signal.

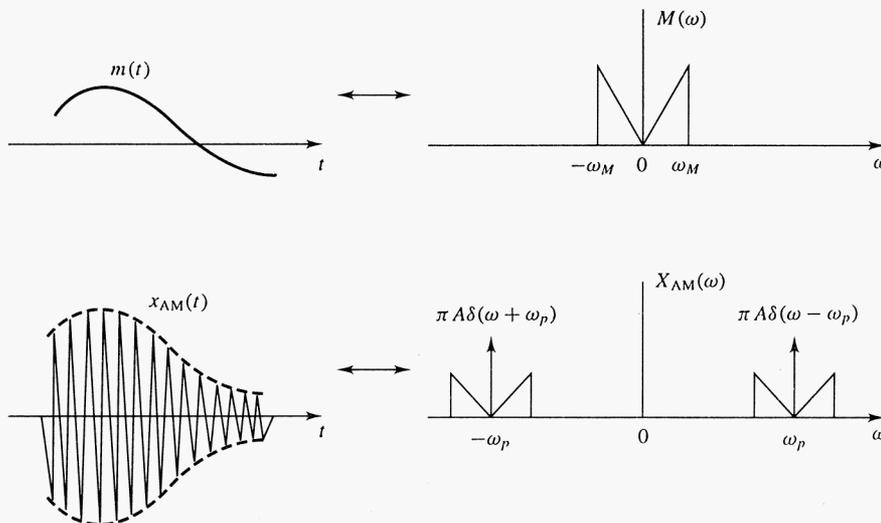


Fig. 2-3 Modulation d'amplitude

A. Démodulation d'un signal modulé en amplitude

L'avantage du procédé AM sur le procédé BLD est sa simplicité de démodulation, connue sous le nom de *détection d'enveloppe*, dès lors qu'une porteuse de niveau substantiel demeure disponible. Si l'on examine la relation (2.5), on voit que si A est suffisamment grand, l'enveloppe (l'amplitude) du signal modulé résultant de la somme $A + m(t)$ est une image fidèle de $m(t)$. Il suffit dans ce cas d'extraire l'enveloppe de la porteuse, sans aucune considération de phase, pour obtenir le signal utile. Si A n'a pas l'amplitude suffisante, le signal modulé ne représente $m(t)$ que par intermittence, comme l'illustre la figure 2-4. La condition de bon fonctionnement d'un détecteur d'enveloppe en AM est donc la suivante :

$$A + m(t) > 0 \quad \text{quel que soit } t \quad (2.7)$$

ou encore :

$$A \geq |\min\{m(t)\}| \quad (2.8)$$

où $\min\{m(t)\}$ est la valeur minimale de $m(t)$.

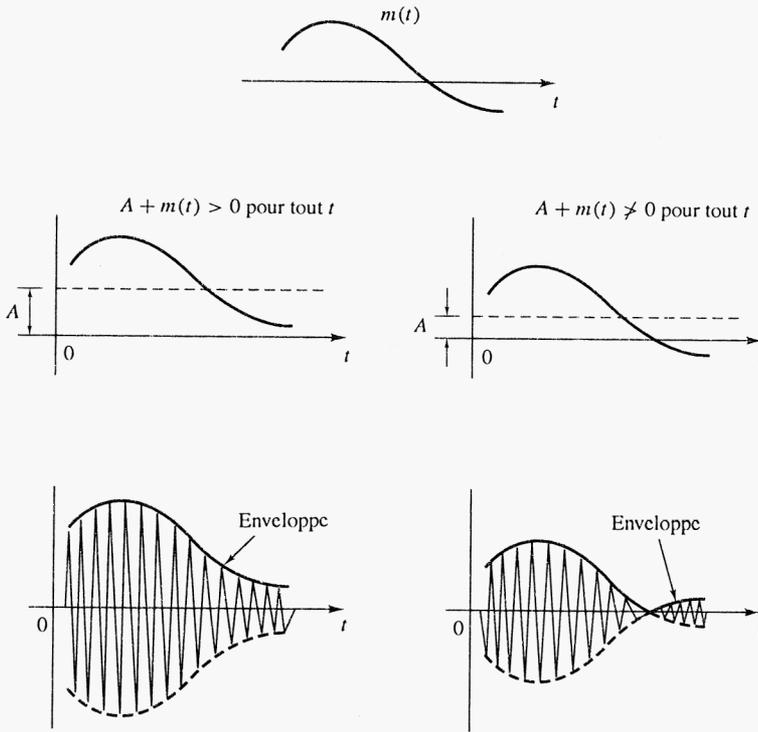


Fig. 2-4 Signal AM et son enveloppe

B. Index de modulation

On définit pour la modulation d'amplitude un *index de modulation* μ :

$$\mu = \frac{|\min \{m(t)\}|}{A} \tag{2.9}$$

D'après la relation (2.8), la condition pour pouvoir démoduler un signal AM au moyen d'un détecteur d'enveloppe est :

$$\mu \leq 1 \tag{2.10}$$

Lorsque $\mu > 1$, le signal est dit *surmodulé*, ce qui produit une distorsion de l'enveloppe représentant le signal utile.

C. Détecteur d'enveloppe

La figure 2-5(a) montre la forme la plus simple d'un détecteur d'enveloppe, constitué d'une diode et d'un réseau RC. Ce détecteur fonctionne de la façon suivante. Lors de l'alternance positive du signal qui lui est appliqué, la diode est polarisée dans le sens passant et la capacité C se charge rapidement à la valeur crête du signal. Dès que celui-ci se met à décroître, la diode est polarisée en inverse et se bloque; la capacité C se décharge lentement dans la résistance R jusqu'à l'alternance positive suivante du signal, qui déblocquera la diode lorsque la valeur du signal dépassera le potentiel de charge de la capacité. Celle-ci se chargera de nouveau à la valeur crête du signal, et ainsi de suite.

Pour que ce détecteur fonctionne de façon correcte, il faut choisir une constante de temps adéquate pour la décharge de la capacité C (voir problème 2.8). En pratique, il suffit que l'on ait $1/f_p \ll 1/f_M$, où f_M est la largeur de bande du signal utile.

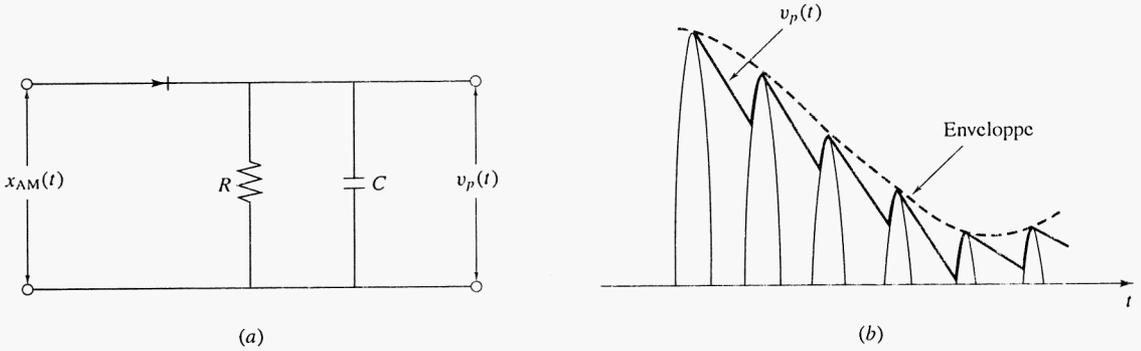


Fig. 2-5 Détecteur d'enveloppe en AM

2.5 MODULATION À BANDE LATÉRALE UNIQUE

Les systèmes de modulation AM et BLD conduisent à une occupation excessive du spectre de fréquence puisqu'ils nécessitent une largeur de bande égale à deux fois celle du signal utile (voir figure 2-1 et 2-3).

Comme l'une ou l'autre des deux bandes latérales contient à elle seule toute l'information nécessaire pour reconstituer le signal, il suffit de ne transmettre qu'une de ces bandes latérales. On parle dans ce cas de transmission à *bande latérale unique*, en abrégé BLU.

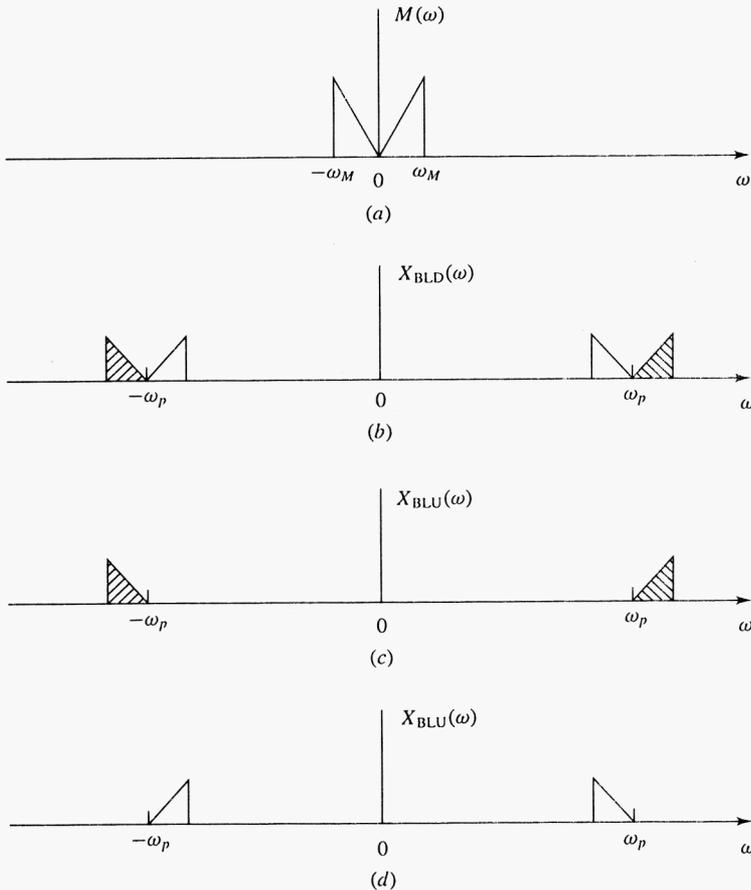


Fig. 2-6 Spectres des signaux BLD et BLU

La figure 2-6 représente les spectres des signaux BLD et BLU. L'avantage de cette dernière méthode de modulation est l'économie de bande qu'elle permet, au prix d'une certaine complexité des circuits de modulation et de détection.

A. Elaboration des signaux BLU

1. Discrimination de fréquence

La manière la plus simple d'engendrer un signal BLU est de produire un signal BLD puis de supprimer une des deux bandes latérales obtenues par filtrage. On emploie pour cela un *discriminateur de fréquence*. La figure 2-7 représente le schéma de principe de ce procédé. Il n'est guère simple, cependant, à mettre en œuvre car il impose des filtres de caractéristiques très raides.

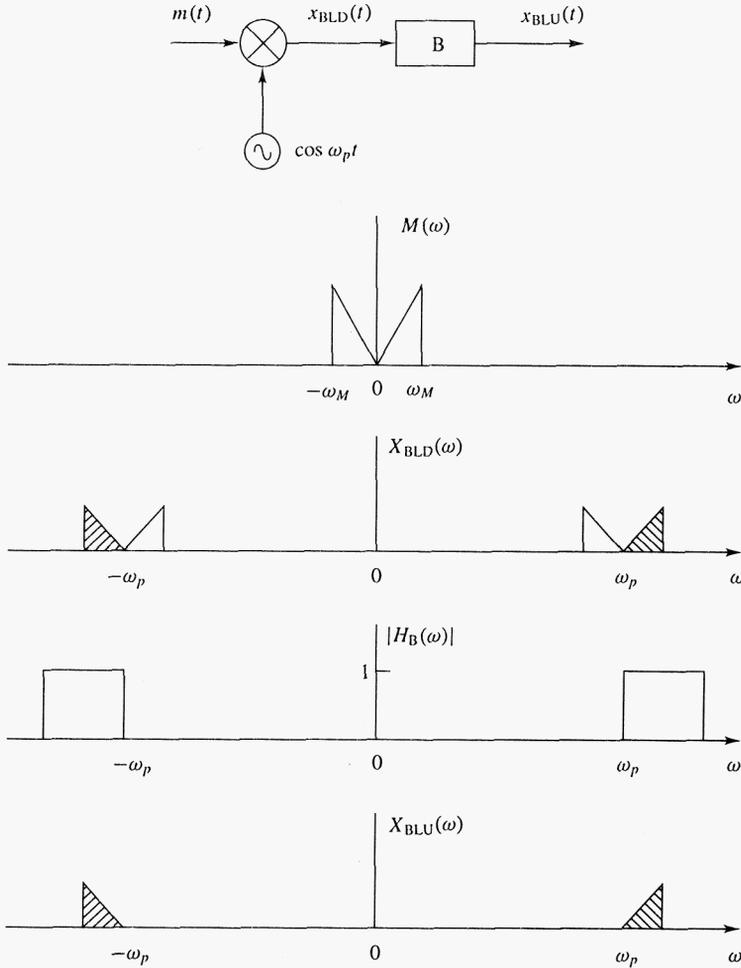


Fig. 2-7 Synthèse d'un signal BLU par filtrage de bande

2. Réseau déphaseur (phase-shift)

La figure 2-8 représente un autre système d'obtention de signaux BLU, connu sous le nom de réseau *phase-shift* (circuit déphaseur). Les blocs sur lesquels apparaît la mention $-\pi/2$ sont des déphaseurs qui introduisent un retard de phase d'un quart de période sur les signaux qui leur sont appliqués. Il est pratiquement impossible de réaliser un déphaseur parfait, mais on peut en réaliser une bonne approximation sur un intervalle de fréquence limité.

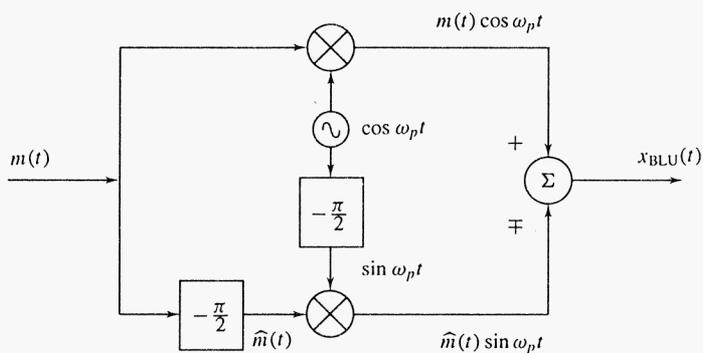


Fig. 2-8 Synthèse d'un signal BLU par déphasage

Soit $\widehat{m}(t)$ le signal de sortie du déphaseur $-\pi/2$ qui reçoit le signal $m(t)$ (voir problème 1.47), alors le signal BLU $x_{\text{BLU}}(t)$, d'après la figure 2-8, a pour expression :

$$x_{\text{BLU}}(t) = m(t) \cos \omega_p t \mp \widehat{m}(t) \sin \omega_p t \quad (2.11)$$

La différence produit le signal de la bande latérale inférieure, tandis que la somme produit celui de la bande latérale supérieure. C'est ce que représente la figure 2-8 (voir problème 2.10).

B. Démodulation des signaux BLU

La démodulation des signaux BLU peut se pratiquer de façon simple au moyen d'un détecteur cohérent, comme pour les signaux BLD, c'est-à-dire qu'on effectue le produit du signal incident par une porteuse locale et qu'on filtre le signal obtenu au moyen d'un passe-bas comme le représente la figure 2-9.

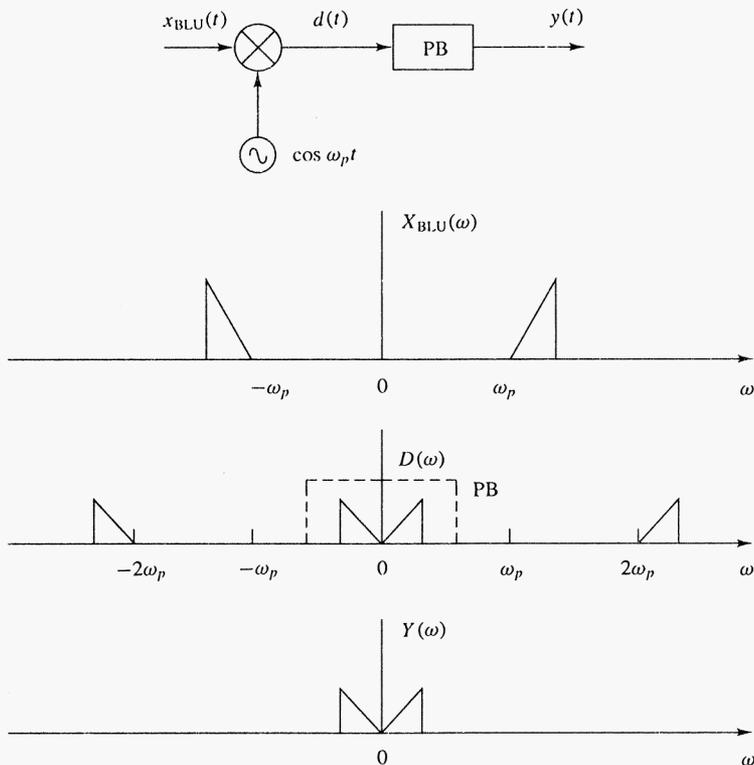


Fig. 2-9 Démodulation synchrone des signaux BLU

2.6 MODULATION À BANDE LATÉRALE RÉSIDUELLE

La modulation à *bande latérale résiduelle* (BLR) est un compromis entre la BLU et la BLD. Suivant ce principe, on transmet une bande latérale dans sa presque totalité et seulement une fraction de l'autre. La bande passante requise pour la transmission d'un tel signal est de l'ordre de 1,25 fois celle que requiert un signal BLU. On utilise la méthode de modulation BLR pour la diffusion des signaux vidéo de télévision commerciale.

A. Élaboration des signaux BLR

On peut engendrer un signal BLR en filtrant énergiquement un signal BLD, comme le montre la figure 2-10(a). Les figure 2-10(b) à (e) représentent respectivement le spectre du signal utile $M(\omega)$, le spectre du signal à bande latérale double $X_{BLD}(\omega)$, la fonction de transfert du filtre $H(\omega)$ et le spectre du signal à bande latérale résiduelle BLR $X_{BLR}(\omega)$ obtenu après filtrage.

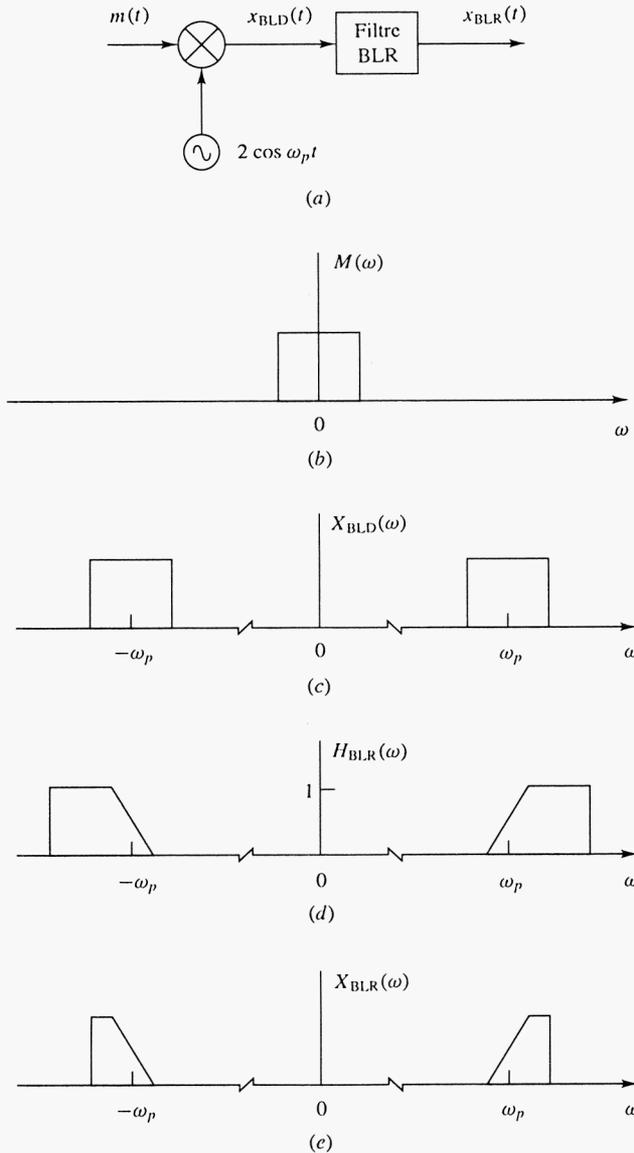


Fig. 2-10 Modulation BLR

B. Démodulation des signaux BLR

On peut extraire le signal utile $m(t)$ d'un signal BLR au moyen d'un détecteur synchrone (voir figure 2-11); cela impose une contrainte sur $H(\omega)$. On peut voir qu'une restitution du signal $m(t)$ exempte de distorsion impose que l'on respecte la condition :

$$H(\omega + \omega_p) + H(\omega - \omega_p) = \text{constante pour } |\omega| \leq \omega_M \quad (2.12)$$

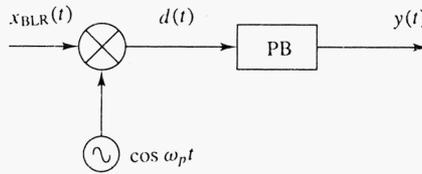


Fig. 2-11 Démodulateur BLR

où ω_M est la fréquence la plus haute du signal $m(t)$ (problème 2.13). En appelant $2H(\omega_p)$ la constante de la relation (2.12), cette relation devient :

$$H(\omega - \omega_p) - H(\omega_p) = -[H(\omega + \omega_p) - H(\omega_p)] \quad (2.13)$$

Ce qui montre que $H(\omega)$ doit être antisymétrique par rapport à la fréquence porteuse (figure 2-12). Les figures 2-12(a) et (b) montrent deux formes possibles de $|H(\omega)|$ qui satisfont la relation (2.13). Les filtres correspondant aux courbes de réponse des figures 2-12(a) et (b) ont respectivement pour rôle d'éliminer la bande latérale inférieure (BLI) ou la bande latérale supérieure (BLS) du signal qui leur est appliqué.

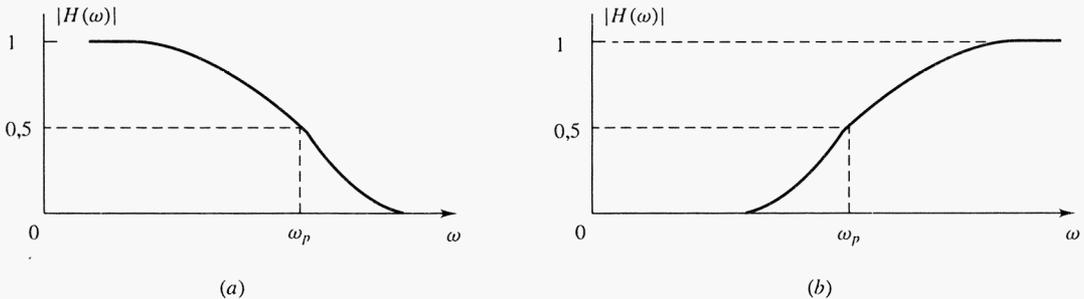


Fig. 2-12 Fonction de transfert de filtres BLR

La figure 2-13 illustre la démodulation du signal BLR de la figure 2-10 par le détecteur synchrone de la figure 2-11.

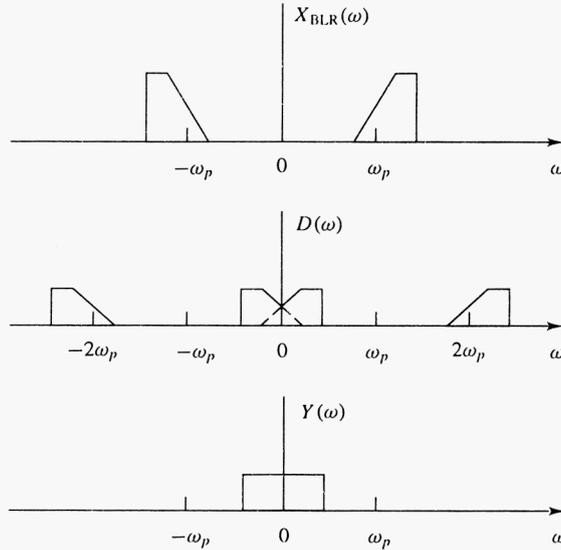


Fig. 2-13 Démodulation synchrone d'un signal à BLR

2.7 TRANSPOSITION DE FRÉQUENCE ET MIXAGE

Le traitement des signaux qui transitent dans les systèmes de communication impose souvent de transposer, de décaler la bande occupée par le signal dans une autre région du spectre de fréquence. C'est ainsi que dans la plupart des récepteurs de radio AM, récepteurs commerciaux de la gamme moyennes ondes, les signaux radio-fréquence (RF) reçus (de 540 à 1 600 kHz) sont transposés dans une bande de moyenne fréquence (MF) dite aussi de fréquence intermédiaire (FI) autour de 455 kHz, avant d'être plus facilement amplifiés, filtrés et démodulés.

On appelle *mélangeur* — ou *mixer*, en jargon technique — le dispositif (figure 2-14) qui permet de transposer les fréquences d'un signal modulé. On qualifie ainsi cette opération de *changement de fréquence*, *conversion de fréquence*, *mixage* ou encore *hétérodynage*.

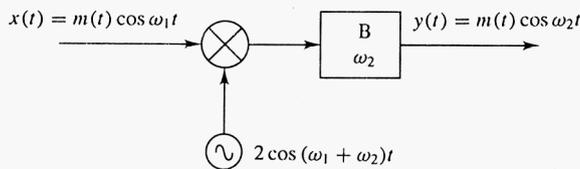


Fig. 2-14 Mélangeur de fréquence

Le problème inévitablement associé à l'hétérodynage est l'apparition de *fréquences images*. C'est ainsi que, dans un récepteur à changement de fréquence superhétérodyne (voir problème 2.15), la valeur de la fréquence de l'oscillateur local est réglée 455 kHz plus haut que celle du signal incident. Supposons que l'on règle le récepteur sur une station dont la fréquence est de 600 kHz, l'oscillateur local produira un signal à 1 055 kHz. Supposons qu'il existe une autre station émettant sur 1 510 kHz, elle sera également reçue par le récepteur, puisque la différence $1\,510 - 1\,055 = 455$ kHz. Cette deuxième fréquence, $1\,510 = 600 + 2 \times 455$ est appelée fréquence image de la première; après l'opération d'hétérodynage, elles sont impossibles à distinguer. On notera que cette fréquence image est distante de la fréquence utile d'une valeur égale à deux fois la fréquence intermédiaire.

On écarte cette fréquence indésirable au moyen d'un filtre haute fréquence (radio fréquence, RF) qui précède le mélangeur.

2.8 MULTIPLEXAGE À DIVISION DE FRÉQUENCE

Le multiplexage est une technique de répartition de plusieurs messages que l'on assemble sous la forme d'un seul signal composite afin de le transmettre sur un seul et même canal de communication. Ce genre de transmission suppose que les messages restent parfaitement disjoints durant leur transmission pour éviter toute interférence et qu'ils puissent être aisément séparés lors de leur réception.

Il existe deux techniques de multiplexage, le *multiplexage en fréquence* et le *multiplexage temporel*. Dans le premier système, les divers signaux sont répartis sur plusieurs fréquences distinctes tandis que, dans le second, ils sont segmentés dans le temps (nous verrons ce système au chapitre 4).

La figure 2-15 représente un multiplex fréquentiel assurant la transmission simultanée de trois signaux. On peut aussi voir sur cette figure leurs spectres individuels ainsi que le spectre de la sommation de leurs porteuses modulées. On a utilisé ici un procédé de modulation à bande latérale double. On peut bien sûr utiliser tout procédé de modulation, pour autant qu'aucun recouvrement de spectre ne se produise, c'est-à-dire que les fréquences porteuses soient suffisamment distantes les unes des autres. La modulation BLU demeure, cependant, la plus employée dans ce genre de système. En réception, on isole les trois signaux au moyen de filtres passe-bande puis on les démodule.

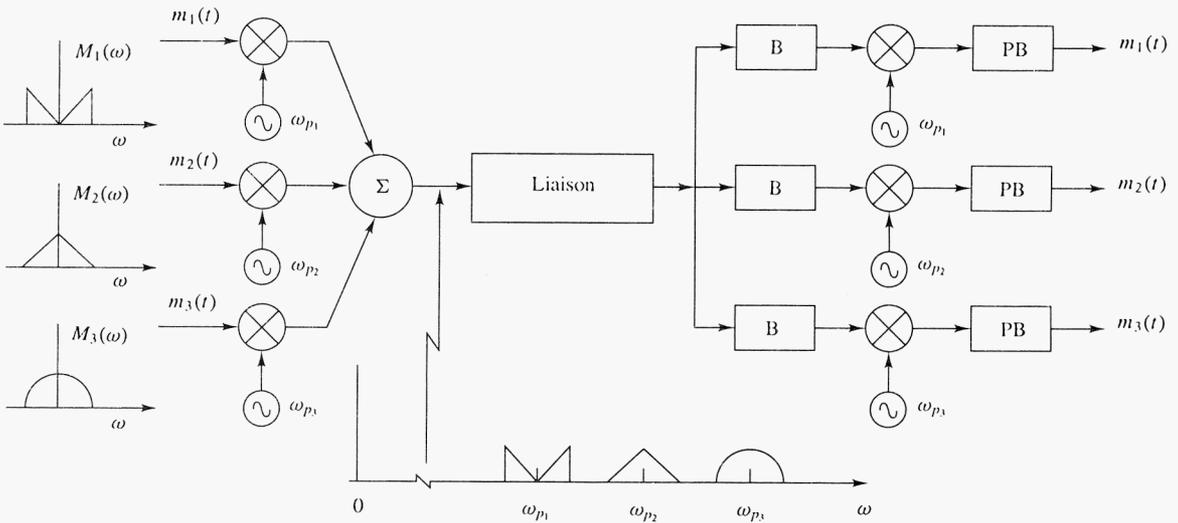


Fig. 2-15 Multiplex fréquentiel

Le multiplexage fréquentiel est utilisé en téléphonie, en télémétrie, en radiodiffusion, en télévision et sur les réseaux de communication. Les stations de radiodiffusion en moyennes ondes émettent sur des fréquences espacées de 10 kHz dans une gamme qui va de 540 kHz à 1 600 kHz. Cette séparation est insuffisante pour la transmission AM en haute fidélité d'émissions musicales, qui exige pour la modulation audio une bande passante d'au moins 15 kHz. C'est pourquoi l'on n'attribue des fréquences voisines qu'à des stations AM géographiquement éloignées pour réduire les interférences. Les émissions commerciales en modulation de fréquence (FM, voir chapitre 3) utilisent des canaux de fréquences distants de 200 kHz. Sur les liaisons téléphoniques à grande distance, on sait transmettre jusqu'à 600 communications (dont la bande passante s'étend de 200 Hz à 3,2 kHz) sur un câble coaxial ou un faisceau hyperfréquence en utilisant une modulation BLU de fréquences porteuses séparées de 4 kHz. Le signal composite obtenu par sommation des signaux élémentaires transposés en fréquence module habituellement une porteuse générale, raison pour laquelle on appelle *sous-porteuses* les porteuses individuelles assurant les transpositions de fréquence en question.

Problèmes résolus

MODULATION À BANDE LATÉRALE DOUBLE

2.1. Vérifier que l'on peut récupérer le signal utile $m(t)$ d'une porteuse modulée en BLD en multipliant cette dernière par une porteuse sinusoidale locale, puis en traitant le produit obtenu dans un filtre passe-bas, comme le montre la figure 2-2, (a) dans le domaine temporel et (b) dans le domaine fréquentiel.

(a) En se reportant à la figure 2-2, la sortie du multiplicateur délivre le signal

$$\begin{aligned} d(t) &= x_{\text{BLD}}(t) \cos \omega_p t = [m(t) \cos \omega_p t] \cos \omega_p t \\ &= m(t) \cos^2 \omega_p t \\ &= \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cos 2\omega_p t \end{aligned}$$

Après filtrage passe-bas de $d(t)$, on obtient :

$$y(t) = \frac{1}{2} m(t) \quad (2.14)$$

Une amplification d'un facteur 2 permet de rétablir le signal utile $m(t)$.

(b) La démodulation de $x_{\text{BLD}}(t)$ par le procédé représenté sur la figure 2-2 est illustrée, dans le domaine des fréquences, par la figure 2-16.

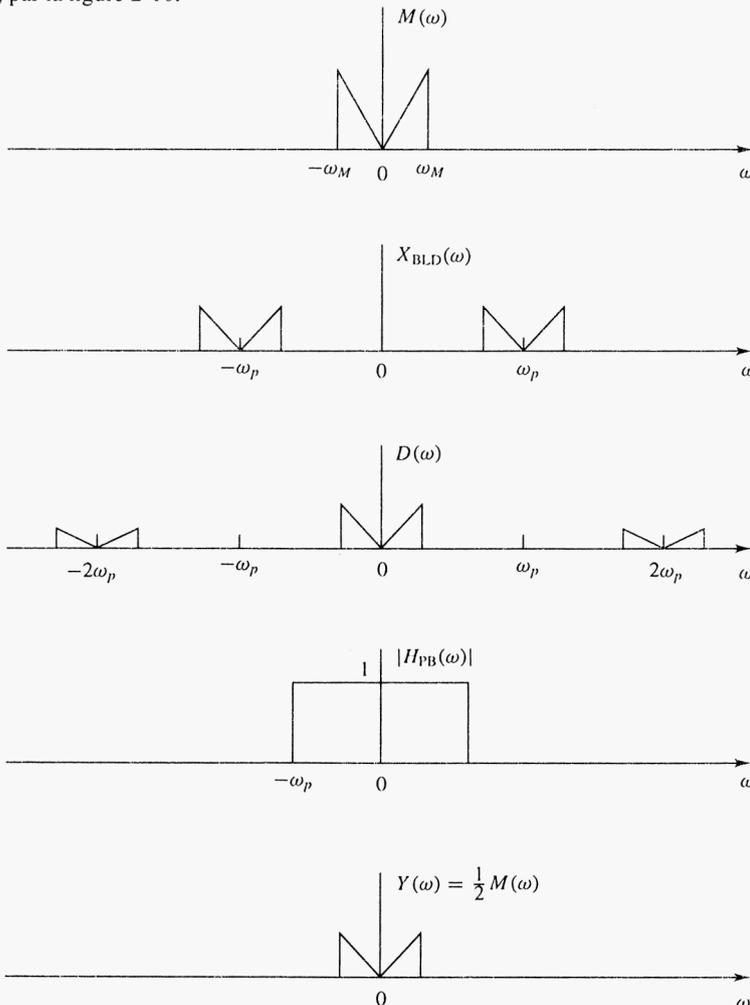


Fig. 2-16 Démodulation d'un signal BLD

- 2.2.** Evaluer l'effet d'une erreur de phase de l'oscillateur local sur le détecteur synchrone BLD représenté sur la figure 2-2.

Soit ϕ l'erreur de phase de l'oscillateur (figure 2-2). Le signal à démoduler a pour expression :

$$x_{\text{BLD}}(t) = m(t) \cos \omega_p t$$

et le signal résultant du produit, $d(t)$, a pour expression :

$$\begin{aligned} d(t) &= [m(t) \cos \omega_p t] \cos (\omega_p t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} m(t) [\cos \phi + \cos (2\omega_p t + \phi)] \\ &= \frac{1}{2} m(t) \cos \phi + \frac{1}{2} m(t) \cos (2\omega_p t + \phi) \end{aligned}$$

Le second terme est filtré par le filtre passe-bas et il ne reste que

$$y(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos \phi \quad (2.15)$$

Le signal de sortie est proportionnel à $m(t)$ lorsque ϕ est constant. Il n'y a aucun signal de sortie lorsque $\phi = \pm\pi/2$. La présence d'une erreur de phase locale entraîne une atténuation sans distorsion du signal, jusqu'à son élimination totale pour $\phi = \pm\pi/2$. Si la valeur de ϕ n'est pas stable, le niveau du signal de sortie varie de façon inacceptable.

- 2.3.** Evaluer l'effet d'une erreur de fréquence minimale de l'oscillateur local du détecteur synchrone représenté sur la figure 2-2 sur une démodulation BLD.

Soit $\Delta\omega$ l'erreur de fréquence de l'oscillateur local de la figure 2-2. Le produit fourni par le détecteur a pour expression :

$$\begin{aligned} d(t) &= m(t) \cos \omega_p t \cos (\omega_p + \Delta\omega)t \\ &= \frac{1}{2} m(t) \cos (\Delta\omega)t + \frac{1}{2} m(t) \cos 2\omega_p t \end{aligned}$$

Donc, après filtrage passe-bas :

$$y(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos (\Delta\omega)t \quad (2.16)$$

Le signal de sortie du détecteur $m(t)$ est multiplié par une sinusoïde de basse fréquence qui cause un effet de battement indésirable.

MODULATION D'AMPLITUDE ORDINAIRE

- 2.4.** Dessiner un signal modulé à fréquence pure avec un index de modulation $\mu = 0,5$, $\mu = 1$.

Un signal de modulation à fréquence pure s'exprime sous la forme :

$$m(t) = a_m \cos \omega_m t$$

D'après l'équation (2.9), l'index de modulation a pour définition :

$$\mu = \frac{|\min\{m(t)\}|}{A} = \frac{a_m}{A} \quad (2.17)$$

D'où :

$$m(t) = a_m \cos \omega_m t = \mu A \cos \omega_m t \quad (2.18)$$

Et en utilisant la relation (2.5),

$$\begin{aligned} x_{\text{AM}}(t) &= [A + m(t)] \cos \omega_p t \\ &= A[1 + \mu \cos \omega_m t] \cos \omega_p t \end{aligned} \quad (2.19)$$

Les figures 2-17(a) et (b) montrent des signaux modulés à fréquence pure avec un index μ égal à 0,5 et égal à 1.

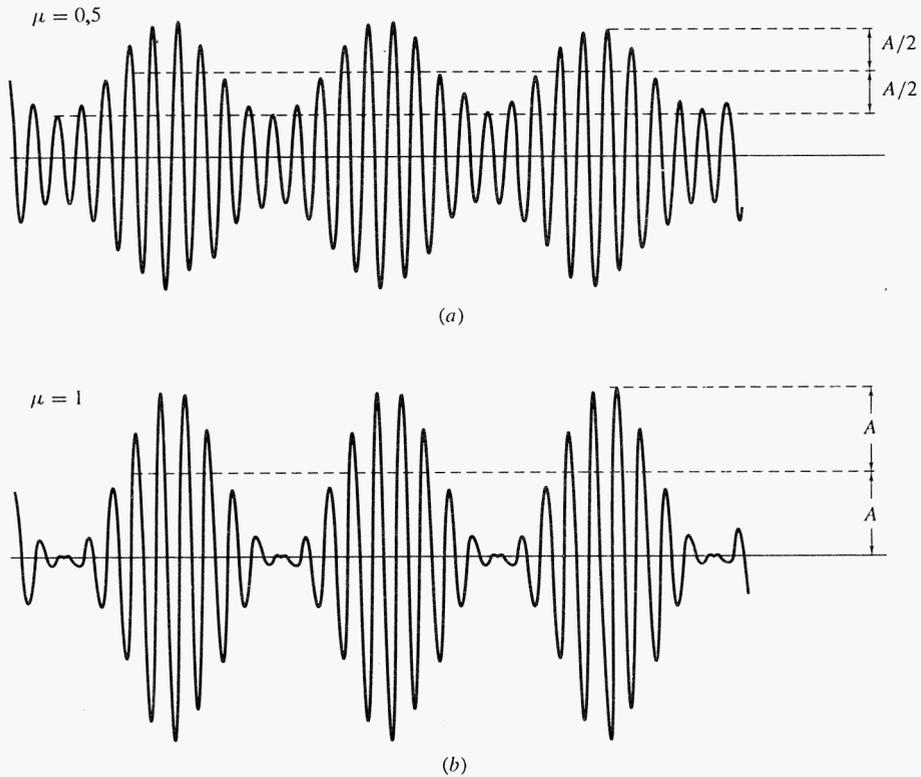


Fig. 2-17

- 2.5. Le rendement d'une modulation en amplitude ordinaire se définit comme le pourcentage de la puissance totale contenu dans les bandes latérales, c'est-à-dire :

$$\eta = \frac{P_l}{P_t} \times 100\% \quad (2.20)$$

où P_l est la puissance contenue dans les bandes latérales et P_t la puissance totale du signal AM.

(a) Calculer η pour $\mu = 0,5$ (modulation à 50 pour cent).

(b) Montrer que pour une modulation d'amplitude à fréquence pure, $\eta_{\max} = 33,3\%$ pour $\mu = 1$.

D'après la relation (2.19), une modulation d'amplitude à fréquence pure a pour expression :

$$\begin{aligned} x_{\text{AM}}(t) &= A \cos \omega_p t + \mu A \cos \omega_m t \cos \omega_p t \\ &= A \cos \omega_p t + \frac{1}{2} \mu A \cos (\omega_p - \omega_m) t + \frac{1}{2} \mu A \cos (\omega_p + \omega_m) t \\ P_p &= \text{puissance de la porteuse} = \frac{1}{2} A^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$P_l = \text{puissance des bandes latérales} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \mu A \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \mu A \right)^2 \right] = \frac{1}{4} \mu^2 A^2 \quad (2.22)$$

La puissance totale a donc pour expression :

$$P_t = P_p + P_l = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{4} \mu^2 A^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \mu^2 \right) A^2 \quad (2.23)$$

Donc

$$\eta = \frac{P_l}{P_t} \times 100\% = \frac{\frac{1}{4} \mu^2 A^2}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \mu^2 \right) A^2} \times 100\% = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2} \times 100\% \quad (2.24)$$

sous condition, bien sûr, que $\mu \leq 1$.

(a) Pour $\mu = 0,5$

$$\eta = \frac{(0,5)^2}{2 + (0,5)^2} \times 100\%$$

(b) Comme $\mu \leq 1$, on peut voir que η_{\max} se produit pour $\mu = 1$, on a :

$$\eta = \frac{1}{3} \times 100\% = 33,3\%$$

- 2.6. Montrer qu'un démodulateur synchrone (figure 2-18) peut démoduler un signal $AMx_{AM}(t) = [A + m(t)] \cos \omega_p t$ quelle que soit la valeur de A.

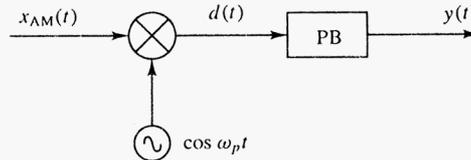


Fig. 2-18 Détecteur synchrone

D'après la figure 2-18,

$$\begin{aligned} d(t) &= x_{AM}(t) \cos \omega_p t = [A + m(t)] \cos^2 \omega_p t \\ &= \frac{1}{2}[A + m(t)] + \frac{1}{2}[A + m(t)] \cos 2\omega_p t \end{aligned}$$

Après un filtrage passe-bas, il reste :

$$y(t) = \frac{1}{2}[A + m(t)] = \frac{1}{2}m(t) + \frac{1}{2}A \quad (2.25)$$

Une capacité bloquera le courant continu correspondant au terme $\frac{1}{2}A$, ne laissant passer que le signal de sortie $\frac{1}{2}m(t)$.

- 2.7. Montrer qu'un signal AM avec porteuse forte peut être démodulé en l'élevant au carré puis en filtrant le signal obtenu dans un passe-bas, comme le montre la figure 2-19. Ce genre de démodulateur est appelé *détecteur quadratique*.

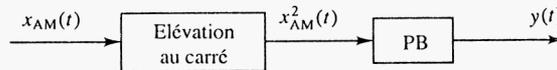


Fig. 2-19 Détecteur quadratique

D'après la relation (2.5),

$$x_{AM}(t) = [A + m(t)] \cos \omega_p t$$

En élevant au carré, il vient :

$$\begin{aligned} x_{AM}^2(t) &= [A + m(t)]^2 \cos^2 \omega_p t \\ &= \frac{1}{2}[A^2 + 2Am(t) + m^2(t)](1 + \cos 2\omega_p t) \end{aligned}$$

La sortie filtrée $y(t)$ a pour expression :

$$y(t) = \frac{A^2}{2} \left\{ 1 + 2 \frac{m(t)}{A} + \left[\frac{m(t)}{A} \right]^2 \right\} \quad (2.26)$$

Si la porteuse a une amplitude significative, le terme $[m(t)/A]^2$ peut être négligé et l'on a

$$y(t) \approx \frac{A^2}{2} + Am(t) \quad (2.27)$$

Une capacité permettra de bloquer le terme continu $A^2/2$, ce qui permettra de restituer en sortie le signal utile $m(t)$, au coefficient multiplicatif A près.

2.8. Le signal d'entrée fourni à un détecteur d'enveloppe (figure 2-5) est une onde modulée en AM à fréquence pure $x_{AM}(t) = A(1 + \mu \cos \omega_m t) \cos \omega_p t$, où μ est constant, $0 < \mu < 1$ et $\omega_p \gg \omega_m$.

(a) Montrer que la condition pour que le signal de sortie du détecteur d'enveloppe reflète fidèlement l'enveloppe de $x_{AM}(t)$ est qu'à tout instant t_0 on ait :

$$\frac{1}{RC} \geq \omega_m \left(\frac{\mu \sin \omega_m t_0}{1 + \mu \cos \omega_m t_0} \right) \quad (2.28)$$

(b) Montrer que la condition pour que le détecteur suive en permanence l'enveloppe du signal modulé est que :

$$RC \leq \frac{1}{\omega_m} \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \quad (2.29)$$

(a) La figure 2-20 représente l'enveloppe de $x_{AM}(t)$ et le signal de sortie du détecteur (la tension aux bornes de la capacité de la figure 2-5). En supposant que la capacité entame sa décharge à l'instant t_0 à partir de la valeur crête $E_0 = A(1 + \mu \cos \omega_m t_0)$, la tension aux bornes de cette capacité a pour expression :

$$v_c(t) = E_0 e^{-t/(RC)} \quad (2.30)$$

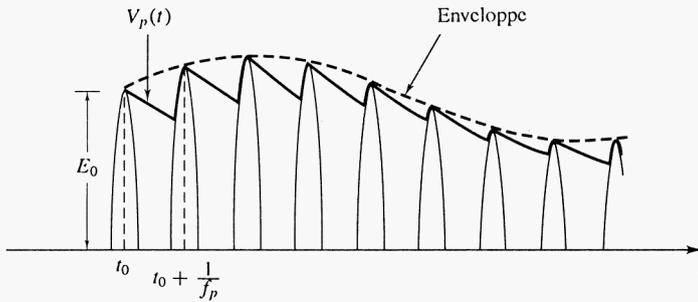


Fig. 2-20

L'intervalle de temps entre deux arches successives de la porteuse modulée a pour valeur $1/f_p = 2\pi/\omega_p$, avec $RC \gg 1/\omega_p$. Cela signifie que la constante de temps RC est grande vis-à-vis de cet intervalle. On peut donc donner une approximation de $v_c(t)$ sous la forme

$$v_c(t) \approx E_0 \left(1 - \frac{t}{RC} \right) \quad (2.31)$$

Pour que $v_c(t)$ reflète fidèlement l'enveloppe de $x_{AM}(t)$, il faut que l'on ait à tout instant t_0 :

$$\left(1 + \mu \cos \omega_m t_0 \right) \left(1 - \frac{1}{RC f_p} \right) \leq 1 + \mu \cos \omega_m \left(t_0 + \frac{1}{f_p} \right) \quad (2.32)$$

Remarquons que si $\omega_m \ll \omega_p$, alors

$$\begin{aligned} 1 + \mu \cos \omega_m \left(t_0 + \frac{1}{f_p} \right) &= 1 + \mu \cos \left(\omega_m t_0 + \frac{\omega_m}{f_p} \right) \\ &= 1 + \mu \cos \omega_m t_0 \cos \frac{\omega_m}{f_p} - \mu \sin \omega_m t_0 \sin \frac{\omega_m}{f_p} \\ &\approx 1 + \mu \cos \omega_m t_0 - \mu \frac{\omega_m}{f_p} \sin \omega_m t_0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

d'où

$$(1 + \mu \cos \omega_m t_0) \left(\frac{1}{RC f_p} \right) \geq \frac{\mu \omega_m}{f_p} \sin \omega_m t_0 \quad (2.34)$$

soit

$$\frac{1}{RC} \geq \omega_m \left(\frac{\mu \sin \omega_m t_0}{1 + \mu \cos \omega_m t_0} \right)$$

(b) On peut écrire la relation (2.28) de la façon suivante :

$$\frac{1}{RC} + \frac{\mu}{RC} \cos \omega_m t_0 \geq \mu \omega_m \sin \omega_m t_0 \quad (2.35)$$

soit

$$\mu \left(\omega_m \sin \omega_m t_0 - \frac{1}{RC} \cos \omega_m t_0 \right) \leq \frac{1}{RC} \quad (2.36)$$

ce qui donne

$$\mu \sqrt{\omega_m^2 + \left(\frac{1}{RC} \right)^2} \sin \left(\omega_m t_0 - \arctan \frac{1}{\omega_m RC} \right) \leq \frac{1}{RC} \quad (2.37)$$

Comme cette relation doit être valable quel que soit t_0 , on doit avoir :

$$\mu \sqrt{\omega_m^2 + \left(\frac{1}{RC} \right)^2} \leq \frac{1}{RC} \quad (2.38)$$

soit

$$\mu^2 \left[\omega_m^2 + \left(\frac{1}{RC} \right)^2 \right] \leq \left(\frac{1}{RC} \right)^2 \quad (2.39)$$

D'où l'on déduit que :

$$RC \leq \frac{1}{\omega_m} \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu}$$

MODULATION À BANDE LATÉRALE UNIQUE

2.9. En prenant le cas d'une porteuse modulée à fréquence pure $\cos \omega_m t$, vérifier que le générateur de modulation BLU représenté sur la figure 2-8 engendre bien un signal modulé à bande latérale unique et montrer que l'on obtient un signal à bande latérale supérieure (BLS), resp. un signal à bande latérale inférieure (BLI), lorsque l'on effectue une soustraction, resp. une addition sur le sommateur.

En observant la figure 2-21, qui reproduit la figure 2-8, avec application d'une modulation à fréquence pure, on peut écrire :

$$\begin{aligned} m(t) &= \cos \omega_m t \\ \cos \left(\omega_p t - \frac{\pi}{2} \right) &= \sin \omega_p t \\ \hat{m}(t) &= \cos \left(\omega_m t - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \omega_m t \end{aligned}$$

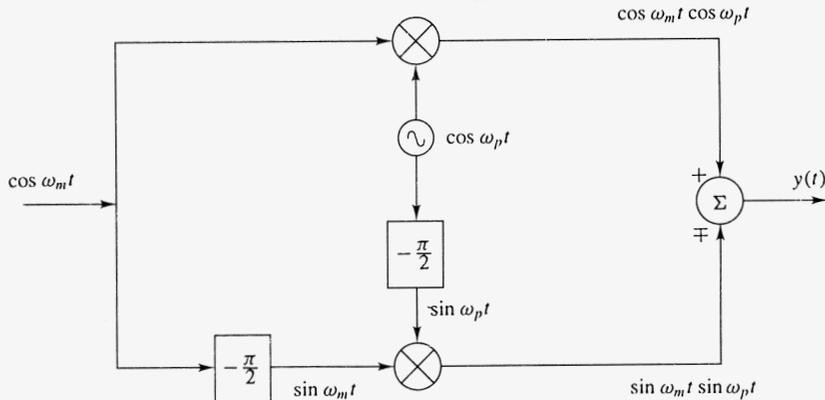


Fig. 2-21

D'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos \omega_m t \cos \omega_p t \mp \sin \omega_m t \sin \omega_p t \\ &= \cos(\omega_p \pm \omega_m)t \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dans le cas d'une soustraction sur le sommateur, on obtient :

$$y(t) = x_{\text{BLS}}(t) = \cos(\omega_p + \omega_m)t \quad (2.41)$$

Et dans le cas d'une addition, on a :

$$y(t) = x_{\text{BLI}}(t) = \cos(\omega_p - \omega_m)t \quad (2.42)$$

2.10. Montrer que lorsque la sortie du modulateur *phase-shift* (figure 2-28) est un signal BLU, (a) une différence au niveau du sommateur engendre un signal à bande latérale supérieure, tandis (b) qu'une somme engendre un signal à bande latérale inférieure. En d'autres termes que :

$$x_p(t) = x_{\text{BLS}}(t) = m(t) \cos \omega_p t - \widehat{m}(t) \sin \omega_p t \quad (2.43)$$

est un signal modulé en bande latérale supérieure, et

$$x_p(t) = x_{\text{BLI}}(t) = m(t) \cos \omega_p t + \widehat{m}(t) \sin \omega_p t \quad (2.44)$$

est un signal modulé en bande latérale inférieure.

(a) Adoptons les notations suivantes :

$$m(t) \leftrightarrow M(\omega) \quad \text{et} \quad \widehat{m}(t) \leftrightarrow \widehat{M}(\omega)$$

En appliquant le théorème de la modulation (I.115) du problème 1.15, ou la propriété de translation (I.31) de la transformée de Fourier, on peut écrire que :

$$m(t) \cos \omega_p t \leftrightarrow \frac{1}{2}M(\omega - \omega_p) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_p)$$

et aussi que

$$\widehat{m}(t) \sin \omega_p t \leftrightarrow \frac{1}{2j}\widehat{M}(\omega - \omega_p) - \frac{1}{2j}\widehat{M}(\omega + \omega_p)$$

En prenant la transformée de Fourier de la relation (2.43), on obtient :

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_p) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_p) - \left[\frac{1}{2j}\widehat{M}(\omega - \omega_p) - \frac{1}{2j}\widehat{M}(\omega + \omega_p) \right] \quad (2.45)$$

En invoquant la relation (I.141) du problème 1.47, on obtient :

$$\widehat{M}(\omega - \omega_p) = -j \operatorname{sgn}(\omega - \omega_p) M(\omega - \omega_p) \quad (2.46a)$$

ainsi que :

$$\widehat{M}(\omega + \omega_p) = -j \operatorname{sgn}(\omega + \omega_p) M(\omega + \omega_p) \quad (2.46b)$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} X_p(\omega) &= \frac{1}{2}M(\omega - \omega_p) + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_p) \\ &\quad - \left[-\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\omega - \omega_p) M(\omega - \omega_p) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\omega + \omega_p) M(\omega + \omega_p) \right] \\ &= \frac{1}{2}M(\omega - \omega_p)[1 + \operatorname{sgn}(\omega - \omega_p)] + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_p)[1 - \operatorname{sgn}(\omega + \omega_p)] \end{aligned} \quad (2.47)$$

Or on a, d'une part :

$$1 + \operatorname{sgn}(\omega - \omega_p) = \begin{cases} 2 & \omega > \omega_p \\ 0 & \omega < \omega_p \end{cases}$$

et d'autre part :

$$1 - \operatorname{sgn}(\omega - \omega_p) = \begin{cases} 2 & \omega < -\omega_p \\ 0 & \omega > -\omega_p \end{cases}$$

on aboutit au résultat suivant :

$$X_p(\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_p \\ M(\omega + \omega_p) & \omega < -\omega_p \\ M(\omega - \omega_p) & \omega > \omega_p \end{cases} \quad (2.48)$$

dont l'esquisse apparaît sur la figure 2-22(b). On observe que $x_p(t)$ est un signal modulé en bande latérale supérieure (BLS).

(b) De la même façon, en prenant la transformée de Fourier de la relation (2.44), on obtient :

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega - \omega_p)[1 - \text{sgn}(\omega - \omega_p)] + \frac{1}{2}M(\omega + \omega_p)[1 + \text{sgn}(\omega + \omega_p)] \quad (2.49)$$

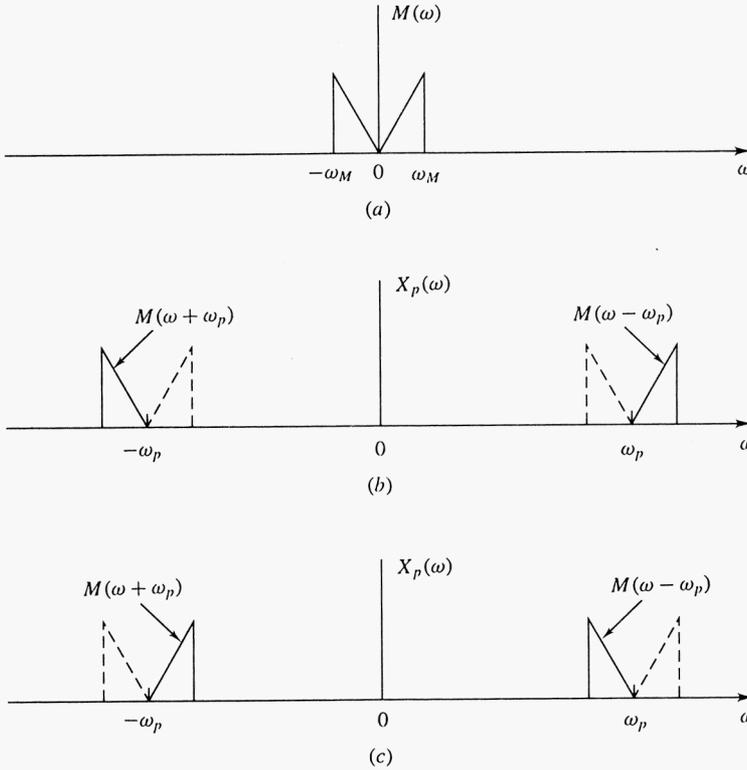


Fig. 2-22

Comme

$$1 - \text{sgn}(\omega - \omega_p) = \begin{cases} 2 & \omega < \omega_p \\ 0 & \omega > \omega_p \end{cases}$$

et

$$1 + \text{sgn}(\omega + \omega_p) = \begin{cases} 2 & \omega > -\omega_p \\ 0 & \omega < -\omega_p \end{cases}$$

on a donc :

$$X_p(\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| > \omega_p \\ M(\omega - \omega_p) & \omega < \omega_p \\ M(\omega + \omega_p) & \omega > -\omega_p \end{cases} \quad (2.50)$$

dont l'esquisse apparaît sur la figure 2-22(c). On observe que $x_p(t)$ est un signal modulé en bande latérale inférieure (BLI).

2.11. Montrer que l'on peut démoduler un signal BLU au moyen du détecteur synchrone de la figure 2-23 (a) en esquisant le spectre du signal et (b) en donnant son expression analytique en chaque point du circuit.

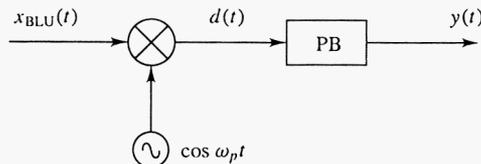


Fig. 2-23 Détecteur synchrone

- (a) Soit $M(\omega)$ le spectre du signal $m(t)$, tel que le représente la figure 2-24(a) et $X_{\text{BLU}}(\omega)$ le spectre du signal à bande latérale unique $x_{\text{BLU}}(t)$, comme le montre la figure 2-24(b). Une multiplication par $\cos \omega_p t$ translate le spectre $X_{\text{BLU}}(\omega)$ autour des fréquences $\pm \omega_p$, ce qui donne $D(\omega)$, spectre du signal $d(t)$ [figure 2-24(c)]. Après filtrage passe-bas, on obtient $Y(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega)$, spectre de $y(t)$ [figure 2-24(d)]. On extrait donc $y(t) = \frac{1}{2}m(t)$ qui est proportionnel à $m(t)$.

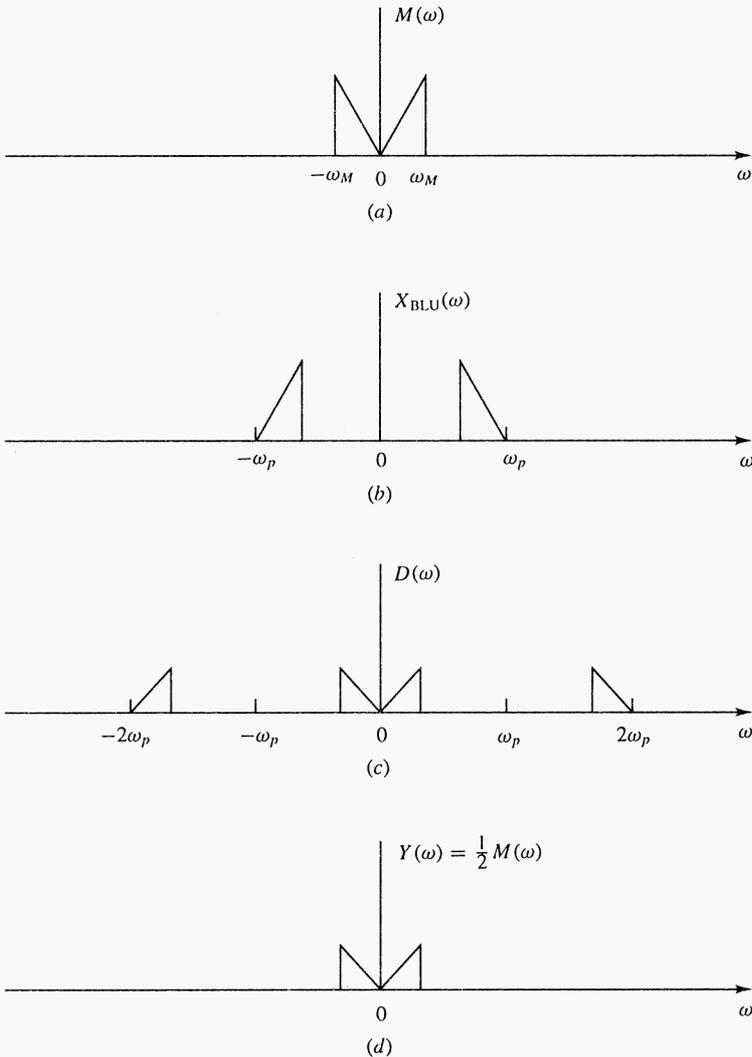


Fig. 2-24

- (b) D'après la relation (2.11), $x_{\text{BLU}}(t)$ s'exprime de la façon suivante :

$$x_{\text{BLU}}(t) = m(t) \cos \omega_p t \mp \widehat{m}(t) \sin \omega_p t$$

donc

$$\begin{aligned} d(t) &= x_{\text{BLU}}(t) \cos \omega_p t \\ &= m(t) \cos^2 \omega_p t \mp \widehat{m}(t) \sin \omega_p t \cos \omega_p t \\ &= \frac{1}{2} m(t) (1 + \cos 2\omega_p t) \mp \frac{1}{2} \widehat{m}(t) \sin 2\omega_p t \\ &= \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t) \cos 2\omega_p t \mp \widehat{m}(t) \sin 2\omega_p t \end{aligned}$$

Après filtrage passe-bas, on obtient :

$$y(t) = \frac{1}{2}m(t)$$

2.12. Montrer que le dispositif représenté par la figure 2-25 peut servir à démoduler un signal BLU.

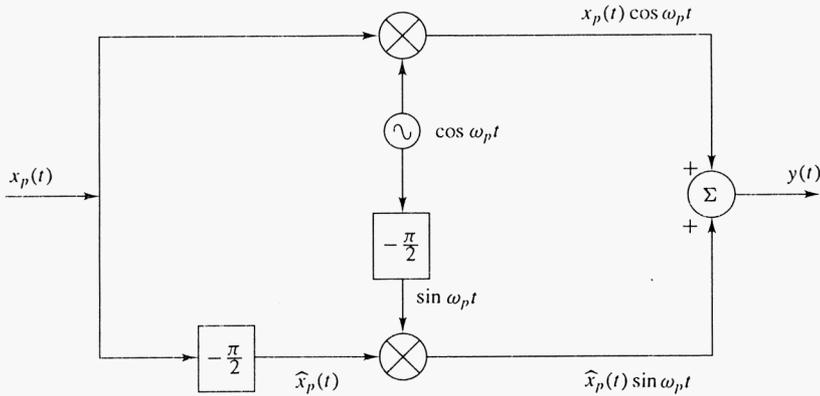


Fig. 2-25 Démodulateur BLU à déphaseur

D'après la relation (2.43) du problème 2.10, un signal modulé en bande latérale supérieure s'exprime de la façon suivante :

$$x_p(t) = m(t) \cos \omega_p t - \widehat{m}(t) \sin \omega_p t$$

En invoquant la relation (1.141) du problème 1.47, on a :

$$\widehat{x}_p(t) = m(t) \sin \omega_p t + \widehat{m}(t) \cos \omega_p t \quad (2.52)$$

D'après la figure 2-25, on peut écrire :

$$\begin{aligned} y(t) &= x_p(t) \cos \omega_p t + \widehat{x}_p(t) \sin \omega_p t \\ &= m(t) (\cos^2 \omega_p t + \sin^2 \omega_p t) = m(t) \end{aligned} \quad (2.53)$$

De façon semblable, un signal modulé en bande latérale inférieure s'exprime comme suit :

$$x_p(t) = m(t) \cos \omega_p t + \widehat{m}(t) \sin \omega_p t$$

d'où

$$\widehat{x}_p(t) = m(t) \sin \omega_p t - \widehat{m}(t) \cos \omega_p t \quad (2.54)$$

A nouveau, d'après la figure 2-25, on obtient

$$\begin{aligned} y(t) &= x_p(t) \cos \omega_p t + \widehat{x}_p(t) \sin \omega_p t \\ &= m(t) (\cos^2 \omega_p t + \sin^2 \omega_p t) = m(t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

On aura remarqué que la figure 2-25 est identique à la figure 2-8, à l'exception du sommateur permettant de traiter les deux cas.

MODULATION À BANDE LATÉRALE RÉSIDUELLE

2.13. Montrer que lors de la démodulation sans distorsion d'un signal modulé avec bande latérale résiduelle au moyen du détecteur synchrone de la figure 2-11, la réponse en fréquence $H(\omega)$ du filtre BLR de la figure 2-10(a) doit satisfaire la relation (2.12), c'est-à-dire :

$$H(\omega + \omega_p) + H(\omega - \omega_p) = \text{constante} \quad \text{pour } |\omega| \leq \omega_M$$

Le spectre de $x_{\text{BLD}}(t)$, $X_{\text{BLD}}(\omega)$, est représenté sur la figure 2-10(c); il a pour expression :

$$X_{\text{BLD}}(\omega) = M(\omega - \omega_p) + M(\omega + \omega_p) \quad (2.56)$$

D'après la figure 2-10(e), le spectre de $x_{\text{BLR}}(t)$ a pour expression :

$$X_{\text{BLR}}(\omega) = [M(\omega - \omega_p) + M(\omega + \omega_p)]H(\omega) \quad (2.57)$$

D'autre part, $d(t)$, élaboré par le démodulateur BLR de la figure 2-11, et sa transformée de Fourier s'expriment comme suit :

$$d(t) = x_{\text{BLR}}(t) \cos \omega_p t \leftrightarrow \frac{1}{2} [X_{\text{BLR}}(\omega - \omega_p) + X_{\text{BLR}}(\omega + \omega_p)] \quad (2.58)$$

En tenant compte de la relation (2.57) et en éliminant les spectres à $\pm 2\omega_p$ (supprimés par filtrage passe-bas), on obtient la transformée de Fourier du signal de sortie $y(t)$ du démodulateur BLR synchrone (figure 2-11) :

$$y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} M(\omega) [H(\omega + \omega_p) + H(\omega - \omega_p)] \quad (2.59)$$

Pour une démodulation sans distorsion, il faut s'assurer que :

$$y(t) = km(t) \leftrightarrow kM(\omega) \quad (2.60)$$

où k est une constante quelconque.

Il faut donc respecter la condition :

$$H(\omega + \omega_p) + H(\omega - \omega_p) = \text{constante} \quad \text{pour } |\omega| \leq \omega_M$$

2.14. La figure 2-26 représente la réponse en fréquence $H(\omega)$ d'un filtre BLR

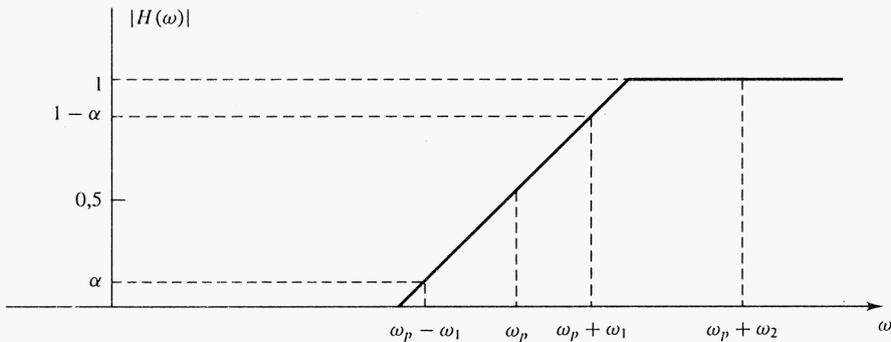


Fig. 2-26

(a) Donner l'expression du signal $x_{\text{BLR}}(t)$ lorsque

$$m(t) = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t$$

(b) Montrer que $x_{\text{BLR}}(t)$ peut être démodulé par le détecteur synchrone représenté sur la figure 2-11.

(a) En se reportant à la figure 2-10, on peut écrire :

$$\begin{aligned} x_{\text{BLD}}(t) &= m(t) \cos \omega_p t \\ &= (a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t) \cos \omega_p t \\ &= \frac{1}{2} a_1 \cos (\omega_p - \omega_1)t + \frac{1}{2} a_1 \cos (\omega_p + \omega_1)t + \frac{1}{2} a_2 \cos (\omega_p - \omega_2)t + \frac{1}{2} a_2 \cos (\omega_p + \omega_2)t \end{aligned}$$

Ces signaux sinusoïdaux sont transmis par $H(\omega)$, dont la courbe apparaît sur la figure 2-26, qui présente les gains 0, α , $1 - \alpha$, et 1 aux fréquences respectives $\omega_p - \omega_2$, $\omega_p - \omega_1$, $\omega_p + \omega_1$, $\omega_p + \omega_2$. La sortie du filtre BLR, $x_{\text{BLR}}(t)$, a donc pour expression :

$$x_{\text{BLR}}(t) = \frac{1}{2} a_1 \alpha \cos (\omega_p - \omega_1)t + \frac{1}{2} a_1 (1 - \alpha) \cos (\omega_p + \omega_1)t + \frac{1}{2} a_2 \cos (\omega_p + \omega_2)t \quad (2.61)$$

(b) En se reportant à la figure 2-11, on peut écrire :

$$\begin{aligned} d(t) &= x_{\text{BLR}}(t) \cos \omega_p t \\ &= \frac{1}{4} (a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t) + \frac{1}{4} [a_1 \alpha \cos (2\omega_p - \omega_1)t + a_1 (1 - \alpha) \cos (2\omega_p + \omega_1)t + a_2 \cos (2\omega_p + \omega_2)t] \end{aligned}$$

En utilisant un filtrage passe-bas pour éliminer les termes à fréquence $2\omega_p$, il reste :

$$y(t) = \frac{1}{4}(a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t) = \frac{1}{4}m(t) \quad (2.62)$$

MÉLANGE DE FRÉQUENCE ET MULTIPLEX FRÉQUENTIEL

2.15. La figure 2-27 représente un récepteur radio AM. Le mélangeur transpose la fréquence du signal reçu f_p à la fréquence intermédiaire FI de 455 kHz au moyen d'un oscillateur local de fréquence f_{LO} . La bande AM s'étend de 540 à 1 600 kHz.

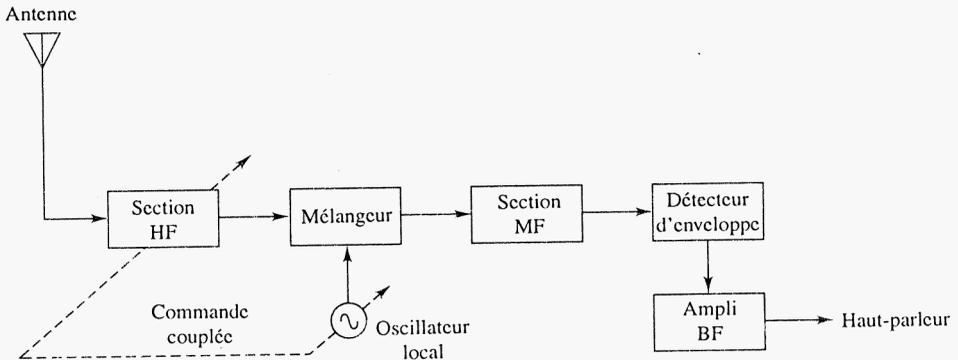


Fig. 2-27 Récepteur superhétérodyne AM

- (a) Déterminer la gamme de fréquence dans laquelle doit fonctionner l'oscillateur local (i) lorsque f_{LO} est supérieure à f_p (récepteur superhétérodyne) et (ii) lorsque f_{LO} est inférieure à la fréquence f_p .
- (b) Expliquer pourquoi les récepteurs radio AM courants fonctionnent suivant le principe du superhétérodyne.
- (a) (i) Lorsque $f_{LO} > f_p$, on peut écrire que :

$$540 < f_p < 1\,600$$

$$f_{LO} - f_p = 455$$

où les fréquences sont exprimées en kHz. On a donc :

$$f_{LO} = f_p + 455$$

Ce qui donne $f_{LO} = 995$ kHz pour $f_p = 540$ kHz et $f_{LO} = 2\,055$ kHz pour $f_p = 1\,600$ kHz. La gamme utile de l'oscillateur local s'étend donc de 995 à 2 055 kHz.

- (ii) Lorsque $f_{LO} < f_p$,

$$f_{LO} = f_p - 455$$

Ce qui donne $f_{LO} = 85$ kHz pour $f_p = 540$ kHz et $f_{LO} = 1\,145$ kHz pour $f_p = 1\,600$ kHz. La gamme utile de l'oscillateur local s'étend donc de 85 à 1 145 kHz.

- (b) Le rapport de fréquence, c'est-à-dire le rapport entre la fréquence la plus haute et la fréquence la plus basse de l'oscillateur local est de 2,07 dans le premier cas, tandis qu'il est de 13,47 dans le second, ce qui rend plus complexe la réalisation d'un oscillateur ayant une telle couverture en fréquence. C'est la raison pour laquelle les récepteurs AM sont dits superhétérodynes, puisqu'ils utilisent une fréquence locale supérieure à la fréquence incidente.

2.16. La figure 2-28(a) représente le spectre d'un signal $m(t)$. Pour assurer le secret des transmissions, on peut traiter le signal dans un système (parfois appelé *brouilleur*) que représente la figure 2-28(b). Analyser le système et dessiner le spectre du signal de sortie $x(t)$.

Le spectre du signal en chacun des points du système est représenté sur la figure 2-29. Il apparaît que le spectre du signal de sortie, $X(\omega)$, se compose des deux bandes latérales retournées (inversion de fréquence) de $M(\omega)$.

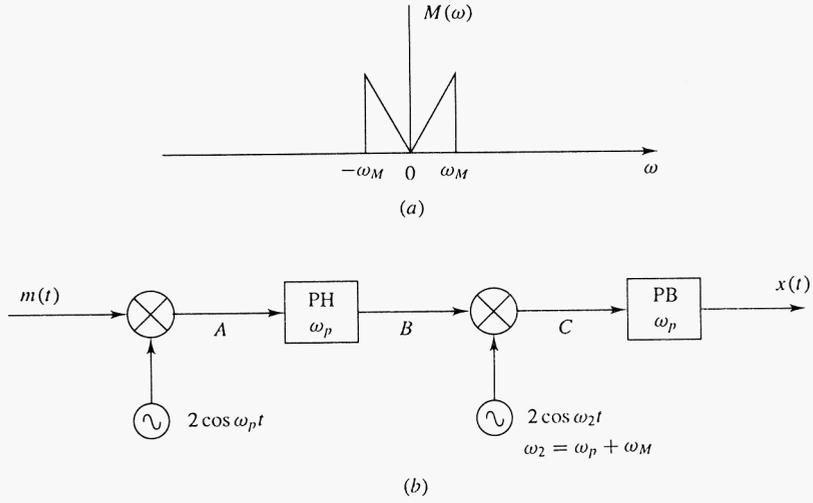


Fig 2.28

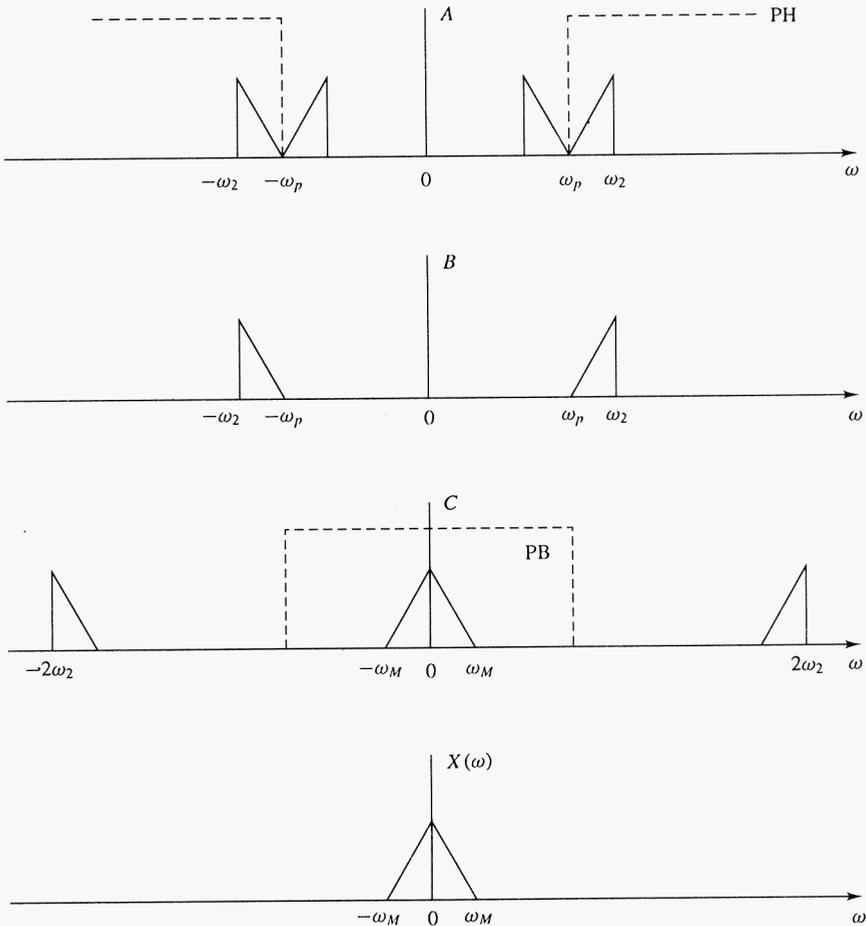


Fig 2.29

2.17. En utilisant l'orthogonalité des fonctions sinus et cosinus, il est possible d'émettre et de recevoir simultanément deux signaux sur la même fréquence porteuse. Le principe sur lequel repose ce genre de système, *multiplexage à quadrature* ou *modulations d'amplitude en quadrature* (QAM en anglais) est illustré par la figure 2-30. Montrer que chacun des signaux peut être extrait au moyen d'une détection synchrone faisant appel à deux oscillateurs locaux de même fréquence mais fonctionnant en quadrature (déphasés de $\pi/4$).

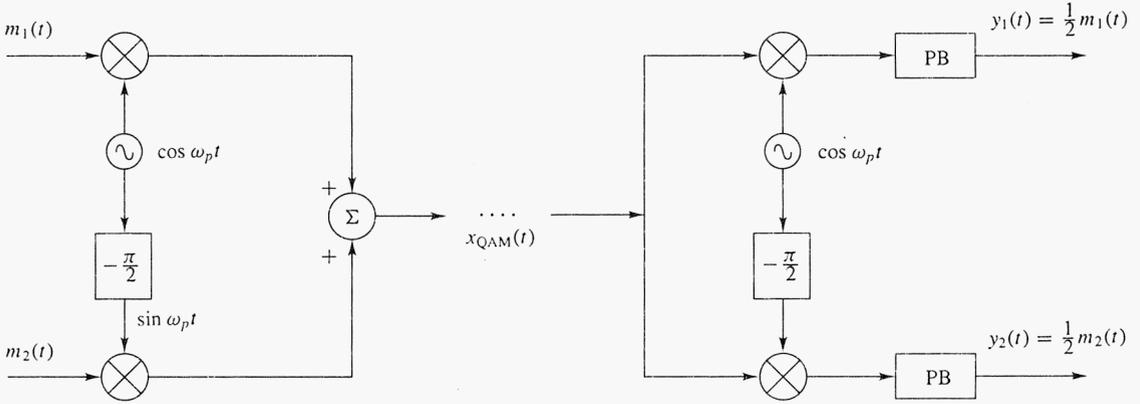


Fig. 2-30 Système de multiplexage à quadrature

On a :

$$x_{\text{QAM}}(t) = m_1(t) \cos \omega_p t + m_2(t) \sin \omega_p t$$

$$\begin{aligned} x_{\text{QAM}}(t) \cos \omega_p t &= m_1(t) \cos^2 \omega_p t + m_2(t) \sin \omega_p t \cos \omega_p t \\ &= \frac{1}{2} m_1(t) + \frac{1}{2} m_1(t) \cos 2\omega_p t + \frac{1}{2} m_2(t) \sin 2\omega_p t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{\text{QAM}}(t) \sin \omega_p t &= m_1(t) \cos \omega_p t \sin \omega_p t + m_2(t) \sin^2 \omega_p t \\ &= \frac{1}{2} m_1(t) \sin 2\omega_p t + \frac{1}{2} m_2(t) - \frac{1}{2} m_2(t) \cos 2\omega_p t \end{aligned}$$

Tous les termes correspondant à la fréquence $2\omega_p$ sont éliminés par le filtre passe-bas et il ne reste que :

$$y_1(t) = \frac{1}{2} m_1(t) \quad \text{et} \quad y_2(t) = \frac{1}{2} m_2(t)$$

Remarquons que le multiplexage à quadrature est une méthode efficace pour transmettre deux signaux de même largeur de bande. Elle est utilisée pour la transmission de l'information chrominance en télévision commerciale.

Problèmes supplémentaires

2.18. Un signal $m(t)$ présente une bande passante de fréquence maximale ω_M . Il est transposé en fréquence par multiplication par un signal $\cos \omega_p t$. Calculer ω_p pour que la bande passante du signal transmis ait une valeur égale à 1% de la fréquence porteuse ω_p .

Réponse : $\omega_p = 200\omega_M$

- 2.19.** La figure 2-31 représente un signal modulé en AM de façon ordinaire. (a) Calculer l'index de modulation. (b) Calculer le rendement de modulation. (c) Déterminer la modification à appliquer à la porteuse pour atteindre un index de modulation égal à 0,1.

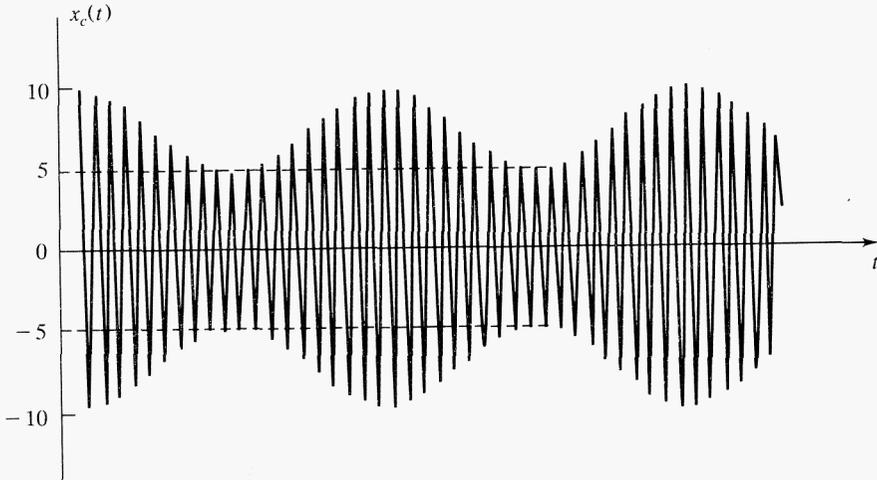


Fig. 2-31

Réponse : (a) $\mu = \frac{1}{2}$, (b) $\eta = 5,26\%$, (c) 17,5 V

- 2.20.** Etant donné un signal réel $m(t)$, on définit un signal

$$M_+(t) = m(t) + j\hat{m}(t)$$

où $\hat{m}(t)$ est la transformée de Hilbert de $m(t)$ (voir problème 1.47). On dit que $m_+(t)$ est un signal *analytique*.

- (a) Montrer que :

$$\mathcal{F}[M_+(t)] = M_+(\omega) = \begin{cases} 2M(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

- (b) Montrer que

$$\text{Re}[m_+(t)e^{j\omega_p t}]$$

est un signal à bande latérale supérieure et

$$\text{Re}[m_+(t)e^{-j\omega_p t}]$$

est un signal à bande latérale inférieure.

Indication :

- (a) Utiliser la relation (1.141) du problème 1.47.
 (b) Utiliser la formule d'Euler; prendre la partie réelle de l'expression puis la comparer aux relations (2.43) et (2.44).

- 2.21.** La fonction de transfert $H(\omega)$ du filtre BLR de la figure 2-26 (problème 2.14) a pour expression :

$$H(\omega_p - \omega_1) = \alpha e^{j\phi}$$

$$H(\omega_p + \omega_1) = (1 - \alpha)e^{j\theta_1}$$

$$H(\omega_p + \omega_2) = 1e^{j\theta_2}$$

Le signal utile a pour expression :

$$m(t) = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t$$

On le démodule au moyen d'un détecteur synchrone. Donner l'expression de θ_1 et de θ_2 en fonction de ϕ afin d'obtenir une démodulation sans distorsion.

Réponse : $\theta_1 = -\phi$ et $\theta_2 = -\frac{\omega_2}{\omega_1}\phi$

2.22 Concevoir un système qui permette de restituer le signal originel $m(t)$ à partir du signal brouillé que délivre le dispositif de la figure 2-28, problème 2.16.

Indication : Envisager un système identique à celui de la figure 2-28.

Modulation d'argument

3.1 INTRODUCTION

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.1, on regroupe sous le terme *modulation d'argument* la *modulation de fréquence* et la *modulation de phase*, procédés qui consistent à faire varier l'argument d'une onde porteuse sinusoïdale en fonction du message à transmettre sur cette porteuse. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la modulation d'amplitude se résume à une transposition du spectre du signal utile; la bande passante de la transmission n'excède jamais deux fois celle de ce signal. Dans la modulation d'argument, il n'y a plus de relation simple entre les composantes spectrales du signal modulant et la bande de fréquence occupée par le signal modulé. De plus, le principe de superposition ne s'applique plus (voir problème 3.4) et la bande passante du signal modulé dépasse largement celle du signal modulant. La gêne que semble à première vue causer cet accroissement de bande passante est largement compensée par les avantages qu'apportent ces procédés de modulation en ce qui concerne l'immunité au bruit et aux interférences du signal transmis (voir chapitre 7).

3.2 MODULATION D'ARGUMENT ET FRÉQUENCE INSTANTANÉE

Une onde porteuse sinusoïdale dont on module l'argument se présente sous la forme générale suivante — voir relation (2.1) :

$$x_p(t) = A \cos [\omega_p t + \phi(t)] \quad (3.1)$$

où A et ω_p sont des constantes et l'angle de phase $\phi(t)$ est fonction du signal utile $m(t)$.

Si l'on écrit la relation (3.1) sous la forme suivante :

$$x_p(t) = A \cos \theta(t) \quad (3.2)$$

où

$$\theta(t) = \omega_p t + \phi(t) \quad (3.3)$$

on peut alors définir la fréquence instantanée de $x_p(t)$, notée ω_i , de la façon suivante :

$$\omega_i = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_p + \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (3.4)$$

on notera que lorsque $\phi(t) = \text{constante}$, $\omega_i = \omega_p$.

Les fonctions $\phi(t)$ et $d\phi(t)/dt$ sont appelées *excursion de phase instantanée* et *excursion de fréquence instantanée*. On définit aussi la quantité $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = |\omega_i - \omega_p|_{\max} \quad (3.5)$$

que l'on appelle *excursion maximale de fréquence* du signal à modulation d'argument.

3.3 MODULATION DE PHASE ET DE FRÉQUENCE

Les deux types de modulation d'argument sont, comme nous l'avons dit, la modulation de phase et la modulation de fréquence (PM pour *phase modulation*, FM pour *frequency modulation*). En modulation de phase, l'excursion de phase instantanée de la porteuse est proportionnelle à l'amplitude du signal modulant $m(t)$, soit :

$$\phi(t) = k_\phi m(t) \quad (3.6)$$

où k_ϕ est la constante d'excursion de phase exprimée en radians par unité de $m(t)$.

En modulation de fréquence, l'excursion de fréquence instantanée est proportionnelle à l'amplitude du signal modulant $m(t)$, c'est-à-dire :

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = k_f m(t) \quad (3.7)$$

soit :

$$\phi(t) = k_f \int_{t_0}^t m(\lambda) d\lambda + \phi(t_0) \quad (3.8)$$

où k_f est la constante d'excursion de fréquence qui s'exprime en radians par seconde par unité du signal $m(t)$ et $\phi(t_0)$ la phase initiale de la porteuse à l'instant $t = t_0$. On suppose habituellement que $t_0 = -\infty$ et que $\phi(-\infty) = 0$.

On peut donc exprimer un signal à modulation d'argument, selon qu'il est modulé en phase ou en fréquence, sous les formes suivantes :

$$x_{PM}(t) = A \cos [\omega_p t + k_\phi(t)] \quad (3.9)$$

$$x_{FM}(t) = A \cos \left[\omega_p t + k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right] \quad (3.10)$$

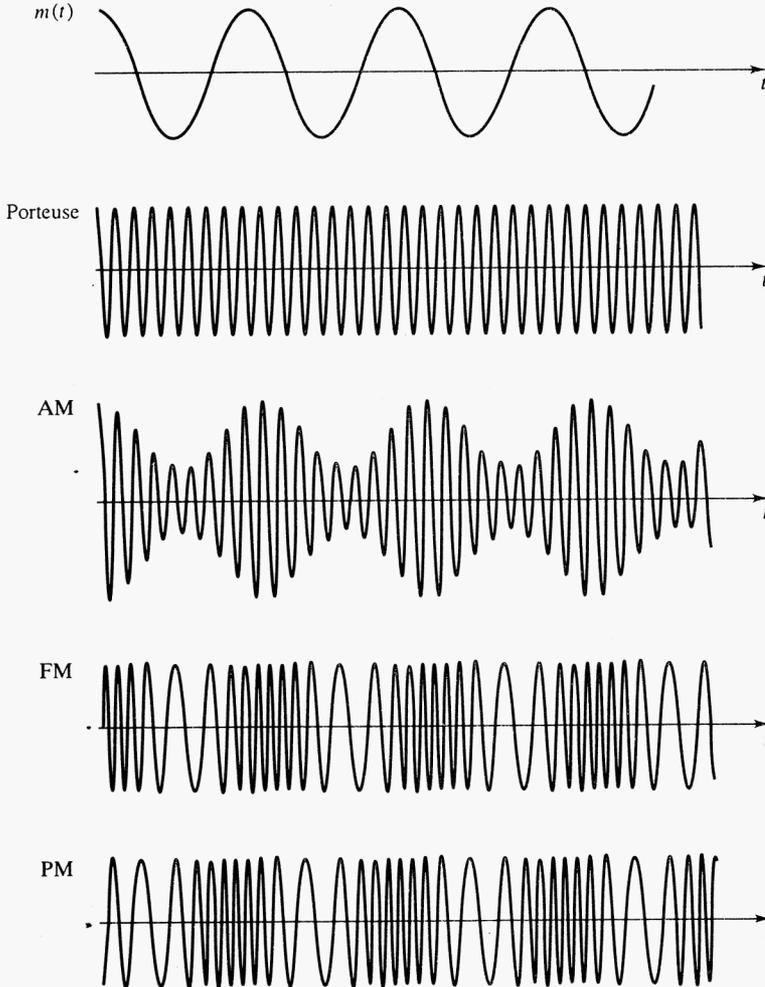


Fig. 3-1 Signaux modulés en AM, FM et PM

D'après la définition (3.4), on peut écrire que :

$$\omega_i = \omega_p + k_\phi \frac{dm(t)}{dt} \quad \text{en PM} \quad (3.11)$$

$$\omega_i = \omega_p + k_f m(t) \quad \text{en FM} \quad (3.12)$$

Ainsi, en PM, la fréquence instantanée ω_i varie en fonction linéaire de la dérivée du signal modulant, tandis qu'en FM, ω_i varie en fonction linéaire du signal modulant.

La figure 3-1 représente les formes d'ondes de signaux modulés en AM, en FM et en PM.

3.4 SPECTRE DE FOURIER DES SIGNAUX MODULÉS EN ARGUMENT

Un signal modulé en argument peut s'exprimer sous forme exponentielle en écrivant la relation (3.1) de la façon suivante :

$$x_p(t) = \text{Re}(Ae^{j(\omega_p t + \phi(t))}) = \text{Re}(Ae^{j\omega_p t} e^{j\phi(t)}) \quad (3.13)$$

où Re signifie «partie réelle de». C'est en raison de cette représentation que la modulation d'argument est parfois appelée *modulation exponentielle*.

En effectuant un développement en série de $e^{j\phi(t)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \text{Re} \left\{ A e^{j\omega_p t} \left[1 + j\phi(t) - \frac{\phi^2(t)}{2!} - \dots + j^n \frac{\phi^n(t)}{n!} + \dots \right] \right\} \\ &= A \left[\cos \omega_p t - \phi(t) \sin \omega_p t - \frac{\phi^2(t)}{2!} \cos \omega_p t + \frac{\phi^3(t)}{3!} \sin \omega_p t + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Un signal à modulation d'argument se compose donc d'une porteuse non modulée accompagnée de plusieurs composantes modulées en amplitude, telles que $\phi(t) \sin \omega_p t$, $\phi^2(t) \cos \omega_p t$, $\phi^3(t) \sin \omega_p t$, etc. Son spectre de Fourier comporte donc une porteuse non modulée accompagnée des spectres de $\phi(t)$, $\phi^2(t)$, $\phi^3(t)$, etc., centrés sur ω_p .

Il est donc clair qu'il n'y a pas de relation simple entre le spectre de Fourier d'un signal à modulation d'argument et le spectre du signal modulant la porteuse, comme dans le cas de l'AM.

3.5 MODULATION D'ARGUMENT À BANDE ÉTROITE

Si l'on a

$$|\phi(t)|_{\max} \ll 1 \quad (3.15)$$

on peut écrire une approximation de la relation (3.14) en négligeant les termes de degré supérieur à 1 de $\phi(t)$:

$$x_p(t) \approx A \cos \omega_p t - A\phi(t) \sin \omega_p t \quad (3.16)$$

Le signal correspondant à la relation (3.16) est appelé signal à modulation d'argument en bande étroite (NB : *narrow band*). On peut écrire deux relations approchées :

$$x_{\text{NBPM}}(t) \approx A \cos \omega_p t - A k_\phi m(t) \sin \omega_p t \quad (3.17)$$

$$x_{\text{NBFM}}(t) \approx A \cos \omega_p t - A \left[k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right] \sin \omega_p t \quad (3.18)$$

La relation (3.16) montre qu'un signal à modulation d'argument en bande étroite se compose d'une porteuse non modulée plus une porteuse déphasée de $\pi/2$ multipliée par $\phi(t)$, fonction linéaire de $m(t)$. Cette multiplication engendre une paire de bandes latérales. Si $\phi(t)$ présente une bande passante B_p , celle d'un signal à modulation d'argument en bande étroite a pour valeur $2B_p$. Cela rappelle ce que nous avons vu pour les signaux modulés en AM.

3.6 MODULATION SINUSOÏDALE (OU À FRÉQUENCE PURE)

A. Index de modulation

Si le signal modulant $m(t)$ est une sinusoïde pure, c'est-à-dire si :

$$m(t) = \begin{cases} a_m \sin \omega_m t & \text{en mode PM} \\ a_m \cos \omega_m t & \text{en mode FM} \end{cases} \quad (3.19)$$

Les équations (3.6) et (3.8) permettent d'écrire :

$$\phi(t) = \beta \sin \omega_m t \quad (3.20)$$

où l'on a :

$$\beta = \begin{cases} k_\phi a_m & \text{en mode PM} \\ \frac{k_f a_m}{\omega_m} & \text{en mode FM} \end{cases} \quad (3.21)$$

Le paramètre β est l'*index de modulation* de la modulation d'argument, il définit la valeur maximale de l'excursion de phase en mode PM ou FM. On remarquera que β n'est défini que pour une modulation sinusoïdale à fréquence pure et peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \quad (3.22)$$

où $\Delta\omega$ est l'excursion maximale de fréquence telle qu'elle est définie par la relation (3.5).

B. Spectre de Fourier

En substituant la relation (3.20) dans la relation (3.1), on obtient :

$$x_p(t) = A \cos(\omega_p t + \beta \sin \omega_m t) \quad (3.23)$$

qui correspond à un signal à modulation d'argument sinusoïdale. Un développement en série de Fourier montre que ce signal s'exprime de la façon suivante :

$$x_p(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_p + n\omega_m)t \quad (3.24)$$

où $J_n(\beta)$ est la fonction de Bessel du premier genre d'ordre n et d'argument β . Le tableau B-1 (annexe B) donne quelques valeurs remarquables de $J_n(\beta)$. D'après la relation (3.24) et le tableau B-1, on peut observer que :

1. Le spectre se compose d'une fréquence porteuse accompagnée d'une infinité de raies latérales aux fréquences $\omega_p \pm n\omega_m$ ($n = 1, 2, 3 \dots$).
2. Les amplitudes relatives des raies spectrales dépendent de la valeur de $J_n(\beta)$, qui devient très faible lorsque n devient très grand.
3. Le nombre de raies spectrales significatives (d'amplitude relative appréciable) dépend de l'index de modulation β . Si $\beta \ll 1$, seules J_0 et J_1 ont une amplitude non négligeable et le spectre se réduit à une porteuse accompagnée de deux raies latérales. Si, en revanche, $\beta \gg 1$, on a une multitude de raies latérales, l'amplitude de la porteuse ω_p diminuant en conséquence.

La figure 3-2 représente les spectres d'amplitude de plusieurs signaux à modulation d'argument pour différentes valeurs de β .

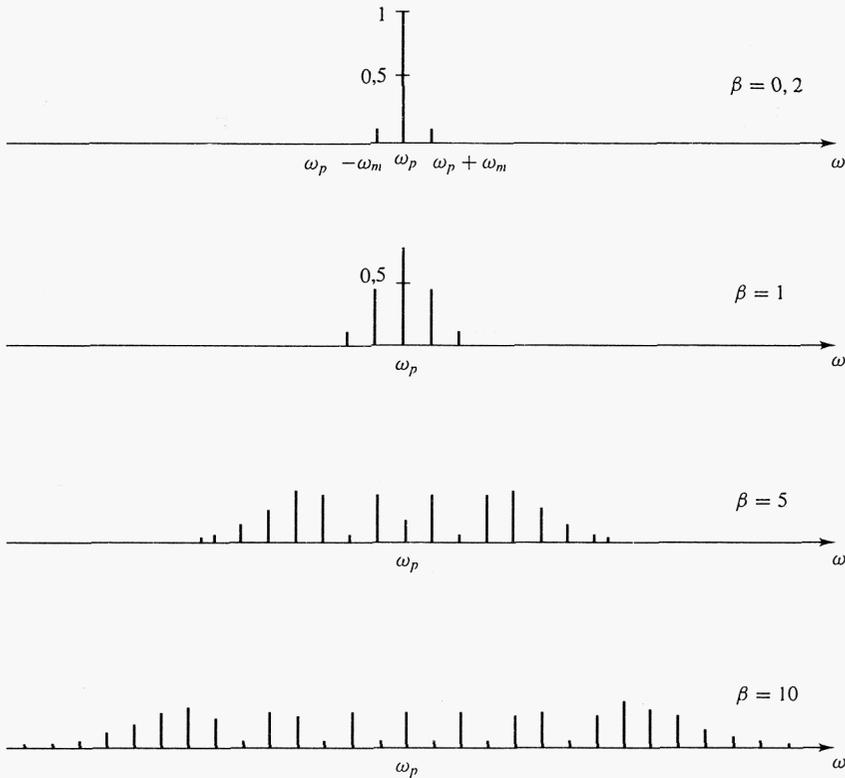


Fig. 3-2 Spectre d'amplitude de signaux modulés en fréquence par une sinusoïde pure (ω_m fixe)

3.7 LARGEUR DE BANDE DES SIGNAUX À MODULATION D'ARGUMENT

A. Modulation par une sinusoïde pure

D'après la figure 3-2 et le tableau B-1, on voit que la largeur de bande d'un signal à modulation d'argument modulé par une sinusoïde pure dépend de β et de ω_m . On peut montrer qu'en fait 98% de la puissance moyenne du signal est contenue dans une largeur de bande B_p telle que :

$$B_p \approx 2(\beta + 1)\omega_m \tag{3.25}$$

Lorsque $\beta \ll 1$, le signal occupe une bande étroite (signal NB) de largeur approximativement égale à $2\omega_m$. On considère généralement qu'une valeur $\beta < 0,2$ satisfait à cette condition. Si l'on veut parler en hertz (fréquences) et non plus en radians par seconde (pulsations), on n'oubliera pas que $\omega = 2\pi f$.

B. Modulation quelconque

Pour un signal dont l'argument est modulé par un signal $m(t)$ dans une bande limitée à ω_M radians par seconde, l'index de modulation D se définit de la façon suivante :

$$D = \frac{\text{excursion maximale de fréquence}}{\text{largeur de bande de } m(t)} = \frac{\Delta\omega}{\omega_M} \tag{3.26}$$

D joue le même rôle que β dans le cas de la modulation d'argument à fréquence pure et l'on a de même la relation :

$$B_p \approx 2(D + 1)\omega_M \tag{3.27}$$

Cette relation est appelée *règle de Carson*. Si $D \ll 1$, la largeur de bande du signal modulé est de l'ordre de $2\omega_M$, et l'on dit que l'on a un signal NB (*narrow band*) modulé en argument à bande étroite (voir paragraphe 3.4). Si $D \gg 1$, la largeur de bande du signal est de l'ordre de $2D\omega_m = 2\Delta\omega$, ce qui représente deux fois le maximum de l'excursion de fréquence. On dit que l'on a un signal WB (*wide band*) modulé en argument à bande large.

3.8 SYSTÈMES DE MODULATION D'ARGUMENT

A. Modulation d'argument à bande étroite

On peut élaborer un signal dont l'argument est modulé en bande étroite (BE), *narrow band* (NB), en anglais, en se laissant guider par les relations (3.16), (3.17) ou (3.18). C'est ce qu'illustre la figure 3-3.

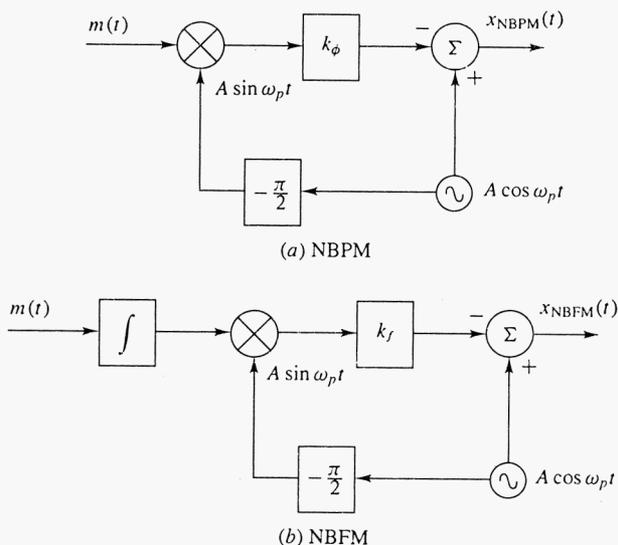


Fig. 3-3 Obtention d'une modulation d'argument à bande étroite

B. Modulation d'argument à bande large

Il existe deux méthodes d'obtention d'un signal dont l'argument est modulé en bande large (BL) — *wide band*, (WB) en anglais : une méthode directe et une méthode indirecte.

1. Méthode indirecte

Dans cette méthode, on crée d'abord un signal dont l'argument est modulé en bande étroite (voir figure 3-3), puis converti en bande large au moyen de multiplicateurs de fréquence (figure 3-4). Un multiplicateur de fréquence multiplie l'argument de la sinusoïde qui lui est appliquée par un facteur n . Ainsi, si le signal d'entrée du multiplicateur est de la forme :

$$x(t) = A \cos [\omega_p t + \phi(t)] \quad (3.28)$$

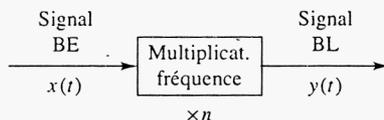


Fig. 3-4 Multiplicateur de fréquence

le signal de sortie a pour expression :

$$y(t) = A \cos [n\omega_p t + n\phi(t)] \tag{3.29}$$

L'utilisation d'un multiplicateur de fréquence accroît de façon considérable la valeur de la fréquence porteuse. Pour remédier à cet inconvénient, il est nécessaire de faire appel à un convertisseur de fréquence (mélangeur ou modulateur BLD), comme le montre la figure 3-5, pour décaler le spectre du signal modulé.

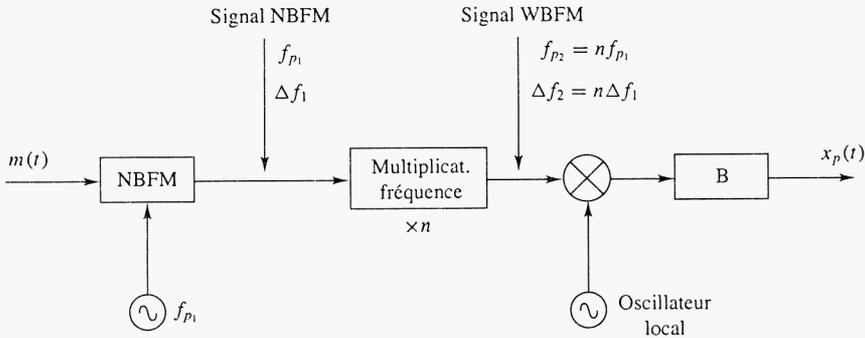


Fig. 3-5 Conversion bande étroite - bande large

2. Méthode directe

La méthode directe d'élaboration d'un signal FM consiste à contrôler directement la fréquence de la porteuse au moyen du signal modulant. La méthode la plus courante fait appel à la modulation de la capacité ou de la self-induction d'un composant du circuit oscillant qui délivre la fréquence porteuse. On appelle un tel système *oscillateur commandé en tension*; en anglais *voltage controlled oscillator*, VCO. L'avantage de la méthode directe est que l'on peut obtenir des excursions de fréquence considérables, ce qui limite le besoin en multiplication de fréquence. L'inconvénient de cette méthode réside dans l'instabilité que l'on introduit dans l'oscillateur, ce qui nécessite des circuits auxiliaires de stabilisation de fréquence.

3.9 DÉMODULATION DES SIGNAUX MODULÉS EN ARGUMENT

La démodulation d'un signal FM requiert un système qui produise un signal de sortie proportionnel à l'excursion de fréquence instantanée du signal qui lui est appliqué. Un tel système est appelé *discriminateur de fréquence*. Si l'entrée du discriminateur est un signal à modulation d'argument

$$x_p(t) = A \cos [\omega_p t + \phi(t)]$$

alors, le discriminateur fournit un signal

$$y_d(t) = k_d \frac{d\phi(t)}{dt} \tag{3.30}$$

où k_d désigne la sensibilité du discriminateur.

En FM, la relation (3.8) donne l'expression de la phase $\phi(t)$:

$$\phi(t) = k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda$$

La relation (3.30) devient ainsi :

$$y_d(t) = k_d k_f m(t) \quad (3.31)$$

La figure 3-6 représente la caractéristique d'un discriminateur de fréquence idéal.

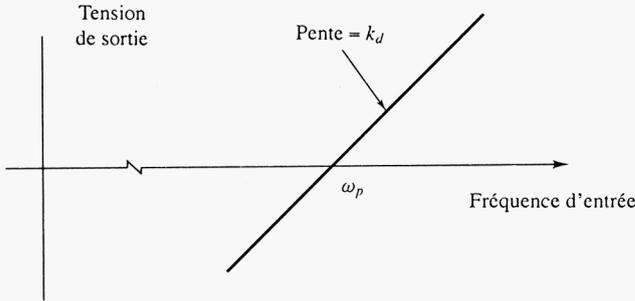


Fig. 3-6 Caractéristique d'un discriminateur de fréquence idéal

Le discriminateur de fréquence peut aussi être utilisé pour démoduler les signaux à modulation de phase (PM). Dans ce cas, la relation (3.6) donne l'expression de la phase du signal :

$$\phi(t) = k_\phi m(t)$$

En tenant compte de la relation (3.30), $y_d(t)$ devient :

$$y_d(t) = k_d k_\phi \frac{dm(t)}{dt} \quad (3.32)$$

L'intégration du signal que délivre le discriminateur fournit un signal proportionnel à $m(t)$. On peut donc réaliser un démodulateur pour la modulation de phase à partir d'un démodulateur pour la modulation de fréquence suivi d'un intégrateur.

Une approximation du discriminateur de fréquence idéal, simple à réaliser, peut être obtenue au moyen d'un différentiateur suivi d'un détecteur d'enveloppe (figure 3-7). Si le signal d'entrée du différentiateur a pour expression :

$$x_p(t) = A \cos [\omega_p t + \phi(t)]$$

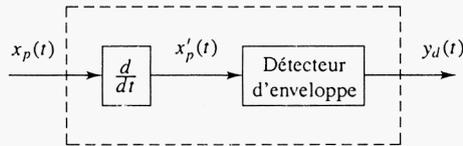


Fig. 3-7 Discriminateur de fréquence

le signal de sortie du différentiateur est de la forme

$$x'_p(t) = -A \left[\omega_p + \frac{d\phi(t)}{dt} \right] \sin[\omega_p t + \phi(t)] \quad (3.33)$$

Le signal $x'_p(t)$ est à la fois modulé en amplitude et en argument. L'enveloppe de $x'_p(t)$ a pour expression :

$$A \left[\omega_p + \frac{d\phi(t)}{dt} \right]$$

La relation (3.4) donne l'expression du signal fourni par le détecteur d'enveloppe :

$$y_d(t) = \omega_i \quad (3.34)$$

C'est-à-dire la fréquence instantanée de $x_p(t)$.

Il existe d'autres moyens pour réaliser un discriminateur de fréquence (voir problèmes 3.20, 3.21 et 3.22).

Problèmes résolus

FRÉQUENCE INSTANTANÉE

3.1. Déterminer la fréquence instantanée, en hertz, de chacun des signaux qui suivent :

- (a) $10 \cos(200\pi t + \frac{\pi}{3})$
 (b) $10 \cos(20\pi t + \pi t^2)$
 (c) $\cos 200\pi t \cos(5 \sin 2\pi t) + \sin 200\pi t \sin(5 \sin 2\pi t)$
 (a) L'argument a pour valeur :

$$\theta(t) = 200\pi t + \frac{\pi}{3}$$

On en déduit par dérivation la fréquence instantanée :

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = 200\pi = 2\pi(100)$$

La fréquence instantanée est constante, elle vaut 100 Hz.

- (b) L'argument a pour expression :

$$\theta(t) = 20\pi t + \pi t^2$$

La dérivation par rapport au temps donne :

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = 20\pi + 2\pi t = 2\pi(10 + t)$$

La fréquence instantanée vaut 10 Hz à l'instant $t = 0$ puis croît linéairement avec le temps au taux de 1 Hz par seconde.

- (c) L'expression de l'argument peut se transformer :

$$\cos 200\pi t \cos(5 \sin 2\pi t) + \sin 200\pi t \sin(5 \sin 2\pi t) = \cos(200\pi t - 5 \sin 2\pi t)$$

D'où :

$$\theta(t) = 200\pi t - 5 \sin 2\pi t$$

Par dérivation :

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = 200\pi - 10\pi \cos 2\pi t = 2\pi(100 - 5 \cos 2\pi t)$$

La fréquence instantanée du signal a pour valeur 95 Hz à $t = 0$ et oscille de façon sinusoïdale entre 95 et 105 Hz.

3.2. Considérons un signal à modulation d'argument :

$$x_p(t) = 10 \cos[(10^8)\pi t + 5 \sin 2\pi(10^3)t]$$

Calculer les valeurs maximales de son excursion de phase et de son excursion de fréquence.

Si l'on rapproche le signal $x_p(t)$ donné et la relation (3.1), on peut écrire :

$$\theta(t) = \omega_p t + \phi(t) = (10^8)\pi t + 5 \sin 2\pi(10^3)t$$

soit

$$\phi(t) = 5 \sin 2\pi(10^3)t$$

d'où

$$\phi'(t) = 5(2\pi)(10^3) \cos 2\pi(10^3)t$$

L'excursion maximale de la phase est donc :

$$|\phi(t)|_{\max} = 5 \text{ rad}$$

Quant à l'excursion maximale de fréquence, elle vaut :

$$\Delta\omega = |\phi'(t)|_{\max} = 5(2\pi)(10^3) \text{ rad/s}$$

soit

$$\Delta f = 5 \text{ kHz}$$

MODULATION DE PHASE ET DE FRÉQUENCE

3.3. Un signal à modulation d'argument a pour expression :

$$x_p(t) = 10 \cos [2\pi(10^6)t + 0,1 \sin(10^3)\pi t]$$

- (a) En considérant $x_p(t)$ comme un signal modulé en phase (PM) avec $k_\phi = 10$, exprimer le signal modulant $m(t)$.
- (b) En considérant $x_p(t)$ comme un signal modulé en fréquence (FM) avec $k_f = 10\pi$, exprimer le signal modulant $m(t)$.
- (a) Identifions l'expression d'un signal modulé en phase avec celle du signal proposé :

$$\begin{aligned} x_{\text{PM}}(t) &= A \cos [\omega_p t + k_\phi m(t)] \\ &= 10 \cos [2\pi(10^6)t + 10m(t)] \\ &= 10 \cos [2\pi(10^6)t + 0,1 \sin(10^3)\pi t] \end{aligned}$$

D'où l'on obtient :

$$m(t) = 0,01 \sin(10^3)\pi t$$

- (b) De même, identifions l'expression d'un signal modulé en fréquence avec celle du signal proposé :

$$\begin{aligned} x_{\text{FM}}(t) &= A \cos \left[\omega_p t + k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right] \\ &= 10 \cos [2\pi(10^6)t + 0,1 \sin(10^3)\pi t] \end{aligned}$$

En posant

$$m(t) = a_m \cos(10^3)\pi t$$

on obtient :

$$\begin{aligned} 10\pi \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda &= 10\pi a_m \int_{-\infty}^t \cos(10^3)\pi \lambda d\lambda \\ &= \frac{a_m}{100} \sin(10^3)\pi t = 0,1 \sin(10^3)\pi t \end{aligned}$$

En faisant $a_m = 10$, il vient :

$$m(t) = 10 \cos(10^3)\pi t$$

3.4. Soit $m_1(t)$ et $m_2(t)$ deux signaux modulateurs, $x_{p_1}(t)$ et $x_{p_2}(t)$ les deux signaux modulés correspondants.

- (a) Montrer que si la modulation du type AM BLD (modulation d'amplitude à double bande latérale), un signal modulant $m_1(t) + m_2(t)$ produit un signal modulé $x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)$ (raison pour laquelle la modulation d'amplitude est parfois dite *modulation non linéaire*).
- (b) Montrer que si la modulation est de type PM (modulation de phase), un signal modulant $m_1(t) + m_2(t)$ ne produit pas un signal modulé $x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)$, c'est-à-dire que le principe de superposition ne s'applique pas à la modulation d'argument (raison pour laquelle la modulation d'argument est parfois dite *modulation non linéaire*).

(a) En modulation AM BLD, on peut écrire, d'après la relation (2.3) :

$$m_1(t) \rightarrow x_{p_1}(t) = m_1(t) \cos \omega_p t$$

$$m_2(t) \rightarrow x_{p_2}(t) = m_2(t) \cos \omega_p t$$

$$\begin{aligned} m_1(t) + m_2(t) \rightarrow x_p(t) &= [m_1(t) + m_2(t)] \cos \omega_p t \\ &= m_1(t) \cos \omega_{p_1} t + m_2(t) \cos \omega_{p_2} t \\ &= x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t) \end{aligned}$$

Il en résulte que la modulation AM BLD est bien linéaire.

(b) En modulation PM, on peut écrire, d'après la relation (3.9) :

$$\begin{aligned} m_1(t) \rightarrow x_{p_1}(t) &= A \cos \left[\omega_p t + k_\phi m_1(t) \right] \\ m_2(t) \rightarrow x_{p_2}(t) &= A \cos \left[\omega_p t + k_\phi m_2(t) \right] \\ m_1(t) + m_2(t) \rightarrow x_p(t) &= A \cos \left\{ \omega_p t + k_\phi [m_1(t) + m_2(t)] \right\} \\ &\neq x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t) \end{aligned}$$

D'où l'on déduit le caractère non linéaire de la modulation PM.

3.5. Etablir la relation (3.24).

Lorsqu'on module l'argument d'une porteuse au moyen d'une sinusoïde pure, le signal modulé obtenu a pour expression [relation (3.23)] :

$$x_p(t) = A \cos(\omega_p t + \beta \sin \omega_m t)$$

On peut l'exprimer sous forme exponentielle :

$$x_p(t) = A \operatorname{Re}(e^{j\omega_p t} e^{j\beta \sin \omega_m t}) \quad (3.35)$$

La fonction $e^{j\beta \sin \omega_m t}$ est à l'évidence périodique, de période $T_m = 2\pi/\omega_m$. Elle a donc un développement en série de Fourier :

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_m t}$$

D'après la relation (1.19), les coefficients c_n ont pour expression :

$$c_n = \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_m}^{\pi/\omega_m} e^{j\beta \sin \omega_m t} e^{-jn\omega_m t} dt$$

En posant $\omega_m t = x$, la relation devient :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin x - nx)} dx = J_n(\beta)$$

où $J_n(\beta)$ est la fonction de Bessel d'ordre n et d'argument β (voir annexe B).

Ainsi :

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t} \quad (3.36)$$

En tenant compte de la relation (3.36) pour exprimer la relation (3.35), on obtient :

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A \operatorname{Re} \left[e^{j\omega_p t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t} \right] \\ &= A \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j(\omega_p + n\omega_m)t} \right] \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle, on obtient :

$$x_p(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_p + n\omega_m)t$$

- 3.6.** Calculer la puissance moyenne d'un signal à modulation d'argument lorsque le signal modulant est une sinusoïde pure.

D'après la relation (3.24), un signal dont l'argument est modulé sinusoïdalement a pour expression :

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A J_n(\beta) \cos(\omega_p + n\omega_m)t$$

La puissance moyenne a pour expression :

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} A^2 J_n^2(\beta) = \frac{1}{2} A^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = \frac{1}{2} A^2. \quad (3.37)$$

puisque

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1 \quad (3.38)$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER DES SIGNAUX À MODULATION D'ARGUMENT

- 3.7.** Une porteuse est modulée en argument par la somme de deux sinusoïdes :

$$x_p(t) = A \cos(\omega_p t + \beta_1 \sin \omega_1 t + \beta_2 \sin \omega_2 t) \quad (3.39)$$

où ω_1 et ω_2 ne sont pas en relation harmonique. Calculer le spectre de $x_p(t)$.

Comme lors du problème 3.5, $x_p(t)$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A \operatorname{Re}(e^{j\omega_p t} e^{j(\beta_1 \sin \omega_1 t + \beta_2 \sin \omega_2 t)}) \\ &= A \operatorname{Re}(e^{j\omega_p t} e^{j\beta_1 \sin \omega_1 t} e^{j\beta_2 \sin \omega_2 t}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

En invoquant la relation (3.36), on obtient :

$$\begin{aligned} e^{j\beta_1 \sin \omega_1 t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_1) e^{jn\omega_1 t} \\ e^{j\beta_2 \sin \omega_2 t} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\beta_2) e^{jm\omega_2 t} \end{aligned}$$

En portant ces expressions dans la relation (3.40) et en prenant la partie réelle, on obtient :

$$x_p(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_1) J_m(\beta_2) \cos(\omega_p + n\omega_1 + m\omega_2)t \quad (3.41)$$

La relation (3.41) montre que le spectre de $x_p(t)$ se compose de quatre types d'éléments : (1) une raie spectrale correspondant à la porteuse, (2) des raies spectrales situées à $\omega_p \pm n\omega_1$ correspondant à la première modulation sinusoïdale, (3) des raies spectrales situées à $\omega_p \pm m\omega_2$ correspondant à la deuxième modulation sinusoïdale et (4) des raies spectrales situées à $\omega_p \pm n\omega_1 \pm m\omega_2$ dues à la non-linéarité de la modulation d'argument.

- 3.8.** Soit une modulation d'argument sinusoïdale dont le signal s'exprime de la façon suivante (voir relation 3.23) :

$$x_p(t) = A \cos(\omega_p t + \beta \sin \omega_m t)$$

Lorsque $\beta \ll 1$, on est en présence d'une modulation à bande étroite (NB).

- Calculer le spectre d'un tel signal.
- Comparer avec celui d'un signal AM modulé par une sinusoïde pure.
- Discuter les similitudes et différences observées au moyen d'un diagramme vectoriel.

(a) Développons l'expression de la porteuse modulée :

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A \cos(\omega_p t + \beta \sin \omega_m t) \\ &= A \cos \omega_p t \cos(\beta \sin \omega_m t) - A \sin \omega_p t \sin(\beta \sin \omega_m t) \end{aligned}$$

Lorsque $\beta \ll 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \cos(\beta \sin \omega_m t) &\approx 1 \\ \sin(\beta \sin \omega_m t) &\approx \beta \sin \omega_m t \end{aligned}$$

Le signal NB prend alors la forme approchée qui suit :

$$\begin{aligned} x_{\text{NBC}}(t) &\approx A \cos \omega_p t - \beta A \sin \omega_m t \sin \omega_p t \\ &= A \cos \omega_p t - \frac{\beta A}{2} \cos(\omega_p - \omega_m)t + \frac{\beta A}{2} \cos(\omega_p + \omega_m)t \end{aligned} \quad (3.42)$$

On remarquera que la relation (3.42) peut être aisément obtenue à partir de la relation (3.16) en remplaçant $\phi(t)$ par $\beta \sin \omega_m t$.

D'après la relation (3.42), on voit que le spectre de $x_{\text{NBC}}(t)$ se compose d'une raie spectrale correspondant à la porteuse escortée d'une paire de bandes latérales situées à $\omega_p \pm \omega_m$.

(b) Le résultat précédent est comparable à la situation que nous avons rencontrée dans le cas d'une porteuse modulée en amplitude par une sinusoïde pure [voir relation (2.19) du problème 2.4].

$$\begin{aligned} x_{\text{AM}}(t) &= A \cos \omega_p t + \mu A \cos \omega_m t \cos \omega_p t \\ &= A \cos \omega_p t + \frac{\mu A}{2} \cos(\omega_p - \omega_m)t + \frac{\mu A}{2} \cos(\omega_p + \omega_m)t \end{aligned} \quad (3.43)$$

où μ est l'index de modulation pour la modulation d'amplitude.

La comparaison des relations (3.42) et (3.43) montre que la différence essentielle entre modulation d'argument NB et modulation AM réside dans l'inversion de phase de la bande latérale inférieure.

(c) En utilisant la relation (3.35) ainsi que l'approximation

$$e^{j\beta \sin \omega_m t} \approx 1 + j\beta \sin \omega_m t \quad \text{pour } \beta \ll 1$$

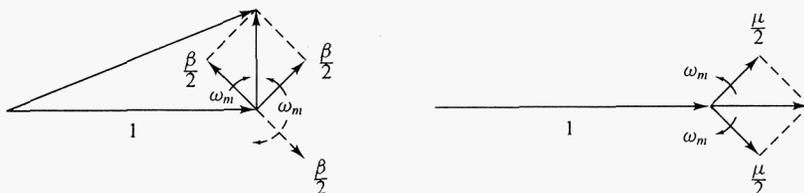
La relation (3.42) peut être écrite sous forme d'une projection vectorielle :

$$\begin{aligned} x_{\text{NBC}}(t) &= \text{Re} \left[A e^{j\omega_p t} (1 + j\beta \sin \omega_m t) \right] \\ &= \text{Re} \left[A e^{j\omega_p t} \left(1 + \frac{\beta}{2} e^{j\omega_m t} - \frac{\beta}{2} e^{-j\omega_m t} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

De la même façon, la relation (3.43) peut être écrite sous forme d'une projection vectorielle :

$$\begin{aligned} x_{\text{AM}}(t) &= \text{Re} \left[A e^{j\omega_p t} (1 + \mu \cos \omega_m t) \right] \\ &= \text{Re} \left[A e^{j\omega_p t} \left(1 + \frac{\mu}{2} e^{j\omega_m t} + \frac{\mu}{2} e^{-j\omega_m t} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

En prenant le terme $A e^{j\omega_p t}$ comme référence, on peut construire les diagrammes vectoriels de la figure 3-8 représentatifs des relations (3.44) et (3.45). La différence entre ces deux diagrammes est évidente; en modulation d'argument NB, la modulation est additionnée en quadrature à la porteuse, ce qui induit une fluctuation de la phase sans évolution sensible de l'amplitude, tandis qu'en AM la modulation est ajoutée en phase à la porteuse, ce qui n'induit aucune variation de phase.



(a) signal NBFM

(b) signal AM

Fig. 3-8 Représentation vectorielle

LARGEUR DE BANDE DES SIGNAUX À MODULATION D'ARGUMENT

3.9. Soit un signal à modulation d'argument :

$$x_p(t) = 10 \cos(2\pi 10^8 t + 200 \cos 2\pi 10^3 t)$$

Quelle est sa largeur de bande?

La fréquence instantanée de ce signal est

$$\omega_i = 2\pi(10^8) - 4\pi(10^5) \sin 2\pi(10^3)t$$

d'où $\Delta\omega = 4\pi(10^5)$, $\omega_m = 2\pi(10^3)$ et

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{4\pi(10^5)}{2\pi(10^3)} = 200$$

D'après la relation (3.25),

$$B_P = 2(\beta + 1)\omega_m = 8,04\pi(10^5) \text{ rad/s}$$

Comme $\beta \ll 1$,

$$B_P \approx 2\Delta\omega = 8\pi(10^5) \text{ rad/s} \quad \text{soit } f_B = 400 \text{ kHz}$$

3.10. Une porteuse de fréquence 20 MHz (mégahertz) est modulée en fréquence par un signal sinusoïdal avec une excursion de fréquence maximale de 100 kHz. Déterminer l'index de modulation et évaluer la bande passante du signal FM lorsque la fréquence du signal modulant est :

(a) 1 kHz, (b) 100 kHz, et (c) 500 kHz.

$$\Delta f = 100 \text{ kHz}, \quad f_p = 20 \text{ MHz} \gg f_m$$

Pour une modulation sinusoïdale, $\beta = \Delta f / f_m$.

(a) Pour $f_m = 1 \text{ kHz}$, $\beta = 100$. Il s'agit d'un signal modulé en fréquence à large bande (WBFM, *wide band FM*), avec $f_B \approx 2\Delta f = 200 \text{ kHz}$.

(b) Pour $f_m = 100 \text{ kHz}$, $\beta = 1$. Donc, d'après la relation (3.25),

$$f_B \approx 2(\beta + 1)f_m = 400 \text{ kHz}$$

(c) Pour $f_m = 500 \text{ kHz}$, $\beta = 0,2$. Il s'agit d'un signal modulé en fréquence à bande étroite (NBFM, *narrow band FM*), avec $f_B \approx 2f_m = 1000 \text{ kHz} = 1 \text{ MHz}$.

3.11. Considérons un signal modulé en argument

$$x_p(t) = 10 \cos(\omega_p t + 3 \sin \omega_m t)$$

Supposons qu'il s'agisse d'une modulation de phase (PM) et que $f_m = 1 \text{ kHz}$. Calculer l'index de modulation et évaluer la bande passante lorsque (a) f_m est multipliée par 2 et (b) lorsque f_m est divisée par 2.

$$x_{PM}(t) = A \cos[\omega_p t + k_\phi m(t)] = 10 \cos(\omega_p t + 3 \sin \omega_m t)$$

Donc $m(t) = a_m \sin \omega_m t$, et l'on a :

$$x_{PM}(t) = 10 \cos(\omega_p t + k_\phi a_m \sin \omega_m t)$$

D'après la relation (3.21) ou (3.23),

$$\beta = k_\phi a_m = 3$$

on voit que la valeur de β est indépendante de f_m . En appliquant la relation (3.25), avec $f_m = 1 \text{ kHz}$:

$$f_B = 2(\beta + 1)f_m = 8 \text{ kHz}$$

- (a) Lorsque l'on double f_m , $\beta = 3$, $f_m = 2$ kHz, et l'on a :

$$f_B = 2(3 + 1)2 = 16 \text{ kHz}$$

- (b) Lorsque l'on divise f_m par 2, $\beta = 3$, $f_m = 0,5$ kHz, et l'on a :

$$f_B = 2(3 + 1)(0,5) = 4 \text{ kHz}$$

3.12. Reprendre le problème 3.11 dans le cas d'un signal FM.

$$x_{\text{FM}}(t) = A \cos \left[\omega_p t + k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right] = 10 \cos (\omega_p t + 3 \sin \omega_m t)$$

Le signal modulant $m(t)$ a donc pour expression

$$m(t) = a_m \cos \omega_m t$$

Et le signal modulé peut s'écrire sous la forme :

$$x_{\text{FM}}(t) = 10 \cos \left(\omega_p t + \frac{a_m k_f}{\omega_m} \sin \omega_m t \right)$$

D'après la relation (3.21) ou (3.23),

$$\beta = \frac{a_m k_f}{\omega_m} = \frac{a_m k_f}{2\pi f_m} = \frac{a_m k_f}{2\pi (10^3)} = 3$$

On voit que la valeur de β est inversement proportionnelle à f_m . D'après la relation (3.25), avec $f_m = 1$ kHz :

$$f_B = 2(\beta + 1)f_m = 2(3 + 1)1 = 8 \text{ kHz}$$

- (a) Lorsque l'on double f_m , $\beta = 3/2$, $f_m = 2$ kHz, et l'on a :

$$f_B = 2(\beta + 1)f_m = 2\left(\frac{3}{2} + 1\right)2 = 10 \text{ kHz}$$

- (b) Lorsque l'on divise f_m par 2, $\beta = 6$, $f_m = 0,5$ kHz, et l'on a :

$$f_B = 2(\beta + 1)f_m = 2(6 + 1)(0,5) = 7 \text{ kHz}$$

3.13. Une porteuse est modulée par une sinusoïde pure de fréquence 2 kHz, avec une excursion de fréquence maximale de la porteuse de 5 kHz.

- (a) Evaluer la bande passante du signal modulé.
 (b) On multiplie par 3 l'amplitude du signal modulant, tandis que sa fréquence est réduite à 1 kHz. Calculer l'excursion de fréquence maximale et la largeur de bande du nouveau signal modulé ainsi obtenu.

- (a) D'après la relation (3.21),

$$\beta = \frac{k_f a_m}{\omega_m} = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{5(10^3)}{2(10^3)} = 2,5$$

D'après la relation (3.25), la largeur de bande du signal a pour expression :

$$f_B = 2(\beta + 1)f_m = 2(2,5 + 1)2 = 14 \text{ kHz}$$

- (b) Soit β_1 le nouvel index de modulation, on a :

$$\beta_1 = \frac{k_f 3a_m}{0,5\omega_m} = 6 \frac{k_f a_m}{\omega_m} = 6\beta = 6(2,5) = 15$$

donc

$$\Delta f = \beta_1 f_{m1} = (15)(1) = 15 \text{ kHz}$$

$$f_B = 2(\beta_1 + 1)f_{m1} = 2(15 + 1)(1) = 32 \text{ kHz}$$

- 3.14.** Outre la règle de Carson (3.27), on applique souvent la formule suivante pour estimer la largeur de bande d'un signal FM :

$$B_P \approx 2(D + 2)\omega_M \quad \text{pour } D > 2$$

où $\omega_M = 2\pi f_M$ et f_M est la fréquence la plus élevée du Signal FM. Calculer la largeur de bande au moyen de cette formule et comparer la valeur obtenue avec celle que fournit la règle de Carson pour un signal FM dont les caractéristiques sont $\Delta f = 75$ kHz et $f_M = 15$ kHz (standard des radios FM commerciales).

En invoquant la relation (3.26), avec $\omega_M = 2\pi f_M$ et $f_M = 15$ kHz, on obtient :

$$D = \frac{\Delta f}{f_M} = \frac{75(10^3)}{15(10^3)} = 5$$

En appliquant la formule proposée, on obtient une largeur de bande

$$f_B = 2(D + 2)f_M = 210 \text{ kHz}$$

Si l'on applique la règle de Carson, on obtient une largeur de bande qui a pour expression :

$$f_B = 2(D + 1)f_M = 180 \text{ kHz}$$

Nota : Une transmission de qualité en FM impose un minimum de 200 kHz de largeur de bande. La formule de Carson donne donc une sous-estimation de la largeur de bande utile.

ÉLABORATION DES SIGNAUX À MODULATION D'ARGUMENT

- 3.15.** Considérons le multiplicateur de fréquence de la figure 3-4 et le signal NBFM suivant :

$$x_{\text{NBFM}} = A \cos(\omega_p t + \beta \sin \omega_m t)$$

avec $\beta < 0,5$ et $f_p = 200$ kHz. Supposons que f_m varie de 50 Hz à 15 kHz et que l'excursion maximale de fréquence soit de 75 kHz. Calculer le facteur multiplicatif nécessaire et l'excursion maximale de fréquence acceptable à l'entrée du multiplicateur.

D'après la relation (3.22), $\beta = \Delta f / f_m$. Donc :

$$\beta_{\min} = \frac{75(10^3)}{15(10^3)} = 5 \quad \beta_{\max} = \frac{75(10^3)}{50} = 1\,500$$

Si $\beta_1 = 0,5$, β_1 étant l'index de modulation du signal d'entrée, le facteur multiplicatif nécessaire est :

$$n = \frac{\beta_{\max}}{\beta_1} = \frac{1\,500}{0,5} = 3\,000$$

L'excursion maximale de fréquence Δf_1 admissible à l'entrée du multiplicateur a pour expression :

$$\Delta f_1 = \frac{\Delta f}{n} = \frac{75(10^3)}{3\,000} = 25 \text{ Hz}$$

- 3.16.** La figure 3-9 représente un émetteur FM Armstrong (méthode indirecte de modulation). Calculer l'excursion maximum de fréquence Δf en sortie de cet émetteur ainsi que la fréquence de la porteuse f_p si $f_1 = 200$ kHz, $f_{LO} = 10,8$ MHz, $\Delta f_1 = 25$ Hz, $n_1 = 64$, et $n_2 = 48$.

$$\Delta f = (\Delta f_1)(n_1)(n_2) = (25)(64)(48) \text{ Hz} = 76,8 \text{ kHz}$$

$$f_2 = n_1 f_1 = (64)(200)(10^3) = 12,8(10^6) \text{ Hz} = 12,8 \text{ MHz}$$

$$f_3 = f_2 \pm f_{LO} = (12,8 \pm 10,8)(10^6) \text{ Hz} = \begin{cases} 23,6 & \text{MHz} \\ 2,0 & \text{MHz} \end{cases}$$

Ainsi, lorsque $f_3 = 23,6$ MHz :

$$f_p = n_2 f_3 = (48)(23,6) = 1\,132,8 \text{ MHz}$$

Et lorsque $f_3 = 2$ MHz :

$$f_p = n_2 f_3 = (48)(2) = 96 \text{ MHz}$$

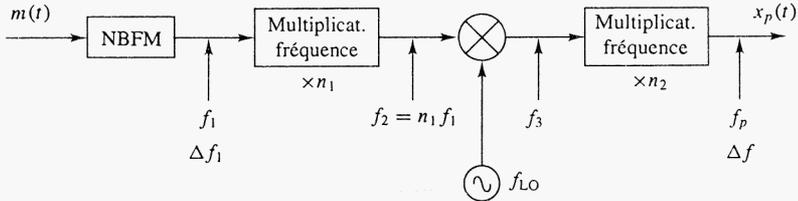


Fig 3-9 Schéma d'un émetteur FM à modulation Armstrong

3.17. L'émetteur FM Armstrong de la figure 3-9 (problème 3.16) est équipé d'un oscillateur à quartz dont la fréquence est de 200 kHz. L'excursion maximale de phase est limitée à 0,2 pour éviter toute distorsion. On suppose que f_m varie de 50 Hz à 15 kHz. La fréquence porteuse de l'émetteur est de 108 MHz, tandis que l'excursion maximale de fréquence est de 75 kHz. Définir le coefficient du multiplicateur de fréquence et la fréquence de l'oscillateur local du mélangeur.

D'après la figure 3-9, on peut écrire :

$$\Delta f_1 = \beta f_m = (0,2)(50) = 10 \text{ Hz}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta f_1} = \frac{75(10^3)}{10} = 7\,500 = n_1 n_2$$

$$f_2 = n_1 f_1 = n_1 (2)(10^5) \text{ Hz}$$

En supposant que l'on utilise la fréquence inférieure du mélangeur, on a :

$$f_2 - f_{LO} = \frac{f_p}{n_2}$$

On en déduit :

$$f_{LO} = n_1 f_1 - \frac{f_p}{n_2} = \frac{7\,500(2)(10^5) - 108(10^6)}{n_2} = \frac{1\,392}{n_2} (10^6) \text{ Hz}$$

En faisant $n_2 = 150$, on obtient :

$$n_1 = 50 \text{ et } f_{LO} = 9,28 \text{ MHz}$$

3.18. Un signal modulé en argument présente une excursion maximale de fréquence de 50 Hz lorsque le signal modulant est une sinusoïde d'amplitude unité et de fréquence 120 Hz. Déterminer le facteur multiplicatif nécessaire n pour obtenir une excursion de fréquence maximale de 20 kHz lorsque le signal modulant sinusoïdal d'entrée a une amplitude unité et une fréquence de 240 Hz, la modulation utilisée étant (a) une modulation de phase et (b) une modulation de fréquence.

(a) D'après les relations (3.21) et (3.22), on voit qu'en modulation de phase sinusoïdale, l'excursion de fréquence Δf maximale est proportionnelle à f_m . Ainsi :

$$\Delta f_1 = \left(\frac{240}{120} \right) (50) = 100 \text{ Hz}$$

d'où l'on déduit que :

$$n = \frac{\Delta f_2}{\Delta f_1} = \frac{20(10^3)}{100} = 200$$

- (b) Toujours d'après les relations (3.21) et (3.22), on voit qu'en modulation de fréquence sinusoïdale, l'excursion de fréquence Δf maximale est indépendante de f_m . On a donc :

$$n = \frac{\Delta f_2}{\Delta f_1} = \frac{20(10^3)}{50} = 400$$

- 3.19.** Lorsque l'on travaille avec une fréquence porteuse peu élevée, on peut la moduler en FM en faisant varier la capacité d'un circuit oscillant. Montrer que le signal de sortie $x_p(t)$ du circuit accordé de la figure 3-10 est modulé en fréquence si la valeur de la capacité dépend du temps selon la loi de variation :

$$C(t) = C_0 - km(t)$$

avec

$$\left| \frac{k}{C_0} m(t) \right| \ll 1$$

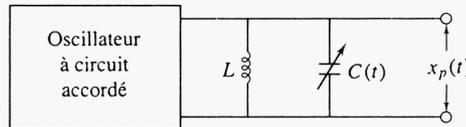


Fig. 3-10

Si l'on suppose que $km(t)$ est de faible valeur et varie lentement, la pulsation ω_i du signal de sortie de l'oscillateur a pour expression :

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{LC(t)}} = \frac{1}{\sqrt{L[C_0 - km(t)]}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \left[1 - \frac{k}{C_0} m(t) \right]^{-1/2}$$

Comme $|(k/C_0)m(t)| \ll 1$, on peut utiliser l'approximation

$$(1 - z)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}z$$

ce qui donne :

$$\omega_i \approx \omega_p \left[1 + \frac{1}{2} \frac{k}{C_0} m(t) \right] = \omega_p + k_f m(t)$$

relation dans laquelle

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \quad \text{et} \quad k_f = \frac{1}{2} \frac{\omega_p k}{C_0}$$

Résultat qui, rapproché de la relation (3.12), montre que $x_p(t)$ est un signal FM.

- 3.20.** On applique un signal FM de la forme

$$x_{\text{FM}}(t) = A \cos \left[\omega_p t + k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right]$$

au dispositif représenté sur la figure 3-11, constitué d'un filtre RC passe-haut suivi d'un détecteur d'enveloppe. On suppose que $\omega RC \ll 1$ dans la bande de fréquence qu'occupe $x_{\text{FM}}(t)$. Donner l'expression du signal de sortie $y(t)$ en supposant que $k_f |m(t)| < \omega_p$, quelle que soit la valeur de t .

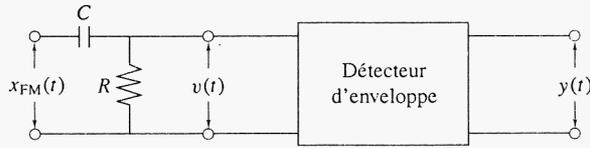


Fig. 3-11

La réponse en fréquence (fonction de transfert) $H(\omega)$ du filtre passe-haut RC a pour expression :

$$H(\omega) = \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Si $\omega RC \ll 1$, on peut écrire que

$$H(\omega) \approx j\omega RC$$

Comme la multiplication par $j\omega$ dans le domaine des fréquences est équivalente à la dérivation dans le domaine temporel (voir relation 1.35), la tension de sortie du filtre RC a pour expression :

$$\begin{aligned} v(t) &\approx RC \frac{d}{dt} [x_{FM}(t)] \\ &= -ARC [\omega_p + k_f m(t)] \sin \left[\omega_p t + k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right] \end{aligned}$$

Le signal de sortie du détecteur d'enveloppe est donc :

$$y(t) = ARC [\omega_p + k_f m(t)]$$

Il se compose d'un terme continu $ARC\omega_p$ auquel s'ajoute un terme proportionnel à $m(t)$.

3.21. On peut utiliser une ligne à retard pour obtenir une approximation de la dérivée d'un signal en effectuant le traitement :

$$x'(t) \approx \frac{x(t) - x(t - \tau)}{\tau} \tag{3.46}$$

Dessiner le bloc diagramme du circuit permettant d'effectuer ce traitement et donner l'ordre de grandeur de τ pour obtenir une bonne valeur approchée de la dérivée de $x(t)$.

La figure 3-12 représente un dispositif capable d'effectuer le traitement défini par la relation (3.46).

$$y(t) = \frac{1}{\tau} [x(t) - x(t - \tau)]$$

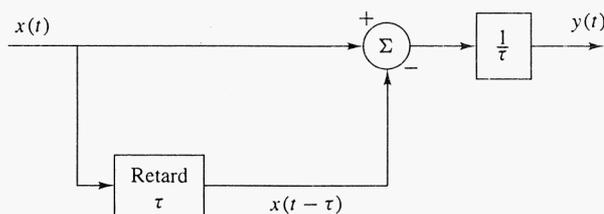


Fig. 3-12

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de la relation précédente, on obtient :

$$Y(\omega) = \frac{1}{\tau} \left[X(\omega) - e^{-j\omega\tau} X(\omega) \right] = \frac{1}{\tau} X(\omega) (1 - e^{-j\omega\tau})$$

Si $\omega\tau \ll 1$, alors $1 - e^{-j\omega\tau} \approx j\omega\tau$, ce qui permet d'écrire :

$$Y(\omega) \approx j\omega X(\omega)$$

ce qui montre que $y(t)$ est une approximation de la dérivée de $x(t)$ pourvu que τ vérifie la condition suivante :

$$\tau \ll \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_p + \Delta\omega}$$

3.22. On considère le signal FM suivant :

$$x_{\text{FM}}(t) = A \cos \left[\omega_p t + k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right]$$

Soit t_1 et t_2 ($t_2 > t_1$) les temps de deux passages à zéro successifs du signal $x_{\text{FM}}(t)$, comme l'illustre la figure 3-13. Montrer que si l'on a :

$$\int_{t_1}^{t_2} m(\lambda) d\lambda \approx m(t)(t_2 - t_1) \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

alors

$$k_f m(t) \approx \frac{\pi}{\Delta t} - \omega_p$$

où $\Delta t = t_2 - t_1$.

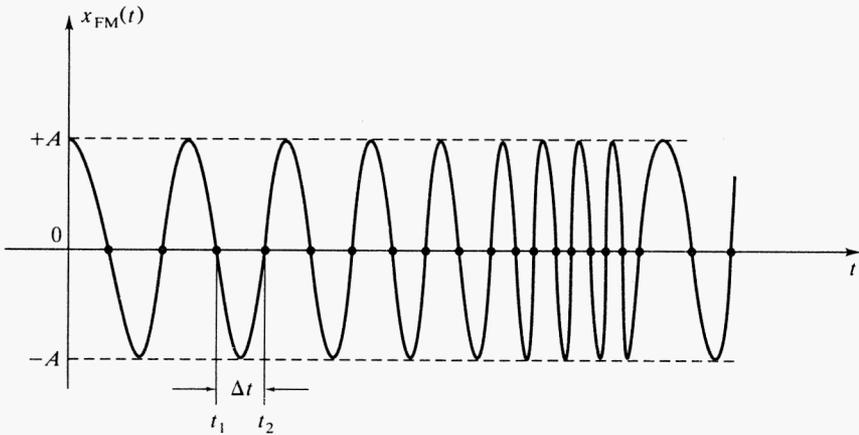


Fig. 3-13 Passages à zéro d'un signal FM

Posons

$$x_{\text{FM}}(t) = A \cos \theta(t)$$

où

$$\theta(t) = \omega_p t + k_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda$$

Soit t_1 et t_2 ($t_2 > t_1$) les instants de deux passages à zéro successifs du signal, c'est-à-dire :

$$x_{\text{FM}}(t_1) = x_{\text{FM}}(t_2) = 0$$

Alors

$$\theta(t_2) - \theta(t_1) = \pi = \omega_p(t_2 - t_1) + k_f \int_{t_1}^{t_2} m(\lambda) d\lambda$$

La largeur de bande du signal $m(t)$ est supposée être petite vis-à-vis de celle du signal modulé, donc $m(t)$ peut être considérée comme constante durant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ et l'on a la relation :

$$\left[\omega_p + k_f m(t) \right] (t_2 - t_1) = \pi$$

D'après la relation (3.12), on peut écrire :

$$\omega_i = \omega_p + k_f m(t) = \frac{\pi}{t_2 - t_1}$$

soit, en posant $\Delta t = t_2 - t_1$

$$k_f m(t) = \frac{\pi}{\Delta t} - \omega_p$$

3.23. Le résultat obtenu au problème 3.22 montre que $m(t)$ peut être restituée en comptant les passages à zéro du signal $x_{FM}(t)$. Soit N le nombre de passages à zéro pendant l'intervalle de temps T . Montrer que si T satisfait la condition

$$\frac{1}{f_p} < T \ll \frac{1}{f_M}$$

où f_M est la largeur de bande en hertz de $m(t)$ ($\omega_M = 2\pi f_M$), alors

$$km(t) \approx \frac{N}{2T} - f_p$$

Appelons t_1, t_2, t_3, \dots les instants de passage à zéro et notons $T_1 = t_2 - t_1, T_2 = t_3 - t_2 \dots$. Supposons que l'on ait enregistré N passages à zéro pendant le temps T tel que :

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_N$$

D'après les résultats du problème 3.22, on a :

$$k_f m(t) = \frac{\pi}{T_1} - \omega_p$$

soit

$$T_1 = \frac{\pi}{\omega_p + k_f m(t)}$$

Cela est valable pour T_2, T_3, \dots ; c'est-à-dire :

$$T_i = \frac{\pi}{\omega_p + k_f m(t)} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

ainsi :

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n = T = \frac{\pi N}{\omega_p + k_f m(t)}$$

D'où l'on tire que :

$$k_f m(t) = \frac{\pi N}{T} - \omega_p$$

soit

$$\frac{k_f}{2\pi} m(t) = km(t) = \frac{N}{2T} - f_p$$

La condition $1/f_p < T$ assure qu'il existe des passages à zéro pendant la durée T tandis que la condition $T \ll 1/f_m$ protège contre un lissage trop fort de $m(t)$.

Problèmes supplémentaires

3.24. Un signal modulé en argument a pour expression :

$$x_p(t) = 5 \cos \left[2\pi (10^6)t + 0,2 \cos 200\pi t \right]$$

S'agit-il d'un signal modulé en fréquence (FM) ou en phase (PM)?

Réponse : Il peut s'agir aussi bien d'un signal FM que d'un signal PM.

3.25. Un multiplicateur de fréquence est constitué d'un élément non linéaire associé à un filtre passe-bande, comme représenté sur la figure 3-14. On suppose que l'élément non linéaire élève au carré le signal qui lui est appliqué :

$$e_s(t) = ae_e^2(t)$$

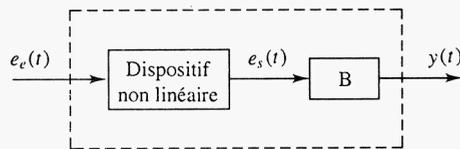


Fig. 3-14

Déterminer le signal de sortie $y(t)$ lorsque le signal d'entrée e_e a pour expression :

$$e_e(t) = A \cos(\omega_p t + \beta \sin \omega_m t)$$

Réponse : $y(t) = A' \cos(2\omega_p t + 2\beta \sin \omega_m t)$, avec $A' = 0,5aA^2$. Cela suggère que l'on peut utiliser ce dispositif comme doubleur de fréquence.

3.26. Reportons-nous à la figure 3-15 et supposons que le signal à 10,8 MHz a été obtenu par multiplication à partir d'un oscillateur fonctionnant à 200 KHz (facteur multiplicatif de 54). Cet oscillateur dérive de 0,1 Hz.

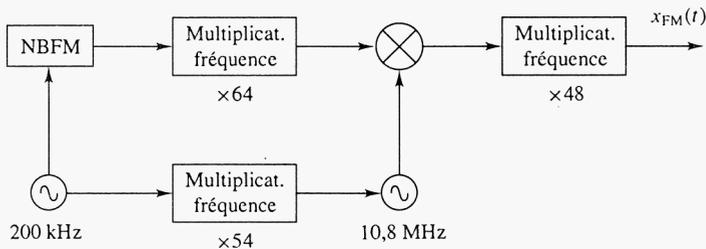


Fig. 3-15

- (a) Evaluer la dérive induite sur le signal de 10,8 MHz.
 (b) Evaluer la dérive induite sur la porteuse du signal FM modulé.

Réponse : (a) $\pm 5,4$ Hz, (b) ± 48 Hz

3.27. Un signal FM donné présente une excursion maximale de fréquence de 25 Hz, lorsque le signal modulant est une sinusoïde pure, d'amplitude unitaire et de fréquence 100 kHz. Quelle est la valeur du facteur multiplicatif n nécessaire pour obtenir une excursion de fréquence de 20 kHz lorsque le signal modulant est une sinusoïde pure d'amplitude unité et de fréquence 200 Hz.

Réponse : $n = 800$

- 3.28. La figure 3-16 représente un récepteur FM courant, qui couvre la gamme commerciale de 88 à 108 MHz. La fréquence intermédiaire est de 10,7 MHz. Le limiteur a pour rôle d'éliminer les variations d'amplitude éventuelles. Le récepteur est accordé sur la fréquence de 100 MHz.

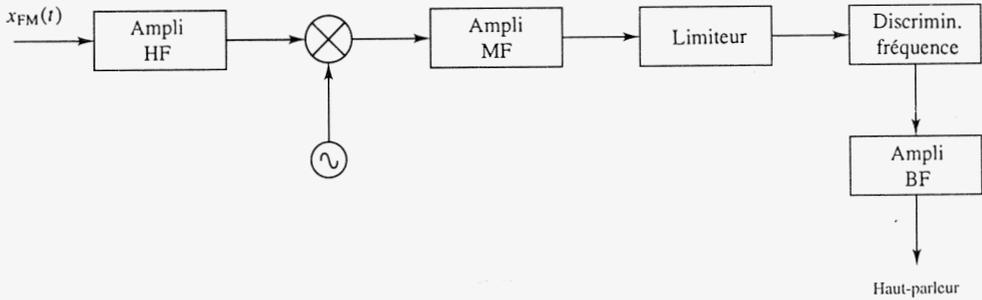


Fig. 3-16 Récepteur FM

- (a) Un signal audio (BF) à 10 kHz module la porteuse à 100 MHz, avec un index $\beta = 0,2$. Evaluer la bande passante nécessaire pour les circuits radiofréquence (RF), de fréquence intermédiaire (IF) et basse fréquence (BF).
- (b) Reprendre le problème avec $\beta = 5$.

Réponse : (a) Amplificateurs RF et IF : 24 kHz; amplificateur BF : 10 kHz.
 (b) Amplificateurs RF et IF : 120 kHz; amplificateur BF : 10 kHz.

Transmission numérique des signaux analogiques

4.1 INTRODUCTION

Les systèmes de transmission modernes se sont tournés depuis longtemps vers les techniques numériques. La mise en œuvre de réseaux de communication reposant sur le traitement de signaux échantillonnés et numérisés, présente des avantages considérables par rapport à l'exploitation des réseaux de type analogique. Citons, pour prendre quelques exemples, de meilleures performances, une plus grande souplesse et surtout une meilleure fiabilité.

Pour transmettre des signaux analogiques, tels que la parole ou les signaux vidéo, par des moyens numériques, il est nécessaire de convertir ces signaux sous forme numérique, ou « digitale », comme le disent les gens de métier. Ce processus est appelé *conversion analogique-digitale* (CAD) dont la réciproque est une *conversion digitale-analogique* (CDA). La technique utilisée est parfois appelée *modulation par impulsions numériques*. Les deux techniques de conversion analogique-numérique les plus importantes sont la *modulation par impulsions codées* (MIC, ou plus souvent PCM, en anglais, pour *pulse code modulation*) et la *modulation delta* (DM, en anglais, pour *delta modulation*).

4.2 MODULATION PAR IMPULSIONS CODÉES (PCM)

Les traitements essentiels qui interviennent en modulation PCM sont l'*échantillonnage*, la *quantification* et le *codage*, comme l'illustre la figure 4-1.

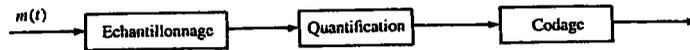


Fig. 4-1 Modulation par impulsions codées

L'*échantillonnage* consiste à prélever des échantillons d'un signal analogique à des instants discrets. La représentation de l'amplitude d'un signal au moyen d'un ensemble fini de niveaux est appelée *quantification*. La conversion de chacun de ces niveaux en une valeur numérique est appelée *codage*.

Alors que l'échantillonnage transforme un signal continu dans le temps en un signal à temps discrétisé, la quantification convertit la valeur réelle (au sens mathématique du terme) de l'échantillon prélevé sur le signal en une valeur numérique, sur 8, 16, voire 32 bits, suivant la précision désirée. L'échantillonnage et la quantification convertissent donc un signal analogique en signal numérique.

Les opérations de quantification et de codage sont généralement effectuées par un seul circuit, qui porte le nom de convertisseur analogique-digital (CAD). L'utilisation combinée de la quantification et du codage distinguent la technique PCM de la modulation par impulsions analogiques.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons étudier en détail les processus d'échantillonnage, de quantification et de codage.

4.3 THÉORÈME DE L'ÉCHANTILLONNAGE

La transmission numérique d'un signal analogique est possible en vertu du *théorème de l'échantillonnage*. L'échantillonnage d'un signal analogique se fait donc en appliquant ce théorème.

A. Signal à largeur de bande limitée

Le signal $m(t)$ est dit à bande limitée si sa transformée de Fourier est identiquement nulle au-delà d'une certaine pulsation ω_M :

$$m(t) \leftrightarrow M(\omega) = 0 \quad \text{pour } |\omega| > \omega_M = 2\pi f_M \quad (4.1)$$

B. Théorème de l'échantillonnage

Soit un signal $m(t)$ à valeurs réelles, à bande limitée, satisfaisant donc la condition (4.1); $m(t)$ peut alors être restitué intégralement à partir de ses valeurs $m(nT_{éch})$ échantillonnées à des intervalles de temps uniformes $T_{éch} [\leq 1/(2f_M)]$. La restitution de $m(t)$ s'opère au moyen de la relation mathématique suivante :

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{éch}) \frac{\sin \omega_M(t - nT_{éch})}{\omega_M(t - nT_{éch})} \tag{4.2}$$

On appelle $T_{éch}$ la *période d'échantillonnage* et son inverse $f_{éch} = 1/T_{éch}$ la *fréquence d'échantillonnage*.

Le théorème de l'échantillonnage établit donc qu'un signal à bande limitée dont le spectre de fréquence ne présente plus d'énergie au-delà de la fréquence f_M Hz peut être restitué en totalité au moyen de ses échantillons prélevés à la fréquence de $f_{éch} (\geq 2f_M)$ échantillons par seconde.

Ce théorème est souvent appelé *théorème de l'échantillonnage uniforme* pour les signaux en basse fréquence.

La fréquence minimale d'échantillonnage, $2f_M$ échantillons par seconde, est appelée fréquence de *Nyquist* ou de *Shannon*. La démonstration de ce théorème sera étudiée dans le problème 4.2.

Ce théorème s'applique en général à l'échantillonnage de tous les signaux basse fréquence. Nous verrons que pour certains signaux à bande limitée, on peut parfois utiliser des fréquences d'échantillonnage de valeur inférieure à la limite de Shannon (voir problème 4.7).

4.4 ÉCHANTILLONNAGE

A. Echantillonnage instantané

Supposons que l'on échantillonne un signal arbitraire $m(t)$ tel que représenté par la figure 4.2(a) en prélevant des valeurs instantanées à intervalles réguliers de période $T_{éch}$. On obtient une suite infinie d'échantillons $\{m(nT_{éch})\}$, où n prend successivement les valeurs 1,2, etc. Cette façon de procéder s'appelle échantillonnage instantané.

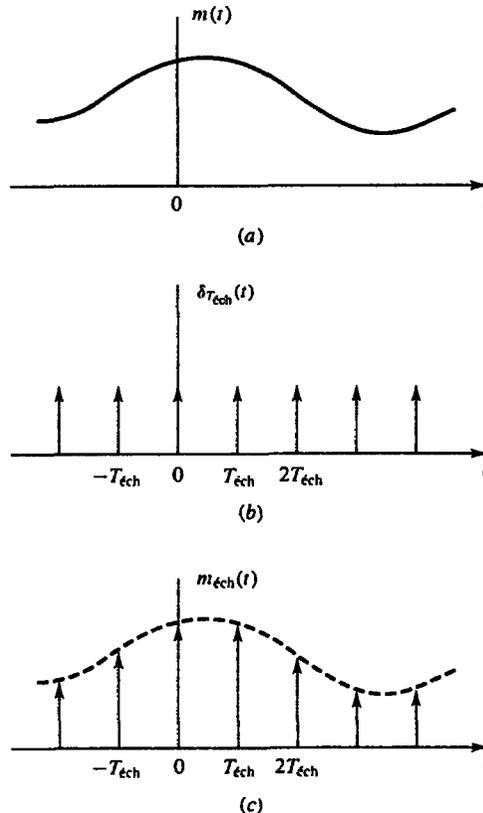


Fig. 4-2 Échantillonnage idéal d'un signal

B. Signal échantillonné idéal

Si l'on multiplie le signal $m(t)$ par un train d'impulsions $\delta_T(t)$, comme l'illustre la figure 4-2(b), selon la relation (1.105), on obtient :

$$m_{éch}(t) = m(t)\delta_{T_{éch}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{éch})\delta(t - nT_{éch}) \tag{4.3}$$

Le signal $m_{éch}(t)$, que représente la figure 4-2(c), est appelé *signal échantillonné idéal*.

C. Echantillonnage pratique

1. Échantillonnage naturel

Bien que l'échantillonnage instantané (au vol) semble être un modèle convenable, il est plus commode d'échantillonner un signal à bande limitée $m(t)$ au moyen de circuits de commutation à grande vitesse. C'est ce que représentent les figures 4-3(a), qui symbolise un échantillonneur sous la forme d'un commutateur tournant, et 4-3(b) qui donne l'allure du signal échantillonné obtenu.

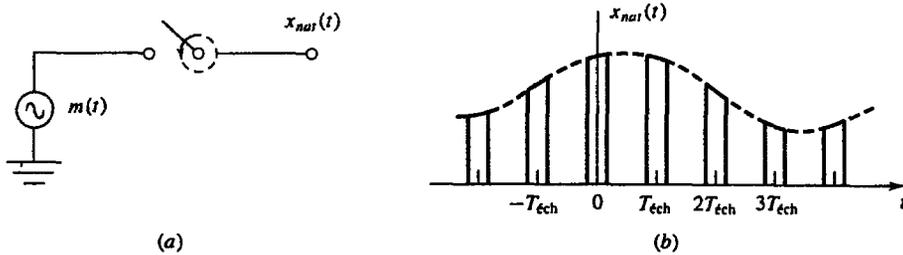


Fig. 4-3 Échantillonnage naturel

Le signal échantillonné $x_{nat}(t)$ a pour expression :

$$x_{nat}(t) = m(t)x_p(t) \tag{4.4}$$

où $x_p(t)$ est un train d'impulsions rectangulaires périodiques de période $T_{éch}$, chaque impulsion de $x_p(t)$ ayant une amplitude égale à 1 et une durée constante d .

Cet échantillonnage est dit *naturel* parce que le profil supérieur de chacune des impulsions de $x_{nat}(t)$ conserve la forme du signal analogique originel, pendant la durée d de l'impulsion d'échantillonnage. L'influence de la durée finie (et non pas infinitésimale) des impulsions d'échantillonnage sera analysée lors du problème 4.9.

2. Échantillonnage bloqué

Le dispositif d'échantillonnage le plus élémentaire et le plus commode est l'échantillonneur-bloqueur (*sample-and-hold*, en anglais) dont la figure 4-4(a) donne le principe.

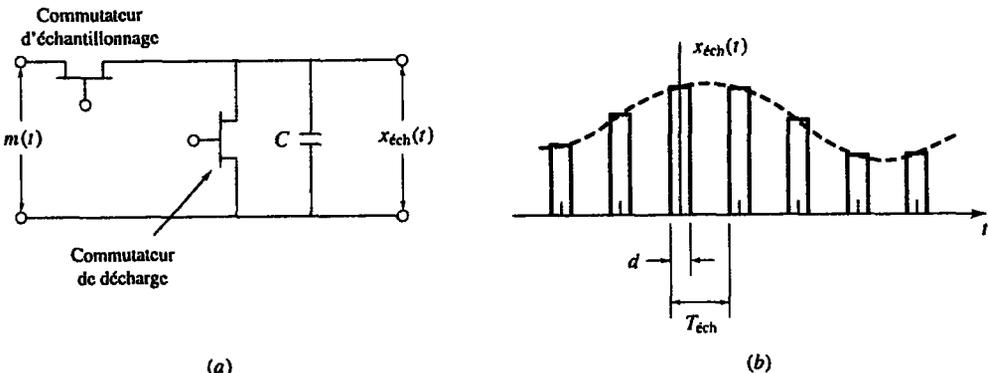


Fig. 4-4 Échantillonneur-bloqueur et signal obtenu

Ce circuit donne un signal $x_{éch}(t)$ formé d'échantillons qui conservent un niveau constant pendant l'intervalle d'échantillonnage, ce que représente la figure 4-4(b). L'effet de blocage du niveau échantillonné sera analysé dans le problème 4.11.

4.5 MODULATION D'IMPULSIONS EN AMPLITUDE (PAM)

Le signal $x_{éch}(t)$ représenté sur la figure 4-4(b) est en fait un signal dont les impulsions sont modulés en amplitude (PAM en anglais). La porteuse est un train d'impulsions rectangulaires périodiques dont l'amplitude suit le niveau du signal analogique à transmettre. La fréquence de la porteuse n'est autre que la fréquence d'échantillonnage du signal analogique.

Un signal PAM a donc pour expression :

$$x_{éch}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{éch})p(t - nT_{éch}) \tag{4.5}$$

où $p(t)$ est une impulsion rectangulaire de niveau 1 et de durée d , définie comme suit :

$$p(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{d}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.6}$$

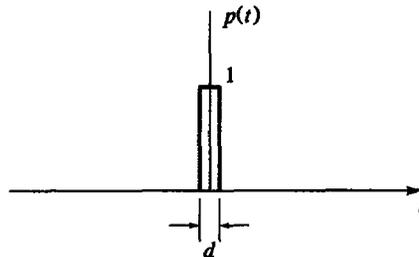


Fig. 4-5 Impulsion rectangulaire

On peut montrer (problème 4.10) que $x_{éch}(t)$ peut s'exprimer comme convolution de $m_{éch}(t)$, signal échantillonné *au vol* et de l'impulsion rectangulaire $p(t)$, soit :

$$x_{éch}(t) = m_{éch}(t) * p(t) \tag{4.7}$$

4.6 QUANTIFICATION

A. Quantification linéaire

La figure 4-6 illustre le processus de quantification. On suppose que l'amplitude du signal $m(t)$ demeure comprise entre les limites $(-m_p, m_p)$.

Cet intervalle est divisé, comme le montre la figure 4-6(a), en L domaines de taille Δ , telle que :

$$\Delta = \frac{2m_p}{L} \tag{4.8}$$

Une amplitude dont la valeur appartient à un intervalle donné se voit attribuer la valeur du point milieu de cet intervalle.

La figure 4-6(b) représente un exemple de fonction de quantification linéaire.

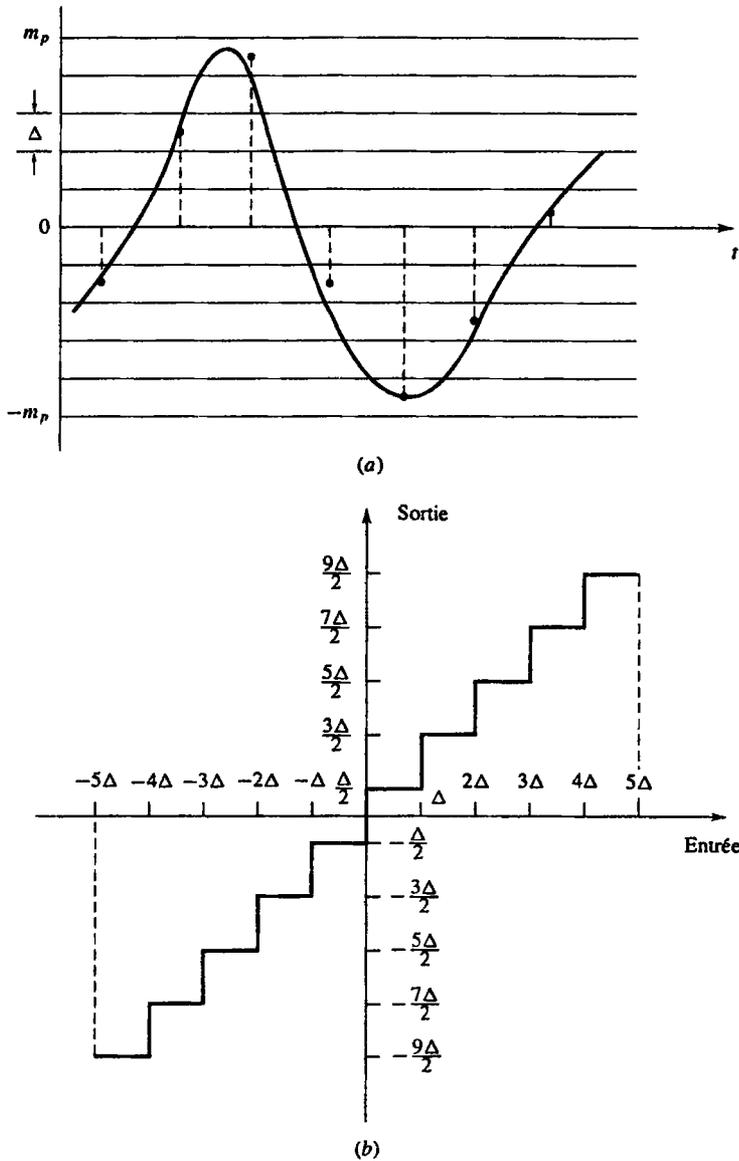


Fig. 4-6 Quantification linéaire

B. Bruit de quantification

La différence qui existe entre le signal original et le signal quantifié est appelée *erreur* ou *bruit de quantification*.

Il est clair, pour un signal incident quelconque, que l'erreur de quantification ε_q varie de façon aléatoire à l'intérieur de l'intervalle

$$-\frac{\Delta}{2} \leq \varepsilon_q \leq \frac{\Delta}{2} \quad (4.9)$$

En supposant que cette erreur est uniformément répartie dans cet intervalle, l'erreur quadratique moyenne $\langle \varepsilon_q^2 \rangle$ a pour expression (voir aussi le chapitre 5) :

$$\langle \varepsilon_q^2 \rangle = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varepsilon_q^2 d\varepsilon_q = \frac{\Delta^2}{12} \quad (4.10)$$

En reportant l'égalité (4.8) dans la relation (4.10), on obtient :

$$\langle \varepsilon_q^2 \rangle = \frac{m_p^2}{3L^2} \quad (4.11)$$

C. Quantification non linéaire et compression-expansion

Dans de nombreux cas de traitement de signal, la quantification linéaire ne convient pas. C'est ainsi qu'en téléphonie, on sait que le signal conserve un niveau relativement constant avec peu d'extrémums. Une quantification linéaire serait donc inadaptée au codage de la parole, car la plupart des niveaux élevés resteraient pratiquement inutilisés. Il est préférable d'employer un système plus efficace, non linéaire, où le nombre de niveaux de quantification est plus important pour les valeurs faibles que pour les fortes amplitudes du signal, comme le montre la figure 4-7.

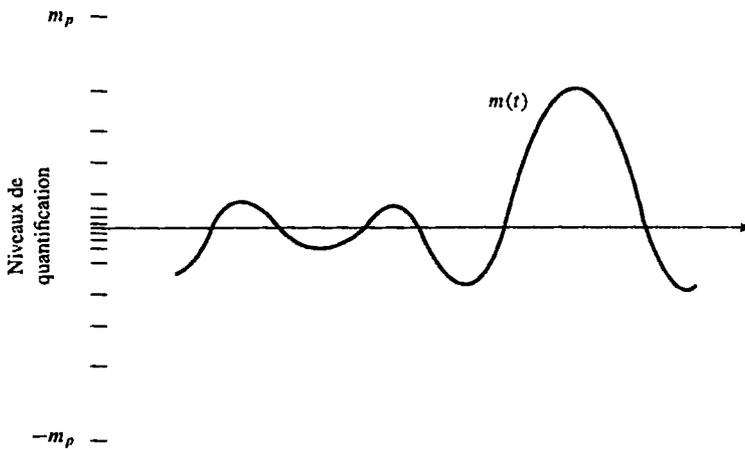


Fig. 4-7 Quantification non linéaire

On peut parvenir au même résultat en comprimant la dynamique du signal à quantifier puis en le quantifiant au moyen d'un convertisseur linéaire. La figure 4-8 représente la caractéristique entrée-sortie d'un compresseur de dynamique. On mesure sur l'axe horizontal l'amplitude du signal d'entrée normalisé (soit m/m_p) et sur l'axe vertical l'amplitude du signal comprimé. Le compresseur fournit de grands incréments Δy pour quantifier les incréments Δm des faibles niveaux du signal qui lui est fourni et de faibles incréments pour en quantifier les forts niveaux. En appliquant alors le signal comprimé à un convertisseur linéaire, on aboutit à ce qu'un intervalle donné Δm recouvre un nombre d'autant plus élevé de pas de quantification que m est faible.

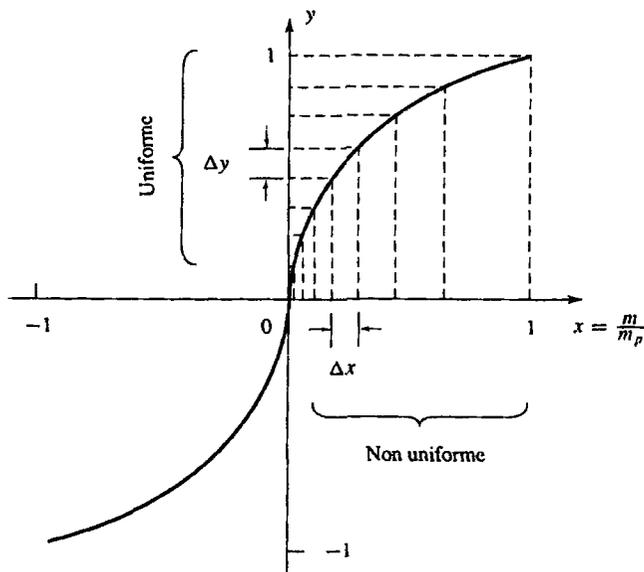


Fig. 4-8 Caractéristiques d'un compresseur

Les fonctions de compression utilisées font souvent l'objet de normes. C'est ainsi qu'on emploie au Japon et aux Etats-Unis la loi μ , dont l'expression est la suivante :

$$y = \frac{\ln(1 + \mu|m/m_p|)}{\ln(1 + \mu)} \operatorname{sgn}(m) \quad \left| \frac{m}{m_p} \right| \leq 1 \quad (4.12)$$

où μ est une constante positive et

$$\operatorname{sgn}(m) = \begin{cases} +1 & m > 0 \\ -1 & m < 0 \end{cases}$$

Les Européens lui préfèrent la loi A , qui a pour expression :

$$y = \begin{cases} \frac{A}{1 + \ln A} \left(\frac{m}{m_p} \right) & \left| \frac{m}{m_p} \right| \leq \frac{1}{A} \\ \frac{(1 + \ln A|m/m_p|)}{1 + \ln A} \operatorname{sgn}(m) & \frac{1}{A} \leq \left| \frac{m}{m_p} \right| \leq 1 \end{cases} \quad (4.13)$$

En ce qui concerne la loi μ , la valeur $\mu = 255$ est utilisée sur les réseaux numériques de téléphonie américaine, tandis que pour la loi A , les Européens attribuent la valeur 87,6 au paramètre A . Ces valeurs ont été retenues afin d'obtenir un rapport signal à bruit de quantification à peu près constant sur une dynamique de puissance du signal d'entrée de 40 décibels (dB).

Pour restituer sur le récepteur les échantillons du signal transmis avec leurs niveaux relatifs corrects, on fait appel à un *expandeur* dont la caractéristique est l'inverse de celle du compresseur. L'ensemble compresseur-expandeur est parfois désigné sous son expression anglo-saxonne de *compander*.

4.7 CODAGE

La modulation par impulsions codées (PCM) fait appel à un codeur. Il s'agit d'un dispositif qui code les échantillons quantifiés en leur attribuant une valeur binaire. La suite de valeurs binaires obtenues est elle-même transformée en une chaîne d'impulsions séquentielles avant d'être transmise (voir paragraphe 4.10). Dans ce cas, on parle de système *PCM binaire*. La figure 4-9 illustre les principes de cette technique. Supposons qu'un

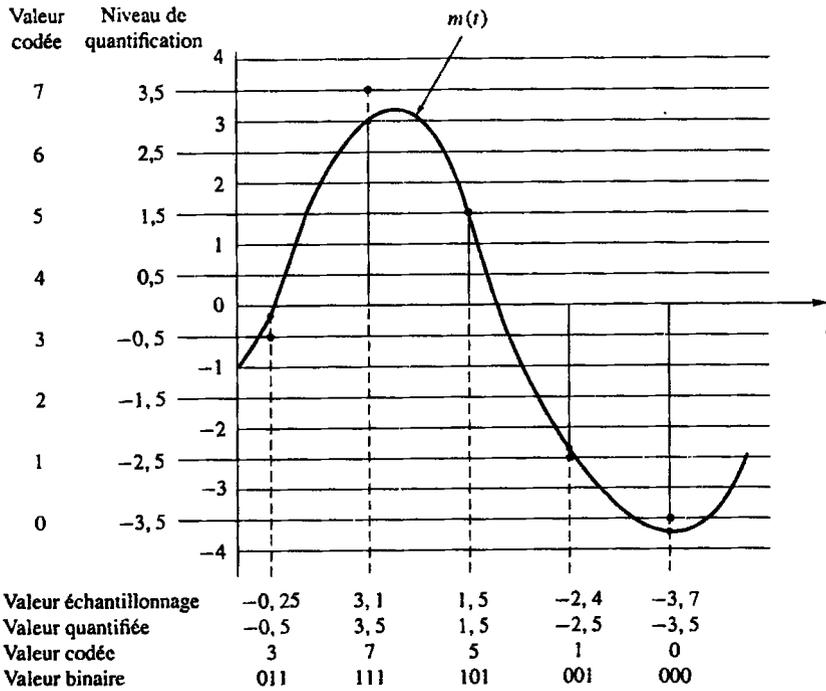


Fig. 4-9 PCM

signal analogique $m(t)$ reste limité en amplitude dans l'intervalle allant de -4 volts à $+4$ volts (V). La taille de l'incrément Δ est fixée à 1 V. On emploie ainsi huit niveaux de quantification, situés aux valeurs $-3,5, -2,5, \dots, +3,5$ V. On assigne le code 0 au niveau $-3,5$ V, le code 1 au niveau $-2,5$ V et ainsi de suite, jusqu'à 7 pour le niveau $+3,5$ V. Chacun de ces codes a sa propre représentation binaire, ce qui donne 000 pour le code 0 , 001 pour le code 1 , jusqu'à 111 pour le code 7 . On attribue ainsi à chacun des niveaux du signal $m(t)$ un niveau de quantification le plus proche de sa valeur réelle.

4.8 LARGEUR DE BANDE DE LA MODULATION PCM

Supposons que l'on utilise dans un système PCM L niveaux de quantification, L étant une puissance de 2 :

$$L = 2^n \quad n = \log_2 L \tag{4.14}$$

où, bien sûr, n est un nombre entier. Dans ce cas, on doit transmettre $n = \log_2 L$ impulsions binaires pour chaque échantillon de signal. Si la largeur de bande du signal utile à transmettre est f_m et si la fréquence d'échantillonnage est $f_{éch} (\geq 2f_m)$, il faut alors transmettre $nf_{éch}$ impulsions binaires par seconde.

En supposant que le signal PCM est un signal à bande passante limitée à la fréquence supérieure f_{PCM} , la fréquence d'échantillonnage minimale requise est $2f_{PCM}$. On peut donc écrire :

$$2f_{PCM} = nf_{éch}$$

soit encore :

$$f_{PCM} = \frac{n}{2} f_{éch} \geq nf_m \text{ Hz} \tag{4.15}$$

La relation (4.15) montre que la bande passante minimale requise pour la PCM est proportionnelle à la largeur de bande du signal ainsi qu'au nombre de bits par niveau du signal. On notera aussi que cette largeur de bande dépend du codage adopté pour représenter ces niveaux.

4.9 MODULATION DELTA

Il existe une technique plus simple qui permet de convertir directement un signal analogique en une chaîne de bits (rappelons que *bit* est une contraction de *binary digit*, coïncidant avec le mot anglais *bit* qui veut simplement dire *morceau*). La mise en œuvre de cette technique requiert peu de composants; il s'agit de la *modulation delta*.

A. Modulation delta (DM)

La figure 4-10(a) représente un modulateur delta de caractère élémentaire. On fournit au comparateur le signal

$$e(t) = m(t) - \tilde{m}(t) \quad (4.16)$$

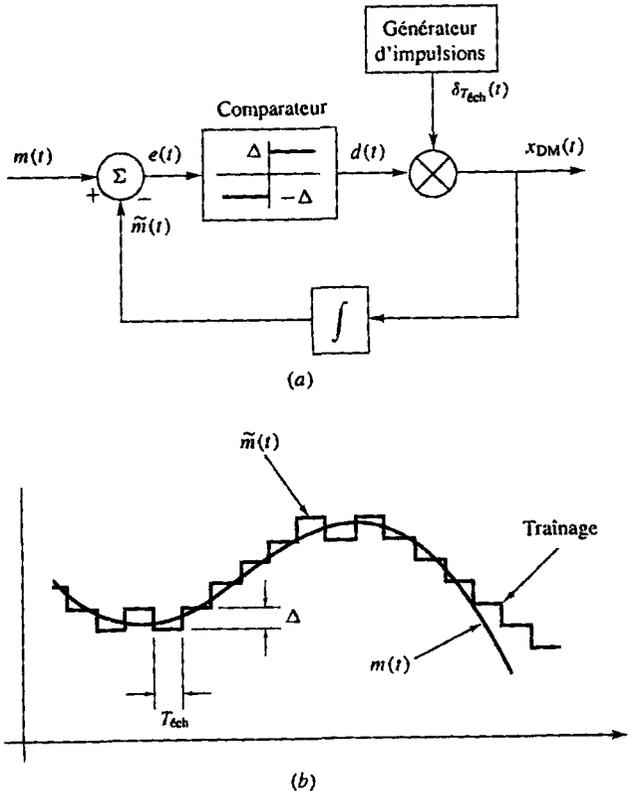


Fig. 4-10 Modulation delta

où $m(t)$ est le signal utile à transmettre et $\tilde{m}(t)$ est un signal suiveur de référence, constitué de marches de niveaux. La sortie du comparateur a pour expression :

$$d(t) = \Delta \operatorname{sgn}[e(t)] = \begin{cases} \Delta & e(t) > 0 \\ -\Delta & e(t) < 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Le signal fourni par le modulateur delta a donc pour expression :

$$\begin{aligned} x_{DM}(t) &= \Delta \operatorname{sgn}[e(t)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{éch}) \\ &= \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}[e(nT_{éch})] \delta(t - nT_{éch}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Le signal de sortie de ce modulateur est donc constitué d'une suite d'impulsions de polarité positive ou négative, suivant le signe de $e(t)$ à l'instant où l'on échantillonne $m(t)$. En intégrant $x_{DM}(t)$, on obtient :

$$\tilde{m}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta \text{sgn}[e(nT_{\text{éch}})] \quad (4.19)$$

qui est une approximation par échelons du signal $m(t)$, comme le montre la figure 4-10(b).

B Démodulation

On démodule un signal DM en intégrant $x_{\text{DM}}(t)$ pour restituer l'approximation $\tilde{m}(t)$ du signal originel $m(t)$ puis en filtrant ce signal restitué dans un filtre passe-bas afin de le lisser, c'est-à-dire d'en éliminer les marches d'escalier.

Il est nécessaire d'utiliser des marches de faible hauteur pour reproduire le signal originel avec une précision suffisante, ce qui a pour conséquence d'imposer une fréquence d'échantillonnage suffisamment élevée pour éviter le traînage du modulateur par rapport aux variations rapides du signal, ce qu'illustre la figure 4-10(b). Le modulateur, en effet, ne bouge que d'un incrément Δ à chaque période d'échantillonnage. Pour éviter cette situation fâcheuse, il suffit de respecter la condition :

$$\frac{\Delta}{T_{\text{éch}}} > \left| \frac{dm(t)}{dt} \right|_{\text{max}} \quad (4.20)$$

C. Erreur de quantification

On suppose que cette erreur est uniformément répartie dans l'intervalle $(-\Delta, \Delta)$, ce qui permet d'estimer l'erreur moyenne quadratique de quantification en modulation delta :

$$\langle \varepsilon_q^2 \rangle = \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} \varepsilon_q^2 d\varepsilon_q = \frac{\Delta^2}{3} \quad (4.21)$$

D. Modulation delta adaptative

La modulation delta de type rudimentaire que nous venons d'étudier présente un inconvénient majeur : la dynamique admissible pour le signal $m(t)$ est trop faible en raison des effets de seuil et de traînage de la quantification. On peut surmonter ce problème en réalisant un modulateur delta adaptatif. Dans un tel système, la hauteur de la marche Δ varie en fonction du niveau du signal d'entrée. La figure 4-10(b) montre le traînage qui se produit lorsque le signal $m(t)$ chute rapidement. Si l'on accroît l'amplitude de la marche de quantification, on peut éviter le traînage. D'autre part, si la pente du signal $m(t)$ est faible, une réduction d'amplitude de la marche Δ entraînera une réduction du seuil et du bruit de quantification.

L'utilisation d'un modulateur delta adaptatif impose, côté réception, l'emploi d'un démodulateur adaptatif qui reproduise les évolutions de Δ au niveau du modulateur.

4.10 FORMATAGE DES SIGNAUX

Les signaux numériques (suites de bits) peuvent être transmis sous des formes très diverses de signaux impulsionnels, appelées parfois *codes de ligne*. La figure 4-11 représente plusieurs formats de transmission de la suite de bits 10110001.

(A) Code unipolaire avec non-retour à zéro (NRZ)

Un bit 1 est transmis comme une impulsion dont le niveau a une amplitude constante pendant la durée du bit, tandis qu'un bit 0 ne donne lieu à la transmission d'aucune impulsion. La notion de non-retour à zéro (NRZ) signifie que lorsque l'on transmet deux bits 1 consécutifs, on ne revient pas à zéro entre les deux bits en question.

(B) Code bipolaire avec non-retour à zéro (NRZ)

Les bits 1 et 0 sont représentés par des impulsions d'amplitudes respectivement positives et négatives de même valeur absolue. Il n'y a pas de retour à zéro entre deux bits consécutifs de même valeur.

(C) Code unipolaire avec retour à zéro

Un bit 1 est représenté par une impulsion positive qui retourne à zéro avant la fin de la durée du bit, tandis qu'un bit 0 est représenté par l'absence de toute impulsion.

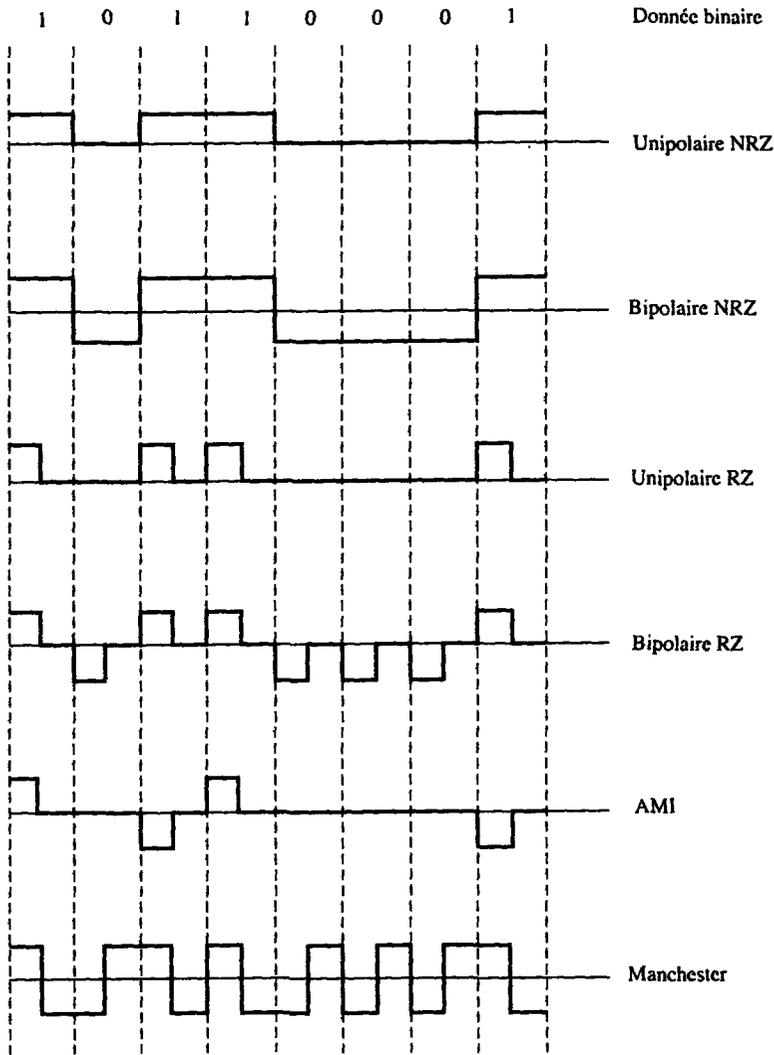


Fig. 4-11 Formats de transmission numérique binaire

(D) Code bipolaire avec retour à zéro (RZ)

On utilise des impulsions positives et négatives de même valeur absolue pour représenter les bits 1 et 0. Chaque impulsion retourne à zéro avant la fin de la durée du bit.

(E) Code à inversion alternée avec retour à zéro (AMI RZ)

On utilise des impulsions alternativement positive et négative pour une suite de bits à 1, avec retour à zéro avant la fin de bit. Aucune impulsion n'est transmise pour un bit à 0.

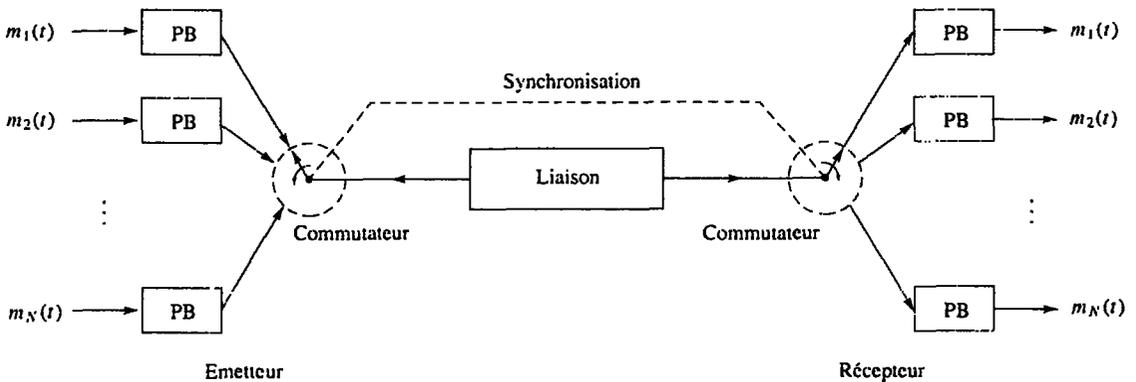
(F) Code biphasé (Manchester)

On transmet une impulsion positive suivie d'une impulsion négative pour représenter un bit à 1 et une impulsion négative suivie d'une impulsion positive pour un bit à 0. Ces impulsions ont des amplitudes de même valeur absolue et des durées d'un demi-bit.

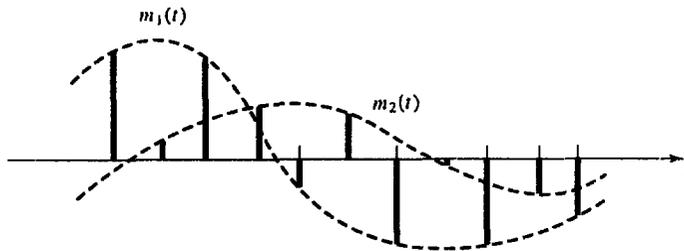
On trouve dans la littérature technique une grande diversité de systèmes de codage, cela en raison des caractéristiques très variables des canaux de transmission exploités en télécommunication. C'est ainsi qu'une liaison prévue pour transmettre des signaux alternatifs ne devra pas être exploitée avec un codage comportant une composante continue non négligeable. Les paramètres importants à prendre en compte lors du choix d'un codage sont l'encombrement spectral, l'immunité au bruit, la facilité de synchronisation, le coût et la complexité de mise en œuvre. D'autres facteurs peuvent aussi intervenir dans ce choix, comme la confidentialité, la tolérance aux erreurs de transmission, la faculté d'auto-correction, etc.

4.11 MULTIPLEXAGE TEMPOREL

Le multiplexage temporel (TDM pour *time division multiplexing*) est l'application la plus systématiquement utilisée en télécommunication. On fait appel à la TDM pour transmettre simultanément plusieurs signaux sur un même canal de transmission. La figure 4-12(a) illustre le fonctionnement de la TDM. On réduit tout d'abord la largeur de bande de chacun des messages à transmettre au moyen d'un filtre passe-bas, afin d'éliminer les fréquences qui ne sont pas essentiellement nécessaires à une bonne restitution du signal. Les signaux filtrés sont appliqués à un commutateur électronique qui échantillonne à tour de rôle chacun d'entre eux à une fréquence supérieure ou égale à la fréquence de Nyquist. On utilise généralement une fréquence d'échantillonnage égale à 1,1 fois la limite de Nyquist, pour éviter les problèmes de recouvrement de spectre (*aliasing*) lors de la conversion digitale-analogique qui sert à restituer les messages (voir problème 4.2). Les échantillons sont donc transmis sur le canal en série, entrelacés, pour être triés et réattribués à leur message d'origine à l'arrivée. Sur la ligne transite donc un signal composite consistant en une succession d'impulsions d'amplitudes diverses. La figure 4-12(b) représente le signal résultant de l'entrelacement de deux signaux à modulation d'impulsion en amplitude (PAM). En réception, le signal composite est démultiplexé au moyen d'un second commutateur électronique qui distribue les signaux échantillonnés à leurs filtres passe-bas respectifs avant démodulation. Le bon fonctionnement du système repose sur la synchronisation parfaite des deux commutateurs.



(a) Commutation en multiplex temporel



(b) Multiplexage temporel de 2 signaux

Fig. 4-12 Multiplexage temporel

Si tous les messages transmis présentent la même largeur de bande, les échantillons sont transmis séquentiellement comme le montre la figure 4-12(a). Si les bandes passantes sont différentes, il faut transmettre plus d'échantillons par unité de temps pour les signaux dont la bande est la plus large. Cela demeure simple si les bandes passantes des divers signaux sont en relation harmonique (voir problème 4.31).

La figure 4-12 illustre le cas d'une exploitation en TDM de signaux PAM; il en est de même pour d'autres formats d'impulsion. La TDM est couramment utilisée en téléphonie, en télémétrie, en radiodiffusion et en traitement de données. Le système T1 de Bell, par exemple, effectue le multiplexage temporel de 24 signaux PCM sur une ligne téléphonique.

Dans ce domaine, la TDM et la FDM (*frequency division multiplexing*, multiplexage en fréquence) sont largement utilisés pour faire transiter des centaines de communications téléphoniques sur un même faisceau hertzien.

4.12 BANDE PASSANTE REQUISE POUR LE MULTIPLEX TEMPOREL

Nous appellerons T l'intervalle de temps qui sépare deux échantillons consécutifs d'un signal «multiplexé», tel que représenté sur la figure 4-12(b). Si tous les signaux d'entrée ont la même largeur de bande f_m et sont échantillonnés de façon identique, on peut écrire que $T = T_{éch}/n$, n étant le nombre de signaux et $T_{éch}$ la période d'échantillonnage de chacun des signaux, avec $T_{éch} = 1/f_{éch} \leq 1/(2f_m)$. En supposant que le signal «multiplexé» obtenu est un signal à bande limitée de fréquence maximale f_{TDM} , la fréquence minimale d'échantillonnage admissible est donc $2f_{TDM}$.

Ainsi :

$$f_{TDM} = \frac{1}{2T} = \frac{n}{2T_{éch}} = \frac{1}{2}nf_{éch} \geq nf_m \quad \text{Hz} \quad (4.22)$$

La relation (4.22) indique que la bande passante minimale requise pour travailler en TDM est proportionnelle à la bande passante des signaux et au nombre de signaux à multiplexer.

4.13 FORMES D'IMPULSION ET DIAPHONIE

A. Confusion intersymbole

Dans cette brève introduction aux transmissions numériques, nous avons utilisé des impulsions rectangulaires et supposé que les canaux de transmission étaient linéaires et exempts de distorsion. En réalité, la bande passante d'un canal de transmission est toujours limitée, ce qui induit un étalement dans le temps des impulsions acheminées par ce canal. Ce défaut entraîne un recouvrement entre impulsions correspondant à des périodes d'échantillonnage adjacentes, comme le montre la figure 4-13. Il peut en résulter une ambiguïté de réception puisqu'on ne sait quelle valeur attribuer à l'échantillon parasite transmis par le canal. Ce phénomène de recouvrement est appelé confusion intersymbole (*intersymbol interference*, ISI, en anglais), il provoque une diaphonie sur les liaisons multiplex.

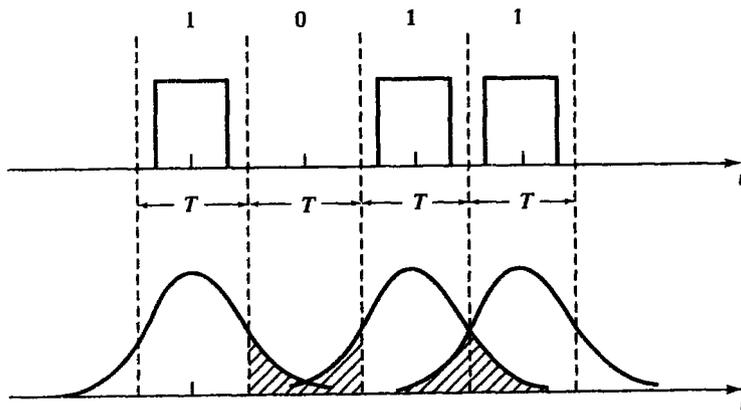


Fig. 4-13 Confusion intersymbole en transmission numérique

B. Mise en forme des impulsions

Il existe un moyen de combattre ce type de diaphonie, au prix d'une mise en forme adéquate des impulsions transitant sur le canal de transmission. Une forme d'impulsion susceptible d'éliminer toute diaphonie a pour

expression [figure 4-14(a)] :

$$h(t) = \frac{1}{T_{éch}} \frac{\sin(\pi t / T_{éch})}{\pi t / T_{éch}} \tag{4.23}$$

La figure 4-14(a) donne la forme de cette impulsion.

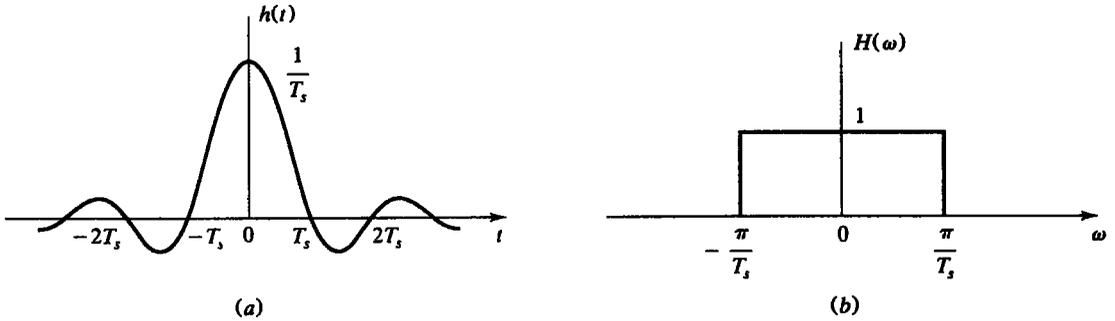


Fig. 4-14 Forme d'impulsion anti ISI

Il s'agit tout simplement de la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas dont la figure 4-14(b) représente la fonction de transfert.

On aura remarqué que $h(t)$ passe à zéro à des instants qui sont des multiples de $T_{éch}$, sauf en son maximum. Si donc $T_{éch} = 1/(2f_B)$ (période de Nyquist), il est clair que des impulsions consécutives de même forme, espacées dans le temps de $T_{éch}$, ou d'un multiple de $T_{éch}$, ne présenteront pas de recouvrement, comme le montre la figure 4-15.

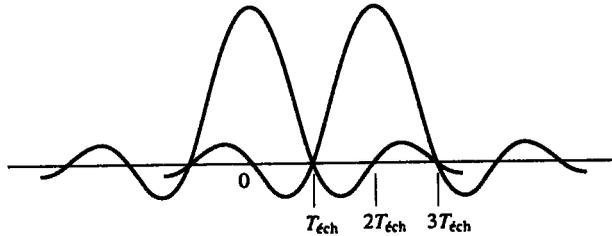


Fig. 4-15 Impulsions anti-diaphonie

Cette fonction de transfert présente cependant quelques difficultés. Un filtre passe-bas idéal n'est pas causal, il est donc physiquement irréalisable. Ensuite, l'efficacité de cette forme d'impulsion dépend de façon critique de la précision temporelle du circuit sur lequel elle transite.

C. Filtre cosinus raidi

Il existe une catégorie de filtres dont la réponse impulsionnelle présente des zéros uniformément répartis dans le temps (sauf en son maximum) et dont la réponse en fréquence décroît graduellement vers zéro, au lieu de chuter verticalement; il s'agit du filtre cosinus à pente raidie, dont la fonction de transfert s'exprime de la façon suivante :

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\omega| \leq (1 - \alpha)W \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sin \left[\frac{\pi}{2\alpha W} (|\omega| - W) \right] \right\} & (1 - \alpha)W \leq |\omega| \leq (1 + \alpha)W \\ 0 & |\omega| > (1 + \alpha)W \end{cases} \tag{4.24}$$

où $W = \pi T_{éch}$. La réponse impulsionnelle correspondante a pour expression :

$$h(t) = \frac{1}{T_{éch}} \left(\frac{\sin Wt}{Wt} \right) \left[\frac{\cos \alpha Wt}{1 - (2\alpha Wt/\pi)^2} \right] \tag{4.25}$$

On remarque que le second terme du membre de droite de la relation (4.25) est de la forme $(\sin x)/x$, fonction que nous avons déjà vue pour le passe-bas idéal. Cette réponse impulsionnelle en possède les zéros.

La figure 4-16 représente $H(\omega)$ et $h(t)$ pour trois valeurs de α . Le paramètre α est appelé *pente* du filtre.

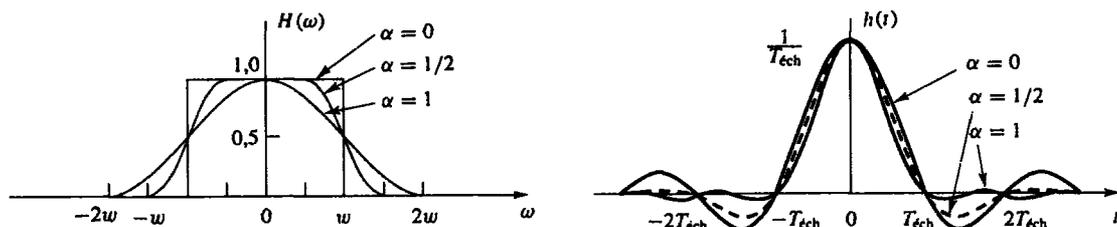


Fig. 4-16 Filtre cosinus raidi, spectre et réponse temporelle

Le cas $\alpha = 0$ correspond au passe-bas idéal tandis que le cas $\alpha = 1$ correspond au filtre à *atténuation en cosinus*. Sa fonction de transfert a pour expression :

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi \omega}{2W} \right) & |\omega| \leq 2W \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (4.26)$$

La figure 4-16 montre que la largeur de bande occupée par une impulsion dérivée de la fonction de transfert du type cosinus raidi varie entre un minimum de $f_B = 1/(2T_{\text{éch}})$, pour $\alpha = 0$ et un maximum de $f_B = 1/T_{\text{éch}}$ lorsque $\alpha = 1$.

Le compromis entre largeur de bande et fréquence de répétition des impulsions dérivées du cosinus raidi dépend bien sûr de la valeur de α . Si l'on a besoin d'une fréquence de transmission de $1/T$ impulsions par seconde, la bande passante requise pour la liaison est donnée par :

$$f_B = \frac{1 + \alpha}{2T} \quad \text{Hz} \quad (4.27)$$

Si, en revanche, f_B est fixée, la fréquence maximale de transmission des impulsions autorisable sur la liaison a pour expression :

$$\frac{1}{T} = \frac{2f_B}{1 + \alpha} \quad (4.28)$$

4.14 SYSTÈMES DE MODULATION NUMÉRIQUE

La puissance des signaux numériques basse fréquence peut être dimensionnée sans difficulté de façon à pouvoir les transmettre directement sur une liaison bifilaire ou coaxiale. Ils ne peuvent être transmis en l'état par voie hertzienne, technique qui nécessite l'utilisation d'une porteuse dont le rayonnement soit exploitable. Nous allons donc étudier les divers moyens de modulation numérique d'une porteuse haute fréquence (CW, *continuous wave*) permettant d'atteindre cet objectif.

Les systèmes de modulation binaires ont tous pour principe de modifier de façon discontinue l'amplitude, la fréquence ou la phase de la porteuse, qui peuvent ainsi prendre l'une ou l'autre des deux valeurs représentatives des digits 0 et 1. On distingue trois types de modulation : la *modulation par commutation d'amplitude* (ASK, *amplitude-shift keying*), la *modulation par commutation de fréquence* (FSK, *frequency-shift keying*) et la *modulation par commutation de phase* (PSK, *phase-shift keying*).

A. Modulation par commutation d'amplitude (ASK)

En ASK, le signal modulé a pour expression :

$$x_p(t) = \begin{cases} A \cos \omega_p t & \text{bit 1} \\ 0 & \text{bit 0} \end{cases} \quad (4.29)$$

Il s'agit d'une modulation par tout ou rien, parfois appelée OOK (*on-off keying*) par les Anglo-saxons.

B. Modulation par commutation de fréquence (FSK)

En FSK, le signal modulé a pour expression :

$$x_p(t) = \begin{cases} A \cos \omega_1 t & \text{bit 1} \\ A \cos \omega_2 t & \text{bit 0} \end{cases} \quad (4.30)$$

C. Modulation par commutation de phase (PSK)

En PSK, le signal modulé a pour expression :

$$x_p(t) = \begin{cases} A \cos \omega_p t & \text{bit 1} \\ A \cos (\omega_p t + \pi) & \text{bit 0} \end{cases} \quad (4.31)$$

La figure 4-17 illustre ces trois méthodes de modulation dans le cas où les bits sont codés en bipolaire NRZ. Les performances respectives de ces trois systèmes sur liaison bruitée seront analysées lors du chapitre 7.

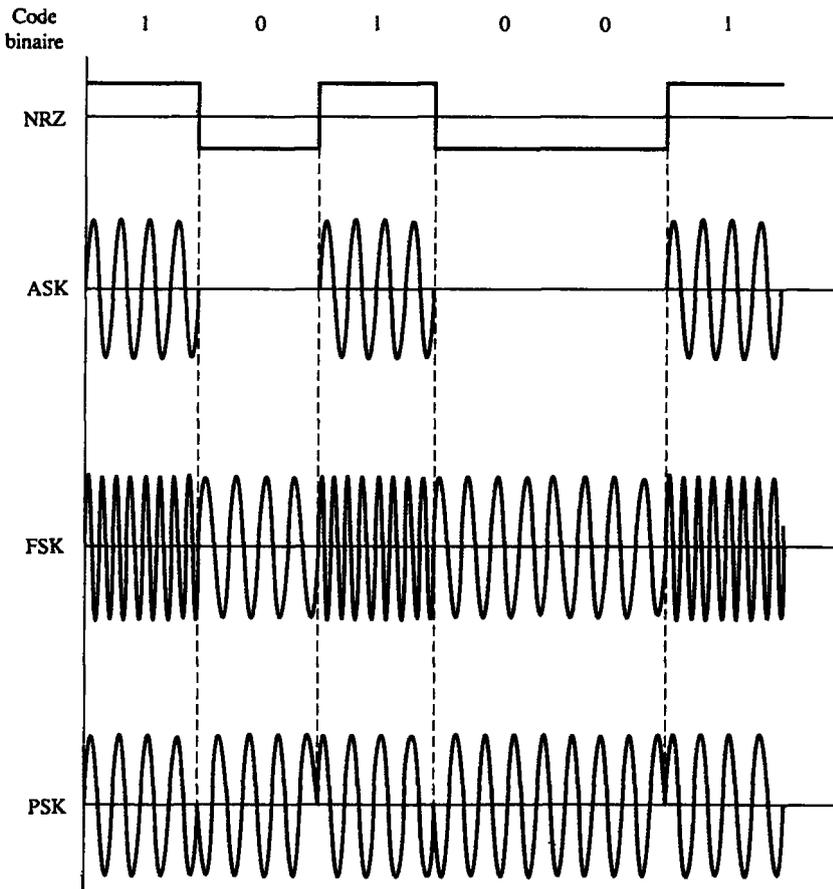


Fig. 4-17 Modulation numérique d'une porteuse

Problèmes résolus

ÉCHANTILLONNAGE ET THÉORÈME DE SHANNON

4.1. Démontrer la relation (4.3), c'est-à-dire :

$$m_{\text{éch}}(t) = m(t)\delta_{T_{\text{éch}}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{\text{éch}})\delta(t - nT_{\text{éch}})$$

D'après les relations (1.106) et (1.12), on peut écrire que

$$\begin{aligned} m_{\text{éch}}(t) &= m(t)\delta_{T_{\text{éch}}}(t) = m(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{\text{éch}}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(t)\delta(t - nT_{\text{éch}}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{\text{éch}})\delta(t - nT_{\text{éch}}) \end{aligned}$$

4.2. Démontrer le théorème de l'échantillonnage (4.2).

Soit $m(t)$ un signal limité en bande tel que défini par la relation (4.1) et représenté par la figure 4-18(a) et (b). D'après la relation (1.125) et le problème 1.22, on peut écrire, ce qu'illustre la figure 4-18 (c) et (d) :

$$\mathcal{F}[\delta_{T_{\text{éch}}}(t)] = \omega_{\text{éch}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_{\text{éch}}) \quad \omega_{\text{éch}} = \frac{2\pi}{T_{\text{éch}}}$$

En appliquant le théorème de la convolution en fréquence (1.54), on obtient :

$$\begin{aligned} M_{\text{éch}}(\omega) &= \mathcal{F}[m(t)\delta_{T_{\text{éch}}}(t)] = \frac{1}{2\pi} \left[M(\omega) * \omega_{\text{éch}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_{\text{éch}}) \right] \\ &= \frac{1}{T_{\text{éch}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega) * \delta(\omega - n\omega_{\text{éch}}) \end{aligned}$$

en invoquant la relation (5.12), on obtient :

$$M_{\text{éch}}(\omega) = \frac{1}{T_{\text{éch}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - n\omega_{\text{éch}}) \quad (4.32)$$

On aura noté que $M_{\text{éch}}(\omega)$ se répète périodiquement sans que n'apparaisse de recouvrement pour autant que $\omega_s \geq 2\omega_M$, soit $2\pi/T_{\text{éch}} \geq 2\omega_M$, c'est-à-dire :

$$T_{\text{éch}} \leq \frac{\pi}{\omega_M} \quad \text{ou} \quad T_{\text{éch}} \leq \frac{1}{2f_M} \quad (4.33)$$

où $\omega_M = 2\pi f_M$. Tant que l'on échantillonne $m(t)$ à des intervalles uniformes de largeur inférieure à $\pi/\omega_M = 1/(2f_M)$, comme le représente la figure 4-18(e), $M_{\text{éch}}(\omega)$ sera une réplique périodique de $M(\omega)$ qui ne sera affectée d'aucun recouvrement, ce que schématise la figure 4-18(f) et l'on pourra reconstruire le signal $m(t)$ par filtrage passe-bas de $m_{\text{éch}}(t)$. Si, en revanche, on échantillonne $m(t)$ à une fréquence inférieure à la fréquence de Nyquist, c'est-à-dire si $\omega_{\text{éch}} < 2\omega_M$, comme le représente la figure 4-18(i), il y a recouvrement des répliques successives de $M(\omega)$ [figure 4-18(j)]. Ce recouvrement interdit toute restitution correcte de $m(t)$ par filtrage passe-bas de $m_{\text{éch}}(t)$, puisqu'il y a addition de composantes spectrales dans les zones de recouvrement, ce qui induit une distorsion du signal. Ce phénomène est appelé *aliasing* par les Anglo-saxons, terme souvent utilisé en français.

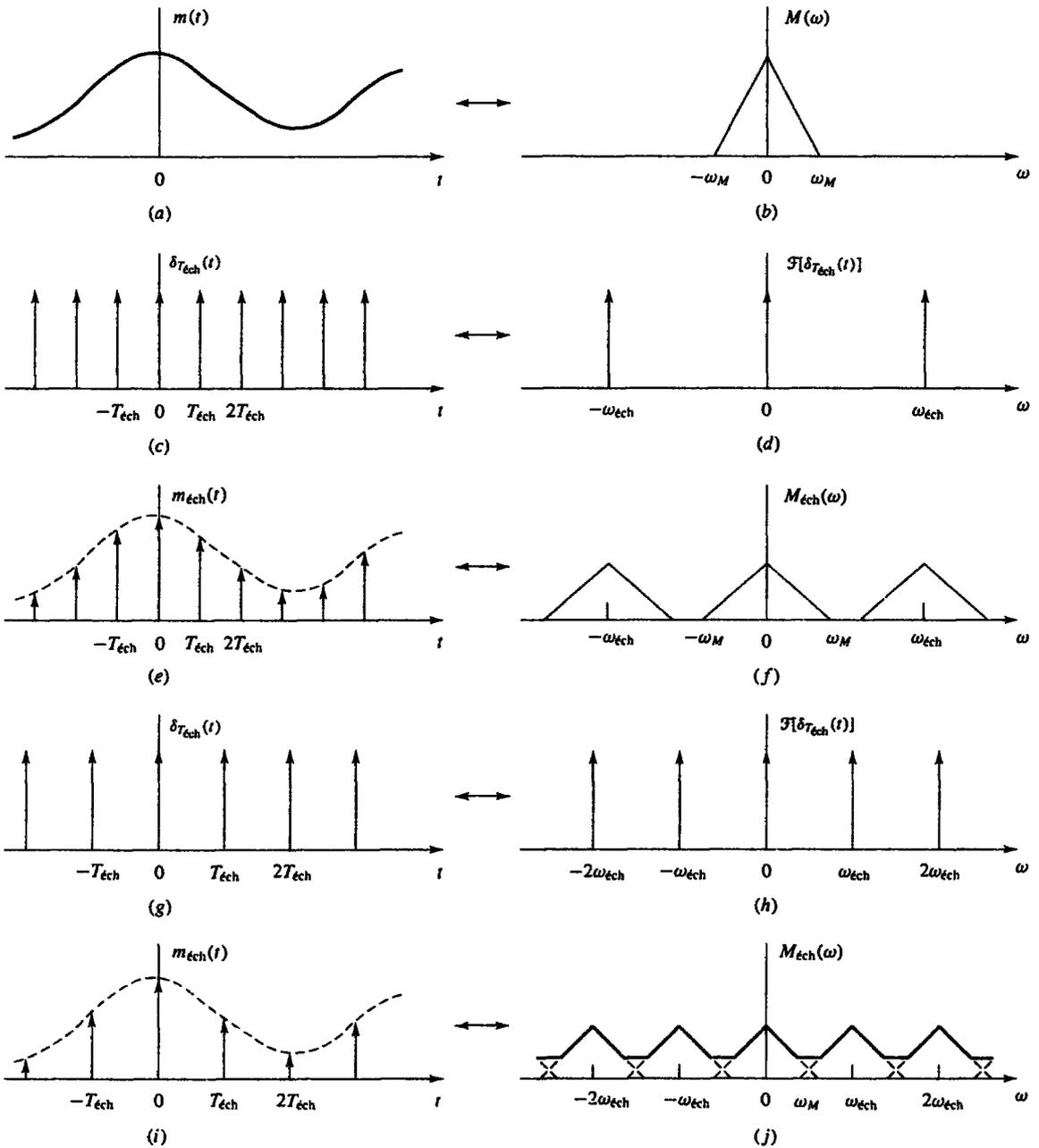


Fig. 4-18 Théorème de l'échantillonnage

Ensuite, d'après la relation (4.32),

$$T_{\text{éch}} M_{\text{éch}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - n\omega_{\text{éch}}) \tag{4.34}$$

Si donc l'on respecte les deux conditions suivantes :

1. $M(\omega) = 0$ pour $|\omega| > \omega_M$
2. $T_{\text{éch}} = \frac{\pi}{\omega_M}$

On voit d'après la relation (4.34) que :

$$M(\omega) = \frac{\pi}{\omega_M} M_{éch}(\omega) \quad \text{pour } |\omega| < \omega_M \quad (4.35)$$

En prenant alors la transformée de Fourier de la relation (4.3) et en tenant compte de la relation (1.39), il vient :

$$M_{éch}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{éch}) e^{-jnT_{éch}\omega} \quad (4.36)$$

En portant la relation (4.36) dans la relation (4.35), on obtient :

$$M(\omega) = \frac{\pi}{\omega_M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{éch}) e^{-jnT_{éch}\omega} \quad \text{pour } |\omega| < \omega_M \quad (4.37)$$

La relation (4.37) montre que la transformée de Fourier $M(\omega)$ du signal à bande limitée $m(t)$ est uniquement déterminée par ses valeurs échantillonnées $m(nT_{éch})$. En prenant la transformée de Fourier inverse de la relation (4.37), on obtient :

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\omega_M} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{éch}) e^{j(t-nT_{éch})\omega} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{éch}) \frac{1}{2\omega_M} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} e^{j(t-nT_{éch})\omega} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{éch}) \frac{\sin \omega_M(t-nT_{éch})}{\omega_M(t-nT_{éch})} \end{aligned}$$

- 4.3. Considérons un signal $m(t) = \cos \omega_0 t$ où $\omega_0 = 2\pi f_0$. Illustrer les effets du sous-échantillonnage de $m(t)$ lorsque $f_{éch} = (3/2) f_0$.

La relation (1.42) fournit l'expression du spectre de $m(t)$:

$$M(\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

ce que montre la figure 4-19(a). La figure 4-19(b) représente le spectre $M_{éch}(\omega)$ du signal échantillonné $m_{éch}(t)$ avec $\omega_{éch} = (3/2)\omega_0$, où $\omega_{éch} = 2\pi f_{éch}$. On a représenté en pointillé la fonction de transfert du filtre passe-bas pour $\omega_p = \omega_{éch}/2$.

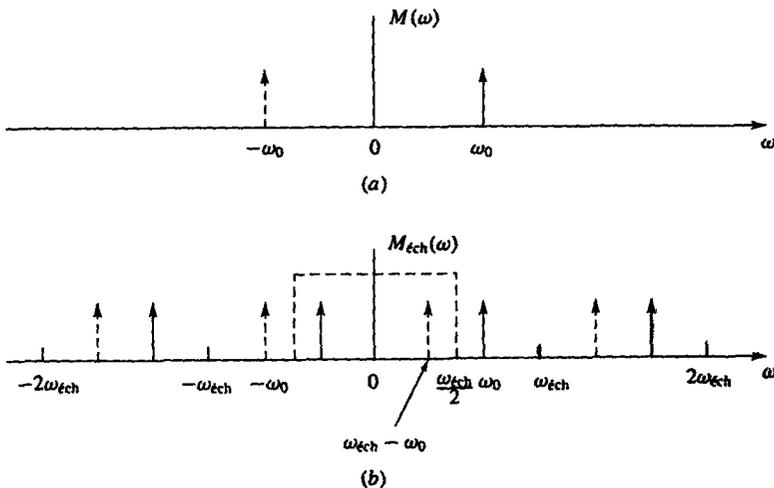


Fig. 4-19 Effet du sous-échantillonnage dans le domaine des fréquences

On remarque l'apparition de recouvrements. Le signal de sortie $x_r(t)$ du filtre passe-bas a pour expression :

$$x_r(t) = \cos(\omega_{éch} - \omega_0)t = \cos \frac{1}{2}\omega_0 t \neq m(t)$$

On a représenté sur la figure 4-20 le signal $m(t)$, ses échantillons et le signal restitué $x_r(t)$

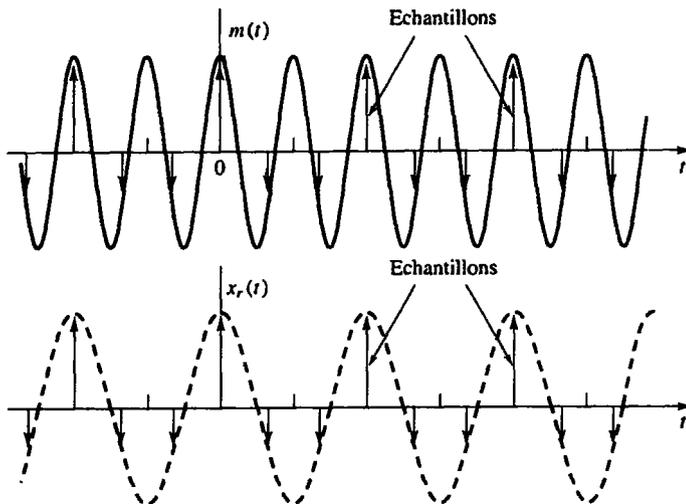


Fig. 4-20 Effet du recouvrement sur un signal sinusoïdal

4.4. Revenons au théorème de l'échantillonnage (4.2), en faisant $T_{éch} = \pi/\omega_M$, ce qui donne :

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{éch})\phi_n(t) \tag{4.38}$$

où

$$\phi_n(t) = \frac{\sin \omega_M(t - nT_{éch})}{\omega_M(t - nT_{éch})} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{4.39}$$

Montrer que $\phi_n(t)$ possède la propriété d'orthogonalité sur l'intervalle $-\infty < t < +\infty$, c'est-à-dire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\phi_k(t) dt = T_{éch}\delta_{nk} \tag{4.40}$$

où δ_{nk} est le *symbole de Kronecker* dont la définition est la suivante :

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

D'après le problème 1.14, on peut écrire que :

$$\frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

Ainsi :

$$\frac{\sin \omega_M t}{\omega_M t} \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_M} p_{\omega_M}(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_M} & |\omega| < \omega_M \\ 0 & |\omega| > \omega_M \end{cases}$$

D'après la relation (I.30), on obtient :

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \frac{\sin \omega_M(t - nT_{\text{éch}})}{\omega_M(t - nT_{\text{éch}})} \leftrightarrow \Phi_n(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_M} e^{-j\omega n T_{\text{éch}}} & |\omega| < \omega_M \\ 0 & |\omega| > \omega_M \end{cases} \\ \phi_k(t) &= \frac{\sin \omega_M(t - kT_{\text{éch}})}{\omega_M(t - kT_{\text{éch}})} \leftrightarrow \Phi_k(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_M} e^{-j\omega k T_{\text{éch}}} & |\omega| < \omega_M \\ 0 & |\omega| > \omega_M \end{cases} \end{aligned}$$

En invoquant la relation (I.128) du problème 1.29, à savoir :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\phi_k(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} \left(\frac{\pi}{\omega_M}\right)^2 e^{-j\omega n T_{\text{éch}}} e^{j\omega k T_{\text{éch}}} d\omega \\ &= \frac{\pi}{2\omega_M^2} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} e^{-j\omega(n-k)T_{\text{éch}}} d\omega \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_M} = T_{\text{éch}} & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

D'où l'on conclut que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\phi_k(t) dt = T_{\text{éch}}\delta_{nk}$$

4.5. Soit $m(t)$ un signal à bande limitée, c'est-à-dire que $M(\omega) = 0$ pour $|\omega| > \omega_M$, montrer que l'on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [m(t)]^2 dt = T_{\text{éch}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [m(nT_{\text{éch}})]^2 \quad (4.41)$$

où $T_{\text{éch}} = \frac{\pi}{\omega_M}$.

En invoquant les relations (4.39) et (4.40), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [m(t)]^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{\text{éch}})\phi_n(t) \right] \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} m(kT_{\text{éch}})\phi_k(t) \right] dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{\text{éch}}) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} m(kT_{\text{éch}}) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\phi_k(t) dt \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{\text{éch}}) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} m(kT_{\text{éch}}) T_{\text{éch}}\delta_{nk} \right] \\ &= T_{\text{éch}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [m(nT_{\text{éch}})]^2 \end{aligned}$$

4.6. Quelle est la fréquence de Nyquist pour chacun des signaux qui suivent :

(a) $m(t) = 5 \cos 1\,000 \pi t \cos 4\,000 \pi t$

(b) $m(t) = \frac{\sin 200 \pi t}{\pi t}$

(c) $m(t) = \left(\frac{\sin 200 \pi t}{\pi t} \right)^2$

(a) Transformons $m(t)$:

$$m(t) = 5 \cos 1\,000 \pi t \cos 4\,000 \pi t \\ = 2,5(\cos 3\,000 \pi t + \cos 5\,000 \pi t)$$

$m(t)$ est un signal à bande limitée par la fréquence supérieure $f_M = 2500$ Hz. La fréquence de Nyquist est donc 5 000 Hz, ce qui correspond à une période d'échantillonnage de $1/5\,000 = 1,2$ ms.

(b) D'après les résultats du problème 1.14, on a :

$$\frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

On en déduit que $m(t)$ est un signal à bande limitée par la fréquence supérieure $f_M = 100$ Hz. La fréquence de Nyquist est donc de 200 Hz, ce qui correspond à une période d'échantillonnage de $1/200$ s.

(c) D'après le théorème de la convolution en fréquence (1.54), on voit que le signal $m(t)$ est lui aussi à bande limitée et que sa largeur de bande est deux fois celle du signal précédent (b), c'est-à-dire 200 Hz. La fréquence de Nyquist, dans ce cas, est de 400 Hz, soit une période d'échantillonnage de $1/400$ s.

4.7. Soit un signal à bande limitée $m(t)$ dont le spectre présente une largeur $\omega_B = 2\pi f_B$ de fréquence limite supérieure $\omega_u = 2\pi f_u$. Le théorème de l'échantillonnage, dans ce cas, nous dit que le signal $m(t)$ peut être restitué à partir de $m_{éch}(t)$ par filtrage passe-bande si $f_{éch} = 2f_u/k$, où k est l'entier le plus grand n'excédant pas f_u/f_B . Des fréquences d'échantillonnage plus élevées ne sont pas forcément utilisables, à moins qu'elles ne soient supérieures à $2f_u$.

En supposant que le spectre du signal $m(t)$ a la forme représentée sur la figure 4-21, vérifier le théorème de l'échantillonnage pour les signaux à bande limitée en traçant le spectre du signal idéalement échantillonné $m_{éch}(t)$ lorsque $f_{éch} = 25, 45$ et 50 kHz. Dire si le signal peut être restitué et, dans ce cas, de quelle façon.

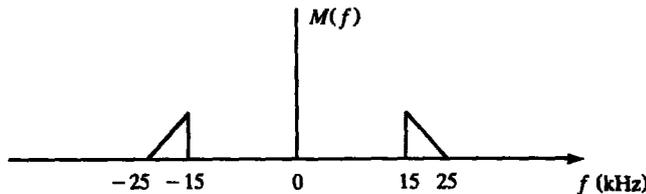


Fig. 4-21 Spectre d'un signal à bande limitée

D'après la figure 4-21, $f_u = 25$ kHz et $f_B = 10$ kHz. Donc $f_u/f_B = 2,5$ et $k = 2$. On a donc $f_{éch} = 2f_u/k = 25$ kHz.

Lorsque $f_{éch} = 25$ kHz : d'après la figure 4-22(a), on voit que $m(t)$ peut être restitué à partir du signal échantillonné au moyen d'un filtrage passe-bande de caractéristiques suivantes :

$$f_{c1} \leq f \leq 25 \text{ kHz} \quad \text{avec} \quad 10 \text{ kHz} \leq f_{c1} < 15 \text{ kHz}$$

Lorsque $f_{éch} = 45$ kHz : d'après la figure 4-22(b), on ne peut restituer le signal $m(t)$ par filtrage.

Lorsque $f_{éch} = 50$ kHz : d'après la figure 4-22(c), on voit que $m(t)$ peut être restitué au moyen d'un filtrage passe-bas dont la fréquence de coupure est $f_c = 25$ kHz.

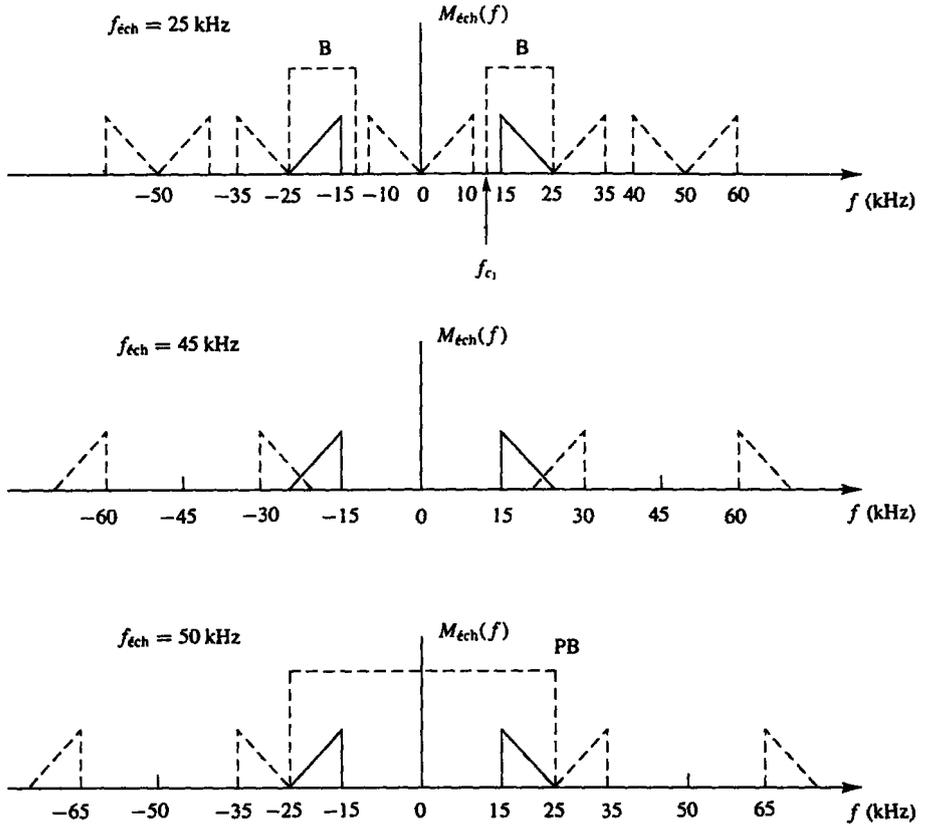


Fig. 4-22

4.8. Soit le signal :

$$m(t) = 10 \cos 2\,000\pi t \cos 8\,000\pi t$$

- (a) Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale admissible pour ce signal en le considérant comme un signal ayant un spectre de gabarit passe-bas ?
 (b) Même question en considérant ce signal comme ayant un spectre de gabarit passe-bande.
 (a) Transformons l'expression de $m(t)$:

$$\begin{aligned} m(t) &= 10 \cos 2\,000\pi t \cos 8\,000\pi t \\ &= 5 \cos 6\,000\pi t + 5 \cos 10\,000\pi t \end{aligned}$$

On en déduit que $f_M = 5\,000$ Hz, soit 5 kHz.

D'où $f_{éch} = 2f_M = 10$ kHz.

- (b) $f_u = f_M = 5$ kHz et $f_B = (5 - 3) = 2$ kHz.

$$\frac{f_u}{f_B} = \frac{5}{2} = 2,5 \rightarrow k = 2$$

En appliquant le théorème de l'échantillonnage pour les signaux à bande limitée, on a :

$$f_{éch} = \frac{2f_u}{k} = 5 \text{ kHz}$$

4.9. Montrer que si la fréquence d'échantillonnage est égale ou supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal, on peut restituer le signal original $m(t)$ à partir du signal échantillonné naturellement $x_{nat}(t)$ par filtrage passe-bas.

Comme on l'a vu avec la relation (4.4) et sur la figure 4-23, le signal échantillonné $x_{nat}(t)$ est égal au produit de $m(t)$ par un train d'impulsions rectangulaires $x_p(t)$ dont la série de Fourier a pour expression (voir problème 1.10) :

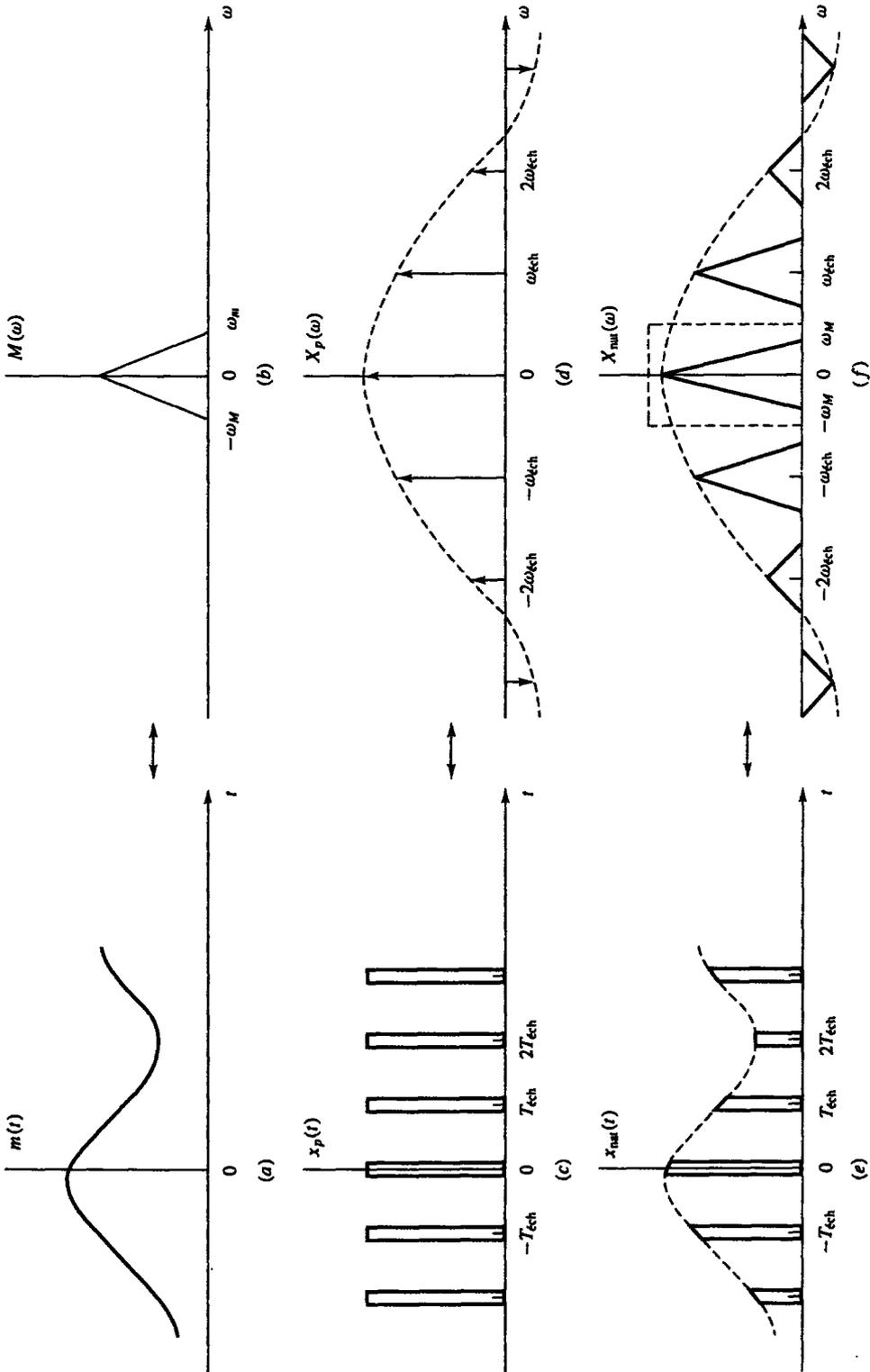


Fig. 4-23 Echantillonnage naturel

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_{\text{éch}}t} \quad \omega_{\text{éch}} = \frac{2\pi}{T_{\text{éch}}}$$

où le coefficient c_n a pour expression :

$$c_n = \frac{d}{T_{\text{éch}}} \frac{\sin(n\omega_s d/2)}{n\omega_s d/2}$$

On en déduit que :

$$x_{\text{nat}}(t) = m(t)x_p(t) = m(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_{\text{éch}}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n m(t) e^{jn\omega_{\text{éch}}t} \quad (4.42)$$

En faisant appel à la propriété de translation en fréquence (I.31) de la transformée de Fourier, on obtient :

$$X_{\text{nat}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n M(\omega - n\omega_{\text{éch}}) \quad (4.43)$$

La relation (4.43) montre que le spectre $X_{\text{nat}}(\omega)$ se compose d'une version pondérée du spectre $M(\omega)$ centrée sur les multiples entiers de la fréquence d'échantillonnage. La composante spectrale à $\omega = n\omega_{\text{éch}}$ est multipliée par c_n . Si l'on se reporte à la figure 4-23(f), il apparaît clairement que si $\omega_{\text{éch}} \geq 2\omega_M$, le signal $m(t)$ peut être reconstitué à partir du filtrage passe-bas de $x_{\text{ns}}(t)$.

4.10. Démontrer la relation (4.7), qui établit que :

$$x_{\text{éch}}(t) = m_{\text{éch}}(t) * p(t)$$

D'après la relation (4.3), on a :

$$m_{\text{éch}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{\text{éch}})\delta(t - nT_{\text{éch}})$$

En invoquant les relations (I.48) et (I.52), on obtient :

$$\begin{aligned} m_{\text{éch}}(t) * p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{\text{éch}})\delta(t - nT_{\text{éch}}) * p(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{\text{éch}})p(t) * \delta(t - nT_{\text{éch}}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_{\text{éch}})p(t - nT_{\text{éch}}) = x_{\text{éch}}(t) \end{aligned}$$

4.11. Analyser le spectre de $x_{\text{éch}}(t)$ (relation 4.7) en fonction de celui du signal utile $M(\omega)$ et étudier la distorsion du signal restitué dans le cas où l'on utilise un échantillonneur-bloqueur.

En vertu de la relation (I.112) du problème 1.13, nous avons la correspondance :

$$p(t) \leftrightarrow P(\omega) = d \frac{\sin(\omega d/2)}{\omega d/2} \quad (4.44)$$

En appliquant alors le théorème de la convolution (I.53) à l'équation (4.7) et en tenant compte de la relation (4.32), on obtient :

$$X_{\text{éch}}(\omega) = M_{\text{éch}}(\omega)P(\omega) = \frac{1}{T_{\text{éch}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - n\omega_{\text{éch}})P(\omega) \quad (4.45)$$

La figure 4-24 donne une interprétation graphique de la relation (4.45), pour une fonction $M(\omega)$ choisie arbitrairement. On voit que l'échantillonnage avec blocage est équivalent au passage du signal échantillonné idéal dans un filtre dont la fonction de transfert $H(\omega)$ est égale à $P(\omega)$. La décroissance de $P(\omega)$ vers les fréquences élevées joue le rôle de filtre passe-bas sur la partie supérieure du spectre du signal utile $m(t)$. Cette perte des fréquences hautes du signal est désignée sous le nom d'*effet d'ouverture*. Plus la valeur de d (largeur d'impulsion) est importante et plus l'effet est manifeste. Comme $T_{\text{éch}}$ est indépendant de d , le rapport $d/T_{\text{éch}}$ est une mesure de la constance du niveau de $P(\omega)$ dans la bande du filtre passe-bas. On peut, en pratique, négliger l'effet d'ouverture tant que $d/T_{\text{éch}} \leq 0,1$.

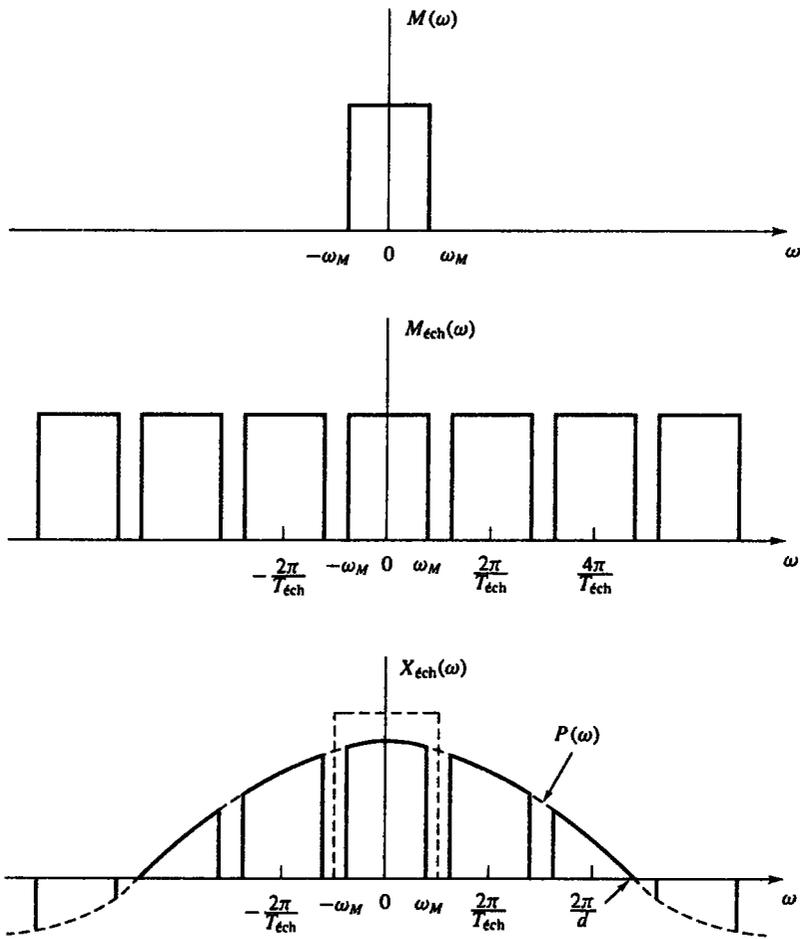


Fig. 4-24 Effet d'ouverture d'un échantillonneur-bloqueur

QUANTIFICATION

4.12. On dispose d'un canal de transmission numérique dont le débit R_b est de 36 000 bauds (36 000 bits par seconde) pour transmettre la parole en modulation PCM. Trouver les valeurs adéquates de la fréquence d'échantillonnage $f_{éch}$, du niveau de quantification L et du nombre de bits n nécessaires en supposant que $f_M = 3,2$ kHz.

Comme l'on désire que

$$f_{éch} \geq 2f_M = 6\,400 \text{ et } nf_{éch} \leq R_b = 36\,000$$

il faut assurer :

$$n \leq \frac{R_b}{f_{éch}} \leq \frac{36\,000}{6\,400} = 5,6$$

On en déduit que $n = 5$, $L = 2^5 = 32$, et que :

$$f_{éch} = \frac{36\,000}{5} = 7\,200 \text{ Hz} = 7,2 \text{ kHz}$$

4.13. Un signal analogique est quantifié puis transmis en modulation PCM. Sur combien de bits faut-il convertir ces échantillons si l'on désire connaître en réception la valeur des échantillons transmis avec une précision de $\pm 0,5\%$ de la valeur crête-crête du signal, à pleine échelle?

Soit $2m_c$ la valeur crête-crête du signal. L'erreur crête est donc $0,005(2m_c) = 0,01m_c$ et l'erreur crête-crête est $2(0,01m_c) = 0,02m_c$ (la valeur maximum de l'échelon Δ). D'après la relation (4.8), le nombre de niveaux de quantification requis a pour expression :

$$L = \frac{2m_c}{\Delta} = \frac{2m_c}{0,02m_c} = 100 \leq 2^n$$

On en déduit que le nombre de bits n de la quantification doit être égal à 7.

- 4.14.** On échantillonne un signal à la fréquence de Nyquist $f_{éch}$ et on le quantifie sur L niveaux. Quelle est la durée τ du bit 1 du signal codé?

Soit n le nombre de bits par échantillon. La relation (4.14) permet d'écrire :

$$n = \lceil \log_2 L \rceil$$

où $\lceil \log_2 L \rceil$ désigne l'entier immédiatement supérieur à la valeur réelle de $\log_2 L$. On doit transmettre $n f_{éch}$ impulsions binaires par seconde, donc :

$$\tau = \frac{1}{n f_{éch}} = \frac{T_{éch}}{n} = \frac{T_{éch}}{\lceil \log_2 L \rceil}$$

où $T_{éch}$ est la période de Nyquist.

- 4.15.** Le rapport signal à bruit de quantification $(S/B)_s$ d'un système de transmission à modulation PCM se définit comme le rapport entre la puissance moyenne du signal et celle du bruit de quantification. Montrer que dans le cas d'une modulation pleine échelle par une sinusoïde d'amplitude A , ce rapport a pour expression :

$$(S/B)_s = \left(\frac{S}{B_q} \right)_s = \frac{3}{2} L^2 \quad (4.46)$$

où encore :

$$\left(\frac{S}{B_q} \right)_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{S}{B_q} \right)_s = 1,76 + 20 \log L \quad (4.47)$$

où L est le nombre de niveaux de quantification.

La valeur crête-crête à quantifier est $2A$. D'après la relation (4.8), l'échelon de quantification a pour valeur :

$$\Delta = \frac{2A}{L}$$

et en tenant compte des relations (4.10) et (4.11), la puissance moyenne du bruit de quantification a pour valeur :

$$B_q = \langle \varepsilon_q^2 \rangle = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{A^2}{3L^2}$$

Le rapport signal à bruit de quantification d'une liaison PCM a donc pour expression :

$$(S/B)_s = \left(\frac{S}{B_q} \right)_s = \frac{A^2/2}{A^2/(3L^2)} = \frac{3}{2} L^2$$

En exprimant ce résultat en décibels, on obtient :

$$\left(\frac{S}{B_q} \right)_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{S}{B_q} \right)_s = 1,76 + 20 \log L$$

- 4.16.** On veut maintenir le rapport signal à bruit de quantification d'une liaison PCM à un minimum de 40 dB. Quel est le nombre de niveaux de quantification requis et évaluer le rapport obtenu.

En PCM, on a $L = 2^n$ où n est le nombre de bits du codage. La relation (4.47) devient donc :

$$\left(\frac{S}{B_q}\right)_{0\text{dB}} = 1,76 + 20 \log 2^n = 1,76 + 6,02n \text{ dB} \quad (4.48)$$

d'autre part,

$$\left(\frac{S}{B_q}\right)_{0\text{dB}} = 40 \text{ dB} \rightarrow \left(\frac{S}{B_q}\right)_s = 10\,000$$

Donc, en invoquant la relation (4.46),

$$L = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{S}{B_q}\right)_s} = \sqrt{\frac{2}{3} (10\,000)} = [81,6] = 82$$

Le nombre de bits cherché n est donc :

$$n = [\log_2 82] = [6,36] = 7$$

Le nombre de niveaux requis est $L = 2^7 = 128$ et le rapport signal à bruit de quantification a pour expression :

$$\left(\frac{S}{B_q}\right)_{0\text{dB}} = 1,76 + 6,02 \times 7 = 43,9 \text{ dB}$$

Nota : La relation (4.48) indique que chaque bit d'un codage PCM contribue pour 6 dB au rapport signal à bruit de quantification en sortie du codage, on appelle parfois cela la *règle des 6 dB*.

4.17. Un système d'enregistrement de disques compact (CD) échantillonne chacune des deux voies stéréo à la fréquence de 44,1 kilobits par seconde (kb/s): kHz et chaque échantillon à 16 bits

- Déterminer le rapport signal sur bruit de quantification dans le cas d'une sinusoïde pure à pleine échelle.
 - Le nombre de bits à gérer est accru, du fait de l'addition de bits d'horloge, de correction d'erreur, d'affichage et de contrôle, ce qui représente un accroissement de 100 %. Quel est en définitive le débit du système d'enregistrement?
 - Un disque compact peut contenir une heure de musique. Evaluer le nombre de bits stockés sur un CD.
 - A titre de comparaison, un dictionnaire de niveau universitaire peut posséder jusqu'à 1500 pages, à raisons de 2 colonnes par page, 100 lignes par colonne, 8 mots par ligne, 6 lettres en moyenne par mot, 7 bits en moyenne par lettre. Déterminer le nombre de bits nécessaires à coder un tel dictionnaire et évaluer le nombre d'ouvrages équivalents que l'on peut stocker sur un CD.
- (a) D'après la relation (4.47),

$$\left(\frac{S}{B_q}\right)_{0\text{dB}} = 1,76 + 6,02 \times 16 = 98,08 \text{ dB}$$

Cette très grande valeur du rapport signal à bruit de quantification autorise une large dynamique d'enregistrement, ce qui concourt à l'impression de clarté que l'on éprouve lors de l'audition d'un CD.

- (b) Le débit d'entrée du système d'enregistrement a pour valeur :

$$2(44,1)(10^3)(16) = 1,411(10^6) \text{ b/s} = 1,411 \text{ Mb/s}$$

en tenant compte des 100 % de bits en plus, cela nous donne :

$$2(1,411)(10^6) \text{ b/s} = 2,822 \text{ Mb/s}$$

- (c) Le nombre de bits enregistrés sur un CD est donc :

$$2,822(10^6)(3\,600) = 10,16(10^9) \text{ b} = 10,16 \text{ gigabits(Gb)}$$

- (d) Le nombre de bits nécessaires au codage du dictionnaire proposé a pour valeur :

$$1\,500(2)(100)(8)(6)(7) = 100,8(10^6) \text{ b} = 100,8 \text{ Mb}$$

En tenant compte de la majoration de 100 % pour les bits de service, cela donne un nombre d'ouvrages stockables sur CD égal à :

$$\frac{10,16(10^9)}{2(100,8)(10^6)} = 50,4$$

On peut donc stocker sur un CD une cinquantaine de dictionnaires de volume comparable.

4.18. Nous allons étudier dans ce qui suit la *loi de compression* μ .

- (a) Tracer cette loi dans le cas où $\mu = 255$.
 (b) Supposons que $m_c = 20 \text{ V}$ et que l'on utilise 256 niveaux de quantification, quel est l'intervalle en volts entre niveaux en l'absence de compression? Lorsque $\mu = 255$, quelles sont les valeurs du plus faible et du plus fort intervalle entre pas de quantification?
 (a) D'après la relation (4.12), pour $\mu = 255$, on a :

$$y = \pm \frac{\ln(1 + 255|x|)}{\ln 256} \quad |x| < 1$$

où $x = m/m_c$. La figure 4-25 représente le tracé de la loi de compression pour $\mu = 255$.

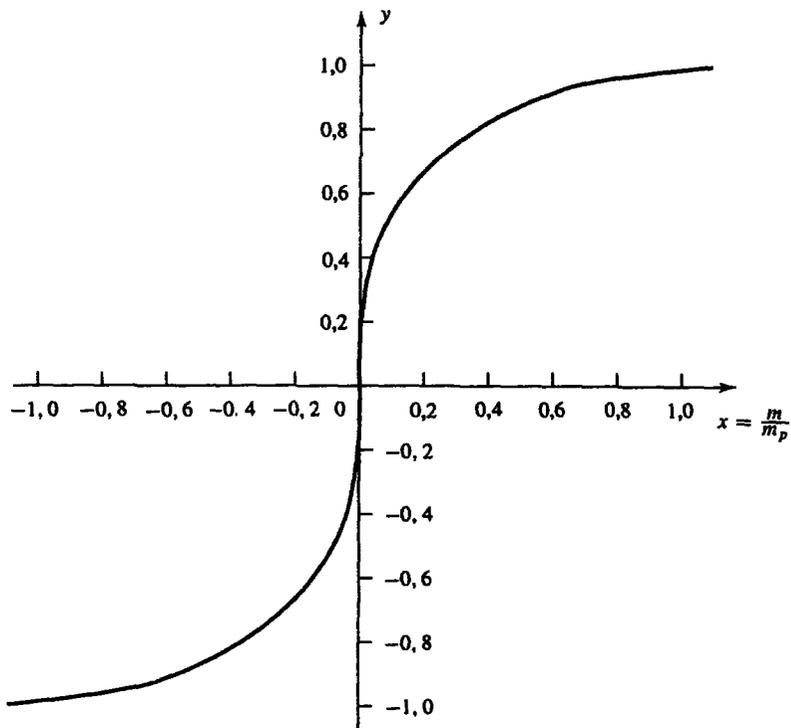


Fig. 4-25 Loi de compression μ pour $\mu = 255$

- (b) Sans compression (quantification linéaire), on sait évaluer le pas de quantification au moyen de la relation (4.8) :

$$\Delta = \frac{2m_c}{L} = \frac{40}{256} = 0,156 \text{ V}$$

Avec compression de dynamique (quantification non linéaire), l'écart le plus faible entre niveaux se situe au voisinage de l'origine, tandis que le plus fort se trouve au voisinage de $|x| = 1$.

Soit x_1 la valeur de x correspondant à $y = 1/127$, c'est-à-dire :

$$\frac{\ln(1 + 255|x_1|)}{\ln 256} = \frac{1}{127}$$

En résolvant en $|x_1|$, il vient :

$$|x_1| = 1,75(10^{-4})$$

Le plus faible intervalle entre niveaux a donc pour valeur :

$$\Delta_{\min} = m_c|x_1| = 20(1,75)(10^{-4}) = 3,5(10^{-3}) \text{ V} = 3,5 \text{ mV}$$

Soit maintenant x_{127} la valeur de x correspondant à $y = 1 - 1/127$, c'est-à-dire :

$$\frac{\ln(1 + 255|x_{127}|)}{\ln 256} = \frac{126}{127}$$

En résolvant en $|x_{127}|$, il vient :

$$|x_{127}| = 0,957$$

L'intervalle le plus important entre niveaux de quantification a donc pour valeur :

$$\Delta_{\max} = m_c(1 - |x_{127}|) = 20(1 - 0,957) = 0,86 \text{ V}$$

- 4.19. Lorsqu'on utilise un compresseur-expandeur de loi μ en PCM, le rapport signal à bruit de quantification lorsque $\mu \gg 1$ a pour approximation :

$$\left(\frac{S}{B_q}\right)_s \approx \frac{3L^2}{[\ln(1 + \mu)]^2} \quad (4.49)$$

En déduire la règle des 6 dB dans le cas où $\mu = 255$.

$$\left(\frac{S}{B_q}\right)_{\text{0dB}} = 10 \log \left(\frac{S}{B_q}\right)_s = 10 \log \frac{3L^2}{[\ln(1 + \mu)]^2}$$

Lorsque $\mu = 255$,

$$\left(\frac{S}{B_q}\right)_{\text{0dB}} = 10 \log \frac{3L^2}{(\ln 256)^2} = 20 \log L - 10,1 \text{ dB} \quad (4.50)$$

En modulation PCM binaire, $L = 2^n$, où n est le nombre de bits de la quantification; la relation (4.50) devient donc :

$$\left(\frac{S}{B_q}\right)_{\text{0dB}} = 20 \log 2^n - 10,1 = 6,02n - 10,1 \text{ dB} \quad (4.51)$$

qui constitue la règle des 6 dB lorsque $\mu = 255$.

- 4.20. Considérons un signal audio dont le spectre s'étend de 300 à 3300 Hz. On le transmet en PCM avec une fréquence d'échantillonnage de 8 000 échantillons par seconde. On spécifie un rapport signal à bruit de quantification en sortie de 30 dB.

- Quels sont d'une part le nombre minimal de niveaux de quantification et d'autre part le nombre minimal de bits par échantillon requis pour respecter cette spécification ?
- Calculer la bande passante minimale requise pour transmettre le signal modulé.
- Reprendre les questions (a) et (b) dans le cas où l'on utilise un compresseur-expandeur de loi μ avec $\mu = 255$.
- En invoquant la relation (4.47), on peut écrire :

$$\left(\frac{S}{B_q}\right)_{\text{0dB}} = 1,76 + 20 \log L \geq 30$$

$$\log L \geq \frac{1}{20}(30 - 1,76) = 1,412 \rightarrow L \geq 25,82$$

Ainsi, le nombre minimal requis de pas de quantification est de 26.

$$n = \lceil \log_2 L \rceil = \lceil \log_2 26 \rceil = \lceil 4,7 \rceil = 5 \text{ bits par échantillon}$$

Le nombre minimal de bits est donc de 5.

(b) D'après la relation (4.15), la bande passante minimale requise par le système est :

$$f_{PCM} = \frac{n}{2} f_{éch} = \frac{5}{2} (8\,000) = 20\,000 \text{ Hz} = 20 \text{ kHz}$$

(c) En invoquant la relation (4.50), on a :

$$\left(\frac{S}{B_q} \right)_{\text{dB}} = 20 \log L - 10,1 \geq 30$$

$$\log L \geq \frac{1}{20} (30 + 10,1) = 2,005 \rightarrow L \geq 101,2$$

Ainsi, le nombre minimal de niveaux de quantification requis est de 102.

$$n = \lceil \log_2 L \rceil = \lceil 6,67 \rceil = 7$$

Le nombre minimal de bits par échantillon est de 7. La bande passante minimale requise pour une liaison est, dans ce cas :

$$f_{PCM} = \frac{n}{2} f_{éch} = \frac{7}{2} (8\,000) = 28\,000 \text{ Hz} = 28 \text{ kHz}$$

MODULATION DELTA

4.21. Considérons un signal sinusoïdal $m(t) = A \cos \omega_m t$ appliqué à un modulateur delta dont le pas de quantification a pour valeur Δ . Montrer que la distorsion de traînage apparaît lorsque

$$A > \frac{\Delta}{\omega_m T_{éch}} = \frac{\Delta}{2\pi} \left(\frac{f_{éch}}{f_m} \right) \quad (4.52)$$

où $f_{éch} = 1/T_{éch}$ est la fréquence d'échantillonnage.

$$m(t) = A \cos \omega_m t \quad \frac{dm(t)}{dt} = -A\omega_m \sin \omega_m t$$

D'après la relation (4.20), pour éviter le traînage, il faut que;

$$\frac{\Delta}{T_{éch}} \geq \left| \frac{dm(t)}{dt} \right|_{\text{max}} = A\omega_m \quad \text{ou} \quad A \leq \frac{\Delta}{\omega_m T_{éch}}$$

Ainsi, lorsque $A > \Delta/(\omega_m T_{éch})$, on ne risque aucune distorsion de traînage.

4.22. Montrer que pour un signal sinusoïdal modulant

$$m(t) = A \cos \omega_m t \quad \omega_m = 2\pi f_m$$

le rapport signal à bruit de quantification maximal en l'absence de traînage a pour expression :

$$(S/B)_s = \left(\frac{S}{B_q} \right)_s = \frac{3 f_{éch}^3}{8\pi^2 f_m^2 f_M} \quad (4.53)$$

où $f_{éch} = 1/T_{éch}$ est la fréquence d'échantillonnage et f_M est la fréquence de coupure du filtre passe-bas en sortie du récepteur.

D'après la relation (4.52), pour éviter le traînage, on doit satisfaire à la condition :

$$A < \frac{\Delta}{\omega_m T_{éch}} = \frac{\Delta}{2\pi} \left(\frac{f_{éch}}{f_m} \right)$$

Ainsi, la valeur maximale acceptable pour la puissance du signal de sortie a pour expression :

$$P_{\max} = \frac{A^2}{2} = \frac{\Delta^2 f_{\text{éch}}^2}{8\pi^2 f_m^2} \quad (4.54)$$

La relation (4.21) nous dit que l'erreur quadratique moyenne, ou puissance du bruit de quantification, a pour expression $\langle \varepsilon_q^2 \rangle = \Delta^2/3$. Soit $f_M \geq f_m$ la bande passante du filtre de restitution en sortie du récepteur, avec $f_M \leq f_{\text{éch}}$. Supposons de plus que le bruit de quantification P_q est uniformément réparti sur la bande jusqu'à $f_{\text{éch}}$, la puissance du bruit de quantification dans la bande f_M a pour expression :

$$N_q = \left(\frac{\Delta^2}{3} \right) \frac{f_M}{f_{\text{éch}}} \quad (4.55)$$

En tenant compte des relations (4.54) et (4.55), on peut évaluer un majorant du rapport signal à bruit de quantification :

$$\left(\frac{S}{B_q} \right)_s = \frac{P_{\max}}{B_q} = \frac{3 f_{\text{éch}}^3}{8\pi^2 f_m^2 f_M}$$

- 4.23. Déterminer le rapport signal à bruit en sortie d'une liaison à modulation delta dans le cas d'un signal modulant sinusoïdal à 1 kHz, échantillonné sans traînage à 32 kHz, avec un filtre passe-bas de restitution d'une largeur de bande de 4 kHz.

D'après la relation (4.53), on peut écrire :

$$(S/B)_s = \frac{3[(32)(10^3)]^3}{8\pi^2(10^3)^2(4)(10^3)} = 311,3 = 24,9 \text{ dB}$$

- 4.24. Le débit de la liaison étudiée au problème 4.23 est de 32 kb/s. Il en serait de même pour une liaison PCM avec une fréquence d'échantillonnage de 8 kHz et 4 bits par échantillon. Quelle est la valeur moyenne du rapport signal à bruit d'un quantificateur PCM 4 bits lors de l'échantillonnage pleine échelle à 8 kHz d'une sinusoïde? Comparer la valeur obtenue avec le résultat du problème 4-23.

D'après la relation (4.48), on a :

$$(S/B)_{0 \text{ dB}} = 1,76 + 6,02(4) = 25,84 \text{ dB}$$

Si l'on compare cette valeur au résultat du problème 4.23, on s'aperçoit qu'en dépit de sa simplicité, le système delta est moins bon qu'un système PCM 4 bits rudimentaire.

- 4.25. Un système delta fonctionne à une fréquence égale à trois fois celle de Nyquist pour traiter un signal de 3 kHz de bande. Le pas de quantification est de 250 mV.

- (a) Quelle amplitude maximale peut-on admettre en entrée pour qu'une sinusoïde de fréquence 1 kHz puisse être traitée sans traînage?
 (b) Déterminer le rapport signal à bruit de quantification après filtrage de sortie dans le cas du signal proposé en (a).

(a)
$$m(t) = A \cos \omega_m t = A \cos 2\pi(10^3)t$$

$$\left| \frac{dm(t)}{dt} \right|_{\max} = A(2\pi)(10^3)$$

D'après la relation (4.52), l'amplitude maximale admissible pour le signal d'entrée sinusoïdal proposé a pour expression :

$$\Delta_{\max} = \frac{\Delta}{\omega_m T_{\text{éch}}} = \frac{\Delta}{\omega_m} f_{\text{éch}} = \frac{250}{2\pi(10^3)} 3(2)(3)(10^3) = 716,2 \text{ mV}$$

- (b) D'après la relation (4.53), et en supposant que la fréquence de coupure du filtre passe-bas est f_m , on peut écrire que :

$$(S/B)_s = \left(\frac{S}{B_q} \right)_s = \frac{3[(3)(6)(10^3)]^3}{8\pi^2(10^3)^3} = 221,6 = 23,5 \text{ dB}$$

FORMATS DE CODAGE

- 4.26. Considérons la séquence binaire 0100101. Tracer la forme du signal codant cette séquence dans les cas suivants :

- (a) Code unipolaire NRZ (non retour à zéro).
 (b) Code bipolaire RZ (retour à zéro).
 (c) Code AMI RZ (inversion alternée et retour à zéro).

Voir figure 4-26.

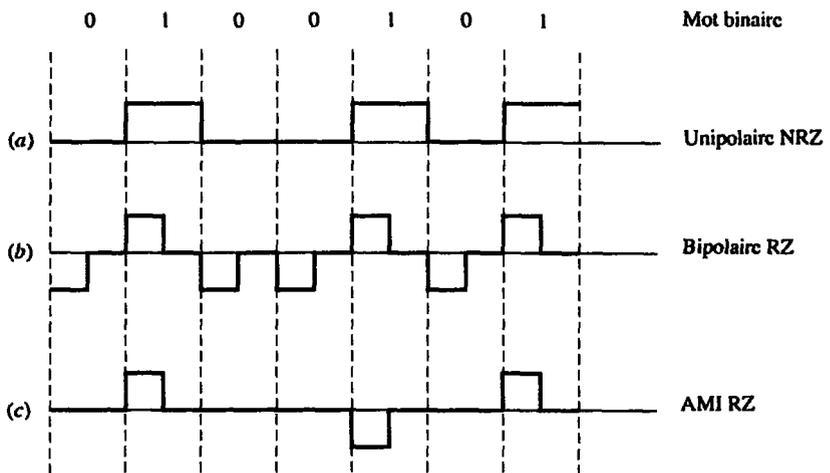


Fig. 4-26 Forme des signaux du problème 4.26

- 4.27. Discuter des avantages et des inconvénients des trois types de codage examinés dans le problème 4.26 et illustrés par la figure 4-26.

Le codage unipolaire NRZ présente, malgré sa simplicité, plusieurs inconvénients : il n'y a pas de transitions décelables sur le signal lorsque plusieurs 0 ou plusieurs 1 sont consécutivement transmis, ce qui supprime toute information utilisable pour la datation ou la synchronisation. Il n'y a d'autre part aucun moyen de déceler si une erreur s'est ou non introduite dans la séquence reçue.

Le codage bipolaire RZ offre un bon support pour la synchronisation mais ne permet pas d'identifier les erreurs de transmission.

Le codage AMI NRZ offre une possibilité de détection des erreurs : si deux impulsions consécutives de même polarité sont reçues (ignorant les zéros) on est sûr qu'une erreur s'est produite. Pour assurer une datation aisée des messages, il est nécessaire d'éviter de trop longues suites de 0.

- 4.28. Considérons une séquence binaire comportant une longue suite de 1 suivie d'un seul 0 puis d'une longue suite de 1. Tracer le signal correspondant dans les cas suivants :

- (a) Codage unipolaire NRZ.
 (b) Codage bipolaire NRZ.
 (c) Codage AMI RZ.
 (d) Code Manchester.

Voir figure 4-27.

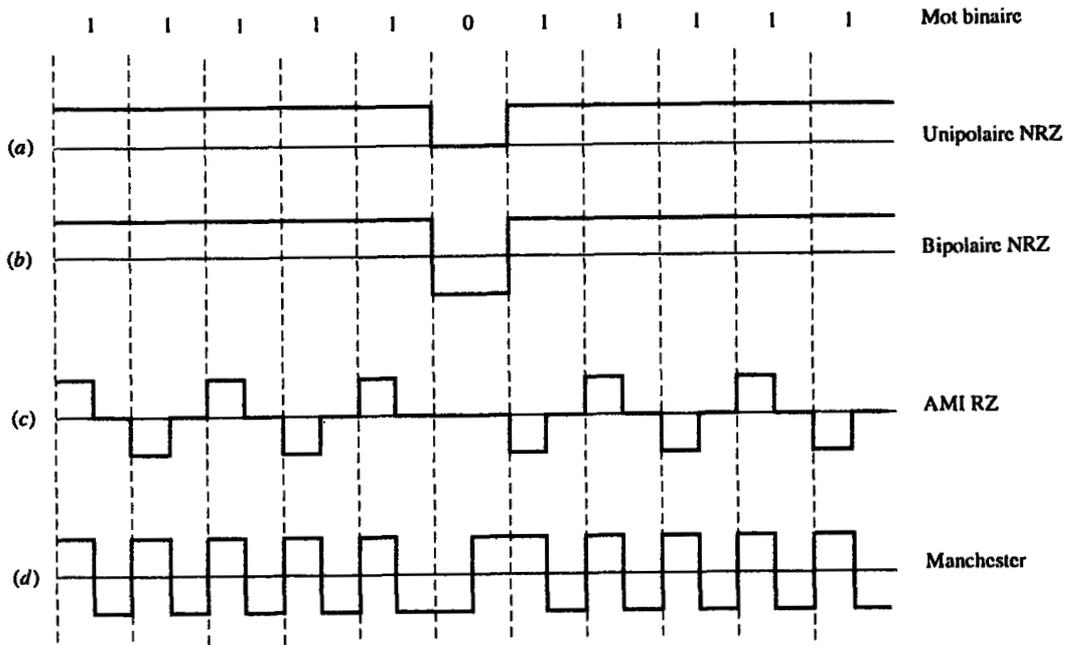


Fig. 4-27

4.29. Le signal AMI RZ représentant la séquence binaire 0100101011 est transmis sur un canal bruité. La figure 4-28 représente le signal reçu, qui comporte une seule erreur. Localiser l'erreur en justifiant votre réponse.

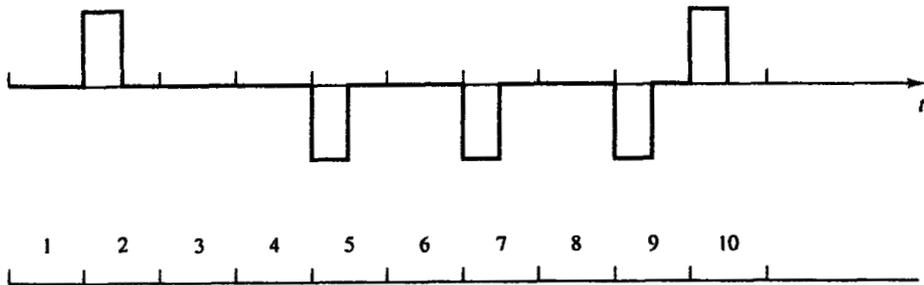


Fig. 4-28

L'erreur est située en septième position, comme on peut le voir sur la figure 4-28, où l'on relève une impulsion négative. Il s'agit d'une erreur parce que sous le format AMI, on utilise des impulsions alternativement positives et négatives, de même valeur absolue, pour représenter la valeur 1 tandis que l'absence d'impulsion correspond à la valeur 0. L'impulsion en septième position correspond au troisième 1 de la séquence et devrait donc présenter une polarité positive.

MULTIPLEXAGE TEMPOREL

4.30. Deux signaux analogiques $m_1(t)$ et $m_2(t)$ doivent être transmis sur un même canal en multiplex temporel. La fréquence la plus élevée de $m_1(t)$ est de 3 kHz tandis que celle de $m_2(t)$ est de 3,5 kHz. Quelle est la valeur minimale admissible pour sa fréquence d'échantillonnage?

La composante de fréquence la plus haute du signal composite $m_1(t) + m_2(t)$ a pour valeur 3 kHz. La fréquence d'échantillonnage minimale a donc pour valeur :

$$2(3\,500) = 7\,000 \text{ échantillons par seconde}$$

4.31. Un signal $m_1(t)$ présente une bande de 3,6 kHz; trois autres signaux $m_2(t)$, $m_3(t)$ et $m_4(t)$, ont chacun une largeur de bande de 1,2 kHz. On désire transmettre ces signaux sur un multiplex temporel.

- Dessiner le schéma d'un tel système, chaque signal étant échantillonné à sa fréquence de Nyquist.
- Quelle doit être la fréquence de prélèvement des échantillons (en échantillons par seconde) du commutateur?
- Si la sortie du commutateur présente 1 024 niveaux de quantification, convertis en binaire, quel est le débit de la liaison (en bits par seconde)?
- Déterminer la bande passante minimale requise pour la liaison.

(a)

Message	Bande	Fr. Nyquist
$m_1(t)$	3,6 kHz	7,2 kHz
$m_2(t)$	1,2 kHz	2,4 kHz
$m_3(t)$	1,2 kHz	2,4 kHz
$m_4(t)$	1,2 kHz	2,4 kHz

Si le commutateur échantillonne les voies au rythme de 2 400 prélèvements par seconde, en un tour nous aurons obtenu 3 échantillons pour la voie $m_1(t)$ et 1 échantillon pour chacune des voies $m_2(t)$, $m_3(t)$ et $m_4(t)$. Cela signifie que le commutateur doit avoir au moins 6 pôles alimentés par les 4 signaux comme le représente la figure 4-29.

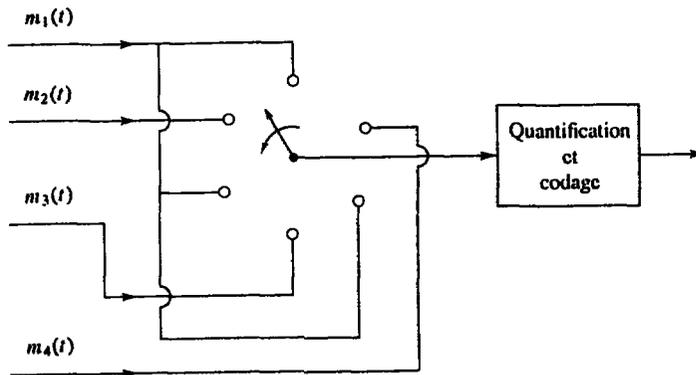


Fig. 4-29 Schéma du multiplexeur

- $m_1(t)$ comporte 7 200 échantillons par secondes, tandis que $m_2(t)$, $m_3(t)$ et $m_4(t)$ en comportent chacun 2 400. On a donc un total de 14 400 échantillons à transmettre.
- $L = 1\,024 = 2^{10} = 2^n$. Le débit de sortie est donc $10(14\,400) = 144 \text{ kb/s}$.
- La bande passante minimale requise pour la liaison a pour valeur :

$$f_B = \frac{1}{2}(7,2 + 2,4 + 2,4 + 2,4) = 7,2 \text{ kHz}$$

4.32. Le système T1 utilisé en téléphonie numérique transmet 24 voies en PCM 8 bits. Chaque voie est filtrée avec une fréquence de coupure de 3,4 kHz. L'échantillonnage qui suit le filtrage se fait à 8 kHz. On ajoute un bit à la fin de chaque trame pour assurer la synchronisation. Calculer (a) la durée de chaque bit, (b) le débit de la liaison et (c) la fréquence minimale d'échantillonnage requise (fréquence de Nyquist).

(a) A la fréquence d'échantillonnage de 8 kHz, chaque trame du signal multiplexé occupe une durée de :

$$\frac{1}{8\,000} = 0,000\,125\text{ s} = 125\text{ microsecondes } (\mu\text{s})$$

Chaque trame se compose de 24 mots de 8 bits, plus 1 bit de synchronisation, soit un total de :

$$24(8) + 1 = 193\text{bits}$$

la durée de chaque bit a donc pour valeur :

$$T_b = \frac{125}{193} \mu\text{s} = 0,647 \mu\text{s}$$

(b) Le débit correspondant a pour valeur :

$$R_b = \frac{1}{T_b} = 1,544\text{ Mb/s}$$

(c) D'après la relation (4.22), la bande passante minimale pour assurer une liaison correcte a pour valeur :

$$f_{T1} = \frac{1}{2T_B} = 772\text{ kHz}$$

FORME DES IMPULSIONS ET DIAPHONIE

4.33. Considérons une fonction $h(t)$ dont la transformée de Fourier $H(\omega)$ satisfait à la relation :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right) = 1 \quad \text{pour } |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \quad (4.56)$$

Montrer que $h(nT)$ a pour expression :

$$h(nT) = \begin{cases} \frac{1}{T} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

La relation (4.56) est connue sous le nom de *critère de forme de Nyquist*.

En prenant la transformée de Fourier inverse de $H(\omega)$, on obtient :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Le domaine d'intégration de l'intégrale qui précède peut être divisé en segments de longueur $2\pi/T$ comme suit :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi/T}^{(2k+1)\pi/T} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

et l'on peut écrire $h(nT)$ sous la forme suivante :

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)\pi/T}^{(2k+1)\pi/T} H(\omega) e^{j\omega nT} d\omega \quad (4.58)$$

En effectuant le changement de variable $u = \omega - 2\pi(k/T)$, l'équation (4.58) devient :

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H\left(u + \frac{2\pi k}{T}\right) e^{j(u+2\pi k/T)nT} du$$

En échangeant sommation et intégration, il vient :

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left(u + \frac{2\pi k}{T}\right) e^{junT} du$$

Si la relation (4.56) est vérifiée, on a :

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{junT} du = \frac{1}{T} \frac{\sin n\pi}{n\pi} = \begin{cases} \frac{1}{T} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

ce qui assure que si $h(t)$ a une transformée de Fourier $H(\omega)$ qui respecte la condition énoncée, elle n'induit aucune diaphonie lors de sa transmission au sein d'une trame.

- 4.34.** Une ligne téléphonique présente une bande passante de 3,5 kHz. Calculer le débit (en bits par seconde) que l'on peut transmettre sur cette ligne si l'on utilise un codage au moyen d'impulsions de spectre *cosinus raidi* avec un coefficient de raidissement $\alpha = 0,25$.

En invoquant la relation (4.28), on voit que le débit de la ligne a pour expression :

$$R_b = \frac{1}{T} = \frac{2}{1 + 0,25} (3\,500) = 5\,600 \text{ b/s}$$

- 4.35.** Un canal de transmission de bande passante 75 kHz doit être utilisé pour acheminer des données binaires avec un débit de 0,1 Mb/s des impulsions de format *cosinus raidi*. Déterminer le facteur de raidissement α .

$$T_b = \frac{1}{0,1(10^6)} = 10^{-5} \text{ s}$$

$$f_B = 75 \text{ kHz} = 75(10^3) \text{ Hz}$$

En utilisant la relation (4.27), on obtient :

$$1 + \alpha = 2 f_B T_b = 2(75)(10^3)(10^{-5}) = 1,5$$

D'où l'on tire la valeur de α :

$$\alpha = 0,5$$

- 4.36.** Un système de télémétrie exploite huit signaux de 2 kHz de bande chacun multiplexés en PCM binaire. L'erreur d'échantillonnage ne doit pas dépasser 1 % de leur valeur crête. Déterminer la bande passante minimale requise si l'on utilise des impulsions *cosinus raidi* avec un paramètre $\alpha = 0,2$. La fréquence d'échantillonnage doit, sur ce système, être supérieure de 25 % à la limite de Nyquist.

D'après la relation (4.9), l'erreur maximale de quantification doit satisfaire à la condition suivante :

$$(\varepsilon_q)_{\max} = \frac{\Delta}{2} = \frac{m_c}{L} \leq 0,01 m_c$$

On en déduit que $L \geq 100$ et l'on prendra $L = 128 = 2^7$. Le nombre de bits requis par échantillon est donc de 7.

Comme la fréquence de Nyquist a pour valeur $2f_M = 4\,000$ échantillons par seconde, la fréquence d'échantillonnage de chacun de ces signaux a donc pour valeur :

$$f_{\text{éch}} = 1,25(4\,000) = 5\,000 \text{ éch./s}$$

On a huit signaux à multiplexer dans le temps, ce qui représente un total de :

$$8(5\,000) = 40\,000 \text{ éch./s}$$

Comme chaque échantillon est quantifié sur 7 bits, le débit du multiplex a pour valeur :

$$\frac{1}{T_b} = 7(40\,000) = 280 \text{ kb/s}$$

D'après la relation (4.27), la bande passante minimale requise pour la transmission a pour valeur :

$$f_B = \frac{1 + 0,2}{2}(280) = 168 \text{ kHz}$$

Problèmes supplémentaires

4.37. Soit $m(t)$ un signal à bande limitée, montrer que l'on a la relation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} m(t)\phi_n(t) dt = T_{éch}m(nT_{éch})$$

où $\phi_n(t)$ est la fonction définie par la relation (4.39) du problème 4.4.

Indication : Utiliser la propriété d'orthogonalité (4.40) de $\phi_n(t)$.

4.38. Les signaux

$$m_1(t) = 10 \cos 1\,000 \pi t$$

et

$$m_2(t) = 10 \cos 50\pi t$$

sont tous les deux échantillonnés à la fréquence $f_{éch} = 75 \text{ kHz}$. Montrer que les deux suites d'échantillons obtenues sont identiques.

Indication : Prendre la transformée de Fourier des signaux échantillonnés idéalement $m_{1_{éch}}(t)$ et $m_{2_{éch}}(t)$. *Nota :* ce problème montre que le sous-échantillonnage de $m_1(t)$ et le suréchantillonnage de $m_2(t)$ peuvent produire le même signal échantillonné.

4.39. Le signal

$$m(t) = \cos 200\pi t + 2 \cos 320\pi t$$

est échantillonné idéalement à la fréquence de 300 Hz. Si l'on traite le signal échantillonné dans un filtre dont la fréquence de coupure est de 250 Hz, quelles seront les composantes spectrales recueillies en sortie de filtre ?

Réponse : Les composantes à 100, 140, 160 et 200 Hz.

4.40. Un signal de durée limitée dans le temps satisfait à la condition :

$$m(t) = 0 \quad \text{pour } |t| > 0$$

Soit $M(\omega) = \mathcal{F}[m(t)]$. Montrer que $M(\omega)$ peut être déterminé de façon unique à partir de ses valeurs $M(n\pi/T)$ à des instants régulièrement répartis d'intervalle π/T . En fait, $M(\omega)$ a pour expression :

$$M(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M\left(\frac{n\pi}{T}\right) \frac{\sin(\omega T - n\pi)}{\omega T - n\pi}$$

Cette relation est connue comme *théorème de l'échantillonnage dans le domaine des fréquences*.

Indication : Echanger les rôles de t et de ω dans la démonstration du théorème de l'échantillonnage (problème 4.2).

4.41. Le code ASCII (American Standard Code for Information Interchange) possède 128 caractères codés en binaire sur 7 bits. Si un ordinateur fournit 100 000 caractères par seconde, déterminer :

(a) le nombre de bits par caractère requis.

(b) le débit R_b en bits/s en sortie de l'ordinateur.

Réponse : (a) 7 bits par caractère, (b) $R_b = 0,7$ Mb/s

4.42. Un système PCM utilise un quantificateur linéaire suivi d'un codeur binaire 7 bits. Le débit du système est de 50 Mb/s. Quelle est la bande de fréquence maximale des messages que peut transmettre ce système?

Réponse : 3,57 MHz

4.43. On transmet un signal vidéo en PCM binaire avec une fréquence d'échantillonnage $f_{ech} = 10$ MHz. Calculer le débit à assurer pour obtenir un rapport signal à bruit de quantification en sortie $(S/B)_s \geq 45$ dB.

Réponse : 80 Mb/s

4.44. Montrer que sur un système PCM, le rapport signal à bruit de quantification a pour expression :

$$\left(\frac{S}{B_q} \right) = \frac{3}{2} (4^{f_B/f_m})$$

où f_B est la bande passante de la liaison et f_m la largeur de bande du signal modulant.

Indication : Utiliser les relations (4.14), (4.15) et (4.46).

4.45. La bande passante vidéo plus audio d'un signal TV est de 4,5 MHz. Si l'on convertit ce signal en PCM sur 1 024 niveaux de quantification, déterminer le débit du signal obtenu. On supposera que l'échantillonnage se fait à 20% au-dessus de la fréquence de Nyquist.

Réponse : 108 Mb/s

4.46. L'utilisation d'un compresseur-expandeur de loi A se fait souvent avec la valeur $A = 87,6$. Si $m_c = 20$ V et si l'on utilise 256 niveaux de quantification, quelles sont les valeurs minimales et maximales de l'intervalle entre niveaux?

Réponse : $\Delta_{min} = 9,8$ mV, $\Delta_{max} = 0,84$ V

4.47. On considère la séquence binaire 1101110; dessiner le signal transmis dans le cas où l'on utilise (a) un code AMI RZ et (b) un code Manchester.

Indication : Voir la figure 4-11.

4.48. Un système delta fonctionne avec une fréquence d'échantillonnage f_{ech} et un pas de quantification Δ fixe. Le signal d'entrée du système est :

$$m(t) = \alpha t \quad \text{pour } t > 0$$

Déterminer la valeur de α pour laquelle apparaît le traînage.

Réponse : $\alpha = \Delta f_{ech}$

4.49. On considère un système de modulation Δ sans filtre passe-bas, comme dans le problème 4.22. Montrer que si l'on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de distorsion de traînage, le rapport signal à bruit de quantification augmente de 6 dB lorsque la fréquence d'échantillonnage est doublée. Quelle amélioration de ce rapport constate-t-on en utilisant un filtre en sortie du récepteur?

Réponse : Une amélioration de 9 dB.

4.50. Vingt-quatre signaux audio sont échantillonnés uniformément puis multiplexés temporellement. On utilise un échantillonneur bloqueur avec une largeur d'impulsion de $1 \mu\text{s}$. Le multiplexage impose la transmission d'une impulsion de synchronisation, d'amplitude convenable et, elle aussi, de largeur $1 \mu\text{s}$. La fréquence la plus élevée de chaque signal est de $3,4 \text{ kHz}$.

(a) En supposant que la fréquence d'échantillonnage est de 8 kHz , calculer l'intervalle entre impulsions consécutives du signal multiplexé.

(b) Reprendre la question (a) en supposant que l'on échantillonne les signaux à la fréquence de Nyquist.

Réponse : (a) $4 \mu\text{s}$, (b) $5,68 \mu\text{s}$

4.51. Cinq signaux de télémétrie d'une largeur de bande de 1 kHz doivent être transmis en multiplex PCM. L'erreur maximale tolérée sur l'échantillonnage est de $0,5 \%$ de leur valeur crête. Ils sont échantillonnés à 20% au-dessus de la fréquence de Nyquist. La synchronisation et le tramage demandent un supplément de bits de $0,5 \%$. Déterminer le débit minimal de la liaison et la bande passante requise pour la transmission du signal multiplexé.

Réponse : $R_b = 964,8 \text{ kb/s}$, $f_{\text{TDM}} = 482,9 \text{ kHz}$

4.52. Un système de télémétrie exploite quatre signaux analogiques $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ et $m_4(t)$. La largeur de bande de $m_1(t)$ est de $3,6 \text{ kHz}$, tandis que celle des trois autres signaux est de $1,5 \text{ kHz}$. Etablir le schéma d'un multiplex temporel capable de traiter ces signaux.

Réponse : Utiliser le schéma de la figure 4-29 et le problème 4.31 avec une vitesse de commutation de $3\,000$ cycles par seconde.

Probabilités et variables aléatoires

5.1 INTRODUCTION

Nous avons parlé jusqu'à présent de l'acheminement de signaux déterministes, on dit aussi *certain*, sur un canal de transmission, sans mentionner le rôle important que jouent les phénomènes aléatoires en télécommunication. Ce caractère aléatoire implique l'imprévisibilité, l'introduction du hasard. Si le récepteur connaissait d'avance le contenu du message émis par la source, il n'y aurait pas besoin d'établir une liaison. Le hasard se manifeste déjà au niveau de la source; de plus, la liaison introduit elle-même son propre hasard sous forme de bruit qui s'ajoute au signal véhiculé. Ce bruit est par essence imprévisible. Ce chapitre a pour objectif de présenter les rudiments mathématiques indispensables pour poursuivre notre étude des télécommunications en tenant compte des phénomènes aléatoires.

5.2 PROBABILITÉS

A. Tirage aléatoire

Une expérience est dite *aléatoire* si l'on ne peut prévoir son résultat. Les exemples les plus typiques sont le lancer de dés, le jeu de pile ou face, le tirage d'une carte ou le choix pour transmission d'un signal parmi d'autres signaux.

B. Définitions de base

L'ensemble S de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire E est appelé *univers associé à cette expérience*. On appelle parfois *épreuves* les éléments de S . Chaque résultat d'un tirage aléatoire correspond à une épreuve.

Un ensemble d'épreuves constitue un *événement*. On dit qu'un événement est lié à une expérience E si pour tout résultat $\in S$ on sait dire si cet événement a eu lieu ou non.

L'association de nombres réels aux événements définis sur S constitue une *mesure de probabilité*.

C. Définitions complémentaires

1. Le *complémentaire* d'un événement A , noté \bar{A} , est l'événement constitué de l'ensemble des éléments de S qui n'appartiennent pas à A .
2. L'*union* des événements A et B , notée $A \cup B$, est l'événement constitué de l'ensemble des éléments qui appartiennent à A , à B , ou aux deux à la fois.
3. L'*intersection* des événements A et B , notée $A \cap B$, se compose de l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément à A et à B .
4. L'événement qui ne contient aucun élément est dit *événement nul*, noté \emptyset . On dit que \emptyset correspond à un événement impossible.
5. Deux événements A et B sont *mutuellement exclusifs* ou *disjoints* s'ils n'ont aucun point commun, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.
6. Si tout point de A appartient à B , on dit que A est un *sous-ensemble* de B , ce qui se note $A \subset B$.

D. Algèbre des événements

Les relations d'union, d'intersection et de complémentarité peuvent se représenter géométriquement au moyen des diagrammes de Venn, comme le montre la figure 5-1. On peut y vérifier les relations suivantes :

$$A \cup \bar{A} = S \tag{5.1}$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \tag{5.2}$$

$$A \cap S = A \tag{5.3}$$

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \tag{5.4}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B} \tag{5.5}$$

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \tag{5.6}$$

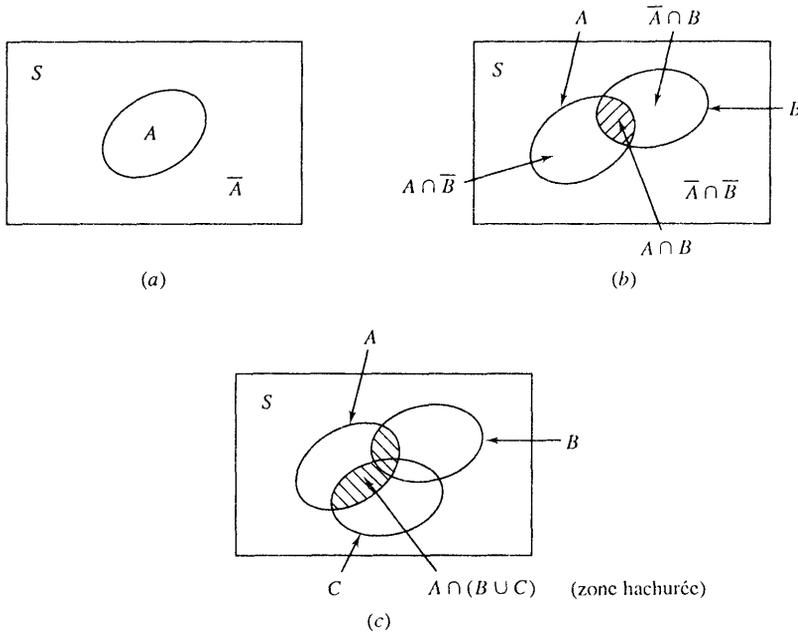


Fig. 5-1 Diagramme de Venn

Les relations (5.4) et (5.5) sont connues sous le nom de *lois de De Morgan*. Les opérations d'union et d'intersection possèdent les propriétés suivantes :

Commutativité

$$A \cup B = B \cup A \tag{5.7}$$

$$A \cap B = B \cap A \tag{5.8}$$

Associativité

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{5.9}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{5.10}$$

Distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{5.11}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{5.12}$$

E. Probabilité d'un événement

1. Fréquence relative d'un événement

Supposons que l'on répète n fois un tirage aléatoire. Si un événement A se produit n_A fois, on définit sa probabilité de la façon suivante :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (5.13)$$

Notons qu'il se peut que la limite n'existe pas.

2. Définition classique

Cette définition, plus formelle que la précédente, postule que la probabilité d'un événement A a pour expression :

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \quad (5.14)$$

où N est le nombre de résultats possibles et N_A le nombre de résultats faisant partie de l'événement A .

Notons que cette définition suppose que tous les résultats sont équiprobables.

3. Définition axiomatique

Selon cette définition, la probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est un nombre réel associé à A qui satisfait à l'ensemble des axiomes suivants :

$$\text{Axiome 1 :} \quad P(A) \geq 0 \quad (5.15)$$

$$\text{Axiome 2 :} \quad P(S) = 1 \quad (5.16)$$

$$\text{Axiome 3 :} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \quad (5.17)$$

En utilisant ces trois axiomes, on peut établir les propriétés suivantes, toutes très intéressantes (problèmes 5.2 à 5.4) :

$$1. \quad P(A) \leq 1 \quad (5.18)$$

$$2. \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (5.19)$$

$$3. \quad P(\emptyset) = 0 \quad (5.20)$$

$$4. \quad P(A) \leq P(B) \quad \text{si } A \subset B \quad (5.21)$$

$$5. \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (5.22)$$

F. Probabilité conditionnelle

La *probabilité conditionnelle* d'un événement A par rapport à l'événement B , notée $P(A|B)$, a pour définition :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (5.23)$$

où $P(B) \neq 0$ et $P(A \cap B)$ est la probabilité conjointe de A et B . De la définition (5.23) on peut déduire la *loi de Bayes* (problème 5.5) :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \quad (5.24)$$

où $P(B|A)$ est la probabilité conditionnelle de B par rapport à A .

G. Événements indépendants

Deux événements A et B sont dits *statistiquement indépendants* si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (5.25)$$

Si donc A et B sont indépendants, la relation (5.23) permet d'écrire :

$$P(A|B) = P(A) \quad (5.26)$$

Soit A_1, A_2, \dots, A_n un ensemble d'événements définis sur S . Ces n événements sont dits *mutuellement indépendants* si et seulement si les relations qui suivent

$$\begin{aligned} P(A_i \cap A_j) &= P(A_i)P(A_j) \\ P(A_i \cap A_j \cap A_k) &= P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ &\vdots \\ P(A_i \cap A_j \cap \dots \cap A_n) &= P(A_i)P(A_j) \dots P(A_n) \end{aligned} \quad (5.27)$$

sont valides pour toute combinaison d'indices telle que

$$1 \leq i < j < k < \dots \leq n$$

H. Probabilité totale

Soit N événements A_1, A_2, \dots, A_N mutuellement *exclusifs* constituant *exhaustivement* l'ensemble S , c'est-à-dire vérifiant les conditions suivantes :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j = 1, 2, \dots, N \quad (5.28)$$

et

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N = S \quad (5.29)$$

Soit B un événement quelconque défini sur S . Alors :

$$P(B) = \sum_{k=1}^N P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^N P(B|A_k)P(A_k) \quad (5.30)$$

que l'on appelle *probabilité totale* de l'événement B (problème 5.6).

5.3 VARIABLES ALÉATOIRES, FONCTIONS DE RÉPARTITION ET DENSITÉS

A. Variables aléatoires

Une *variable aléatoire* $X(\lambda)$ est une fonction qui associe un nombre réel, appelé *valeur* de $X(\lambda)$, à chaque épreuve λ de S en respectant les conditions suivantes :

1. L'ensemble $\{\lambda : X(\lambda) \leq x\}$ est un événement pour tout nombre réel x .
2. $P\{\lambda : X(\lambda) = -\infty\} = 0$ et $P\{\lambda : X(\lambda) \leq \infty\} = 1$.

On utilise les *majuscules* pour noter les *variables aléatoires* et les *minuscules* pour noter les *valeurs particulières* prises par ces variables (leur «instanciation» comme on dirait en programmation).

La variable aléatoire X possède une mesure de probabilité sur l'axe des réels que l'on définit comme suit :

$$\begin{aligned} P(X = x) &= P\{\lambda : X(\lambda) = x\} \\ P(X \leq x) &= P\{\lambda : X(\lambda) \leq x\} \\ P(x_1 < X \leq x_2) &= P\{\lambda : x_1 < X(\lambda) \leq x_2\} \end{aligned}$$

Si X ne peut prendre qu'un ensemble dénombrable de valeurs distinctes, on dit que X est une *variable aléatoire discrète*. Si X peut prendre une valeur quelconque sur un ou plusieurs intervalles de la droite réelle, alors X est une *variable aléatoire continue*.

Le nombre d'appels téléphoniques arrivant à un bureau est un bon exemple de variable aléatoire discrète, tandis que la date exacte de l'arrivée d'un de ces appels téléphoniques est une variable aléatoire continue.

B. Fonction de répartition

La *fonction de répartition* de la variable aléatoire X a pour définition :

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (5.31)$$

Elle est définie quel que soit x variant de $-\infty$ à $+\infty$.

Propriétés de $F_X(x)$:

$$1. \quad F_X(-\infty) = 0 \quad (5.32a)$$

$$2. \quad F_X(\infty) = 1 \quad (5.32b)$$

$$3. \quad 0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad (5.32c)$$

$$4. \quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad \text{si } x_1 < x_2 \quad (5.32d)$$

$$5. \quad P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) \quad (5.32e)$$

$$6. \quad F_X(x^+) = F_X(x) \quad \text{où } F_X(x^+) = \lim_{0 < \varepsilon \rightarrow 0} F(x + \varepsilon) \quad (5.32f)$$

C. Fonction de densité

La *densité de probabilité* de la variable aléatoire X a pour définition :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (5.33)$$

Propriétés de $f_X(x)$:

$$1. \quad f_X(x) \geq 0 \quad (5.34a)$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (5.34b)$$

$$3. \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi \quad (5.34c)$$

$$4. \quad P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx \quad (5.34d)$$

Si X est une variable aléatoire discrète, on a :

$$f_X(x) = \sum_i P(x_i) \delta(x - x_i) \quad (5.35)$$

où $P(x_i) = P(X = x_i)$ et $\delta(x)$ est la fonction impulsion unitaire (voir relation 1.16).

D. Répartition conjointe

Soit deux variables aléatoires X et Y définies sur S . Les événements

$$\{X \leq x, Y \leq y\} = \{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}$$

se composent de toutes les épreuves λ de S pour lesquelles on a simultanément $X(\lambda) \leq x$ et $Y(\lambda) \leq y$.

On définit $F_{XY}(x, y)$, *fonction de répartition de probabilité conjointe* de X et Y , de la façon suivante :

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (5.36)$$

Cette fonction est définie quels que soient x et y variant de $-\infty$ à $+\infty$. Comme $\{X \leq \infty\}$ et $\{Y \leq \infty\}$ sont des événements certains, on peut écrire que :

$$\{X \leq x, Y \leq \infty\} = \{X \leq x\} \quad \{X \leq \infty, Y \leq y\} = \{Y \leq y\}$$

d'où l'on déduit :

$$F_{XY}(x, \infty) = F_X(x) \quad (5.37a)$$

$$F_{XY}(\infty, y) = F_Y(y) \quad (5.37b)$$

La fonction de densité de probabilité conjointe de X et Y a pour expression :

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y) \quad (5.38)$$

ce qui implique que :

$$f_{XY}(x, y) \geq 0 \quad (5.39)$$

En intégrant deux fois la relation (5.38), on obtient :

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{XY}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5.40)$$

ce qui permet d'écrire que :

$$F_{XY}(\infty, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(\xi, \eta) d\xi d\eta = 1 \quad (5.41)$$

E. Répartition marginale

Les fonctions $F_X(x)$ et $F_Y(y)$ sont appelées *fonctions de répartition de probabilité marginales* lorsqu'elles sont évaluées au moyen des expressions :

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty) = \int_{-\infty}^x d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(\xi, y) dy \quad (5.42a)$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y) = \int_{-\infty}^y d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, \eta) dx \quad (5.42b)$$

Les densités de probabilité marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$ ont pour expression :

$$f_X(x) = F'_X(x) \quad f_Y(y) = F'_Y(y)$$

En dérivant les relations (5.42a) et (5.42b), on obtient :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad (5.43a)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx \quad (5.43b)$$

F. Répartition conditionnelle

La fonction de répartition de probabilité conditionnelle de X par rapport à l'événement B a pour définition :

$$F_X(x|B) = P(X \leq x|B) = \frac{P(X \leq x, B)}{P(B)} \quad P(B) \neq 0 \quad (5.44)$$

où $P(X \leq x, B)$ est la probabilité de l'événement conjoint $\{X \leq x\} \cap B$.

La fonction de densité de probabilité conditionnelle de X par rapport à B a pour définition :

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx} \quad (5.45)$$

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur S . La densité de probabilité conditionnelle de X par rapport à l'événement $\{Y = y\}$ a pour valeur :

$$f_{X|Y} = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \quad f_Y(y) \neq 0 \quad (5.46)$$

où $f_Y(y)$ est la densité de probabilité marginale de Y .

G. Variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad (5.47)$$

ou encore :

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (5.48)$$

Si X et Y sont indépendantes, on déduit, des relations (5.46) et (5.48) que :

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \quad (5.49)$$

5.4 FONCTIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES

A. Variable aléatoire $g(X)$

Etant donné une variable aléatoire X et une fonction $g(x)$, l'expression

$$Y = g(X) \quad (5.50)$$

constitue une autre variable aléatoire. Etant donné λ appartenant à S , $X(\lambda)$ est un nombre et $g[X(\lambda)]$ est un autre nombre, valeur $Y(\lambda) = g[X(\lambda)]$ associé à la variable aléatoire Y . On a ainsi :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) \quad (5.51)$$

B. Détermination de $f_Y(y)$

Pour trouver la densité de probabilité de $f_Y(y)$, on résout l'équation $y = g(x)$. En désignant par x_k ses racines réelles, on a :

$$y = g(x_1) = \dots = g(x_k) = \dots \quad (5.52)$$

donc

$$f_Y(y) = \sum_k \frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|} \quad (5.53)$$

où $g'(x)$ est la dérivée de $g(x)$.

C. Une fonction de deux variables

Etant donné deux variables aléatoires X et Y , ainsi qu'une fonction $g(x, y)$, l'expression

$$Z = g(X, Y) \quad (5.54)$$

constitue une autre variable aléatoire. Soit z un nombre donné, on appelle D_z la région du plan xy telle que $g(x, y) \leq z$. Alors

$$\{Z \leq z\} = \{g(X, Y) \leq z\} = \{(X, Y) \in D_z\}$$

où $\{(X, Y) \in D_z\}$ est l'événement constitué par tous les résultats λ tels que le point $(X(\lambda), Y(\lambda))$ appartient à D_z .

On en déduit que :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\{(X,Y) \in D_z\} = \iint_{D_z} f_{XY}(x,y) dx dy \quad (5.55)$$

La densité de probabilité de Z a pour expression :

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} \quad (5.56)$$

D. Deux fonctions de deux variables

Etant donné X et Y dont la probabilité conjointe est $f_{XY}(x,y)$ et deux fonctions $g(x,y)$ et $h(x,y)$, on forme deux autres variables aléatoires qui ont pour expression :

$$Z = g(X,Y) \quad W = h(X,Y) \quad (5.57)$$

Pour trouver la densité de probabilité conjointe $f_{ZW}(z,w)$ on résout le système suivant :

$$g(x,y) = z \quad h(x,y) = w \quad (5.58)$$

En appelant (x_k, y_k) ses racines,

$$g(x_k, y_k) = z \quad h(x_k, y_k) = w$$

alors

$$f_{ZW}(z,w) = \sum_k \frac{f_{XY}(x_k, y_k)}{|J(x_k, y_k)|} = \sum_k f_{XY}(x_k, y_k) |\bar{J}(x_k, y_k)| \quad (5.59)$$

où

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \bar{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

où l'on a reconnu dans $J(x,y)$ le *jacobien* de la transformation (5.58).

5.5 MOYENNES STATISTIQUES

A. Espérance mathématique

L'*espérance mathématique* de la variable X a pour expression :

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (5.61)$$

Si X est une fonction aléatoire discrète, en invoquant la relation (5.35), il vient :

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\sum_i P(x_i) \delta(x - x_i) \right] dx = \sum_i x_i P(x_i) \quad (5.62)$$

Lorsque les probabilités sont uniformément réparties, c'est-à-dire lorsque $P(x_i) = 1/N$ ($i = 1, \dots, N$) la relation (5.62) donne la moyenne arithmétique des x_i , à savoir :

$$\mu_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (5.63)$$

L'espérance mathématique de $Y = g(X)$ a pour expression :

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \quad (5.64)$$

soit

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (5.65)$$

Si X est une variable discrète, la relation (5.65) peut être transformée comme la relation (5.62) :

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) P(x_i) \quad (5.66)$$

L'espérance mathématique de $Z = g(X, Y)$ a pour expression :

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz \quad (5.67)$$

soit encore

$$E[Z] = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy \quad (5.68)$$

Si les variables X et Y sont discrètes, la relation (5.68) devient :

$$E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_k g(x_i, y_k) P(x_i, y_k) \quad (5.69)$$

où $P(x_i, y_k) = P[X = x_i, Y = y_k]$.

On notera que l'espérance mathématique est douée de linéarité, c'est-à-dire que

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (5.70)$$

$$E[cX] = cE[X] \quad (5.71)$$

où c est une constante (voir problème 5.40).

B. Moments et variance

Le *moment d'ordre n* de la variable aléatoire X a pour expression :

$$m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (5.72)$$

Le *moment centré d'ordre n* de X a pour définition :

$$E[(X - \mu_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^n f_X(x) dx \quad (5.73)$$

où $\mu_X = E[X]$.

Le *moment centré d'ordre deux* de X est appelé *variance de X* , soit :

$$\text{var}[X] = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] \quad (5.74)$$

La racine carrée de la variance, notée σ_X , est appelée *écart-type* ou *écart quadratique moyen* de X . La variance est une mesure de la dispersion des valeurs de X autour de sa valeur moyenne μ_X . En utilisant les relations (5.70) et (5.71), la relation (5.74) peut se simplifier :

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (5.75)$$

C. Moments conjoints et covariance

Soit X et Y deux variables aléatoires de probabilité conjointe $f_{XY}(x, y)$. Le *moment conjoint d'ordre n* de X et Y a pour définition :

$$m_{nk} = E[X^n Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k f_{XY}(x, y) dx dy \quad (5.76)$$

où n et k sont deux entiers positifs quelconques.

La somme $n + k$ est appelée l'*ordre du moment*.

Le moment conjoint de X et Y dans le cas où $n = k = 1$ s'appelle la *corrélacion* de X et Y , que l'on note R_{XY} , et qui a pour expression :

$$R_{XY} = m_{11} = E[XY] \quad (5.77)$$

La covariance de X et Y , notée C_{XY} , se définit comme suit :

$$C_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (5.78)$$

En développant la relation (5.78), on obtient :

$$C_{XY} = R_{XY} - \mu_X \mu_Y = E[XY] - E[X]E[Y] \quad (5.79)$$

Le *coefficient de corrélacion* de X et de Y a pour définition :

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (5.80)$$

où σ_X et σ_Y sont respectivement les écarts-types de X et de Y .

On peut démontrer (problème 5.49) que :

$$|\rho_{XY}| \leq 1 \quad |C_{XY}| \leq \sigma_X \sigma_Y \quad (5.81)$$

Deux variables aléatoires X et Y sont dites *non corrélées* si et seulement si :

$$C_{XY} = 0 \quad (5.82)$$

D'après les relations (5.79) et (5.82), on peut conclure que X et Y ne sont pas corrélées si et seulement si :

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad (5.83)$$

Deux événements sont dits *orthogonaux* (au sens de la corrélacion) si :

$$R_{XY} = E[XY] = 0 \quad (5.84)$$

D'après la relation (5.84), il est évident que si X et Y sont des variables non corrélées à valeur moyenne non nulle, X et Y ne peuvent être orthogonales.

D. Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice du moment d'une variable X a pour définition :

$$M_X(\lambda) = E[e^{\lambda X}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{\lambda x} dx \quad (5.85)$$

où λ est une variable réelle. On a donc la relation :

$$m_k = E[X^k] = M_X^{(k)}(0) \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.86)$$

où

$$M_X^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k M_X(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=0}$$

E. Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X a pour définition :

$$\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\omega x} dx \quad (5.87)$$

où ω est une variable réelle. Cette fonction passe par un maximum à l'origine et vérifie la propriété :

$$|\Phi_X(\omega)| \leq \Phi_X(0) = 1 \quad (5.88)$$

Comme on le voit d'après la relation (5.87), $\Phi_X(\omega)$ est la transformée de Fourier (au signe de j près) de $f_X(x)$. C'est la raison pour laquelle si l'on connaît $\Phi_X(\omega)$, on peut en déduire $f_X(x)$ par transformation de Fourier inverse.

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega) e^{-j\omega x} d\omega \quad (5.89)$$

La fonction caractéristique conjointe de X et Y a pour définition :

$$\Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2) = E[e^{j(\omega_1 X + \omega_2 Y)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy \quad (5.90)$$

où ω_1 et ω_2 sont des variables réelles. Cette expression s'identifie, au signe de j près, à la transformée de Fourier bidimensionnelle de $f_{XY}(x, y)$. Par transformation de Fourier inverse, il vient :

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2) e^{-j(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (5.91)$$

D'après les relations (5.87) et (5.90), on a :

$$\Phi_X(\omega) = \Phi_{XY}(\omega, 0) \quad (5.92a)$$

$$\Phi_Y(\omega) = \Phi_{XY}(0, \omega) \quad (5.92b)$$

Expressions qui sont appelées *fonctions caractéristiques marginales*.

5.6 LOIS DE RÉPARTITION PARTICULIÈRES

On rencontre en théorie des communications plusieurs lois remarquables.

A. Loi binomiale

Une variable aléatoire suit une *loi de répartition binomiale d'ordre n* si elle prend les valeurs $0, 1, \dots, n$ avec une probabilité P telle que

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (5.93)$$

où $0 < p < 1$, $p + q = 1$, $k = 0, 1, \dots, n$, et

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

La densité de probabilité de X a pour expression :

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta(x - k) \quad (5.94)$$

et la fonction de répartition correspondante a pour expression :

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} u(x - k) \quad (5.95)$$

La figure 5-2 illustre la densité de probabilité et la loi de répartition de la loi binomiale pour $n = 6$ et $p = 0,6$.

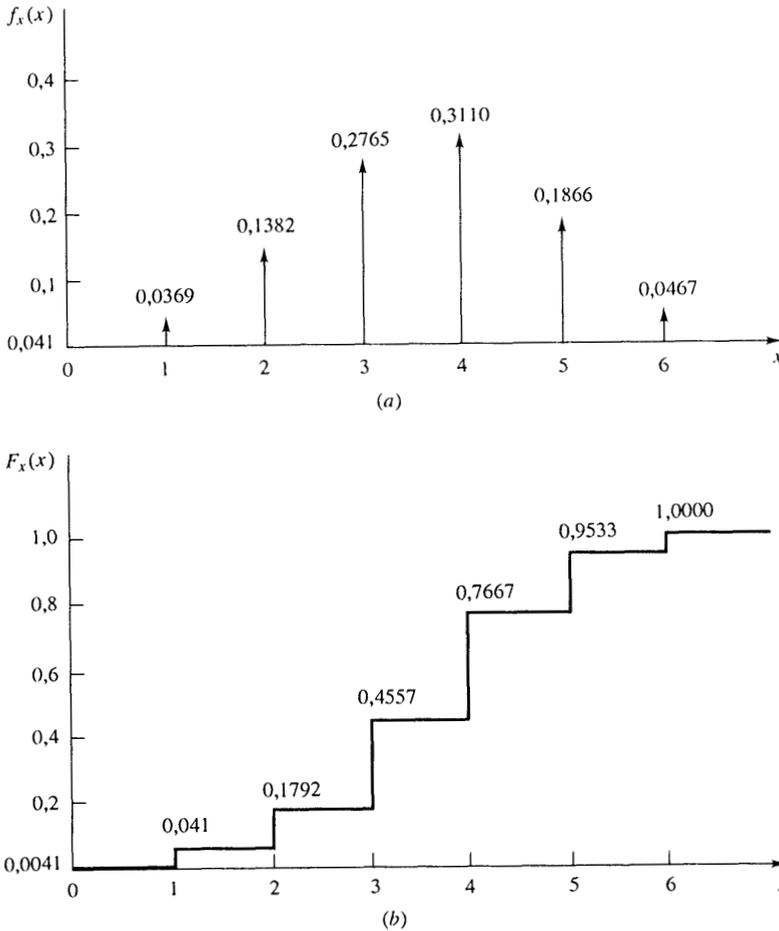


Fig. 5-2 Probabilité et répartition d'une loi binomiale pour $n = 6$ et $p = 0,6$

La moyenne et la variance de X ont pour expression :

$$\mu_X = E[X] = np \tag{5.96}$$

$$\sigma_X^2 = npq = np(1 - p) \tag{5.97}$$

La variable aléatoire X qui suit une loi binomiale est une variable discrète associée à la répétition d'une épreuve. Supposons que l'on fasse une épreuve au cours de laquelle on ne s'intéresse qu'à la réalisation de l'événement A . Si A se produit, on dit que l'épreuve est un succès; si A ne se produit pas (\bar{A} s'est donc produit), l'épreuve est un échec. Soit $P(A) = p$ la probabilité pour que A se produise, ce qui implique que $P(\bar{A}) = q = 1 - p$. On répète n fois l'épreuve, avec les hypothèses suivantes :

1. $P(A)$ conserve la même valeur à chaque essai.
2. Les n essais sont indépendants.

Un élément de l'univers associé est constitué d'une séquence de n A et \bar{A} . Un élément constitué de k A et $(n - k)$ \bar{A} se voit attribuer une probabilité de valeur $p^k q^{n-k}$. Si donc X est la variable représentant le nombre de fois où A se produit sur n essais, X prend des valeurs entières $k = 0, 1, \dots, n$.

En théorie des télécommunications, la loi binomiale apparaît lorsque l'on s'intéresse au nombre d'erreurs qui affectent un message de n bits (voir problèmes 5-12 et 5.36).

B. Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire suit une *loi de Poisson* de paramètre α si elle prend les valeurs $0, 1, \dots, n, \dots$ avec une probabilité $P(X)$ telle que :

$$P(X = k) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.98)$$

La densité de probabilité de X a pour expression :

$$f_X(x) = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \delta(x - k) \quad (5.99)$$

La fonction de répartition correspondante a pour expression :

$$F_X(x) = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} u(x - k) \quad (5.100)$$

On remarquera que le tracé de ces deux fonctions s'apparente fortement à ceux que nous avons obtenus pour la loi binomiale (figure 5-2).

La moyenne et la variance de X ont pour expression :

$$\mu_X = E[X] = \alpha \quad (5.101)$$

$$\sigma_X^2 = \alpha \quad (5.102)$$

La loi de Poisson s'introduit naturellement dans certains problèmes de comptage, par exemple le nombre d'appels téléphoniques aboutissant à un central, pendant un laps de temps donné. En télécommunication numérique, on retrouve la loi de Poisson lorsque l'on transmet un grand volume de données avec un faible taux d'erreur. La loi binomiale devient lourde à manipuler dans de tels cas. Si le taux d'erreur conserve une valeur finie égale à α , on peut approcher une loi binomiale au moyen d'une loi de Poisson (voir problèmes 5.13 et 5.14).

C. Loi gaussienne, dite loi normale

On dit que la variable aléatoire X suit une *loi de Gauss* appelée aussi *loi normale* si sa densité de probabilité a pour expression :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad (5.103)$$

La fonction de répartition de X a pour expression :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-(\xi-\mu)^2/(2\sigma^2)} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-\lambda^2/2} d\lambda \end{aligned} \quad (5.104)$$

Cette intégrale ne peut être calculée analytiquement, il faut en faire une évaluation numérique, au moyen de la fonction $Q(z)$, définie de la façon suivante :

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda \quad (5.105)$$

On peut donc écrire la relation (5.104) sous la forme :

$$F_X(x) = 1 - Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (5.106)$$

Cette fonction $Q(z)$ est la *fonction complémentaire de la fonction d'erreur*. Elle est tabulée en annexe C, tableau C-1.

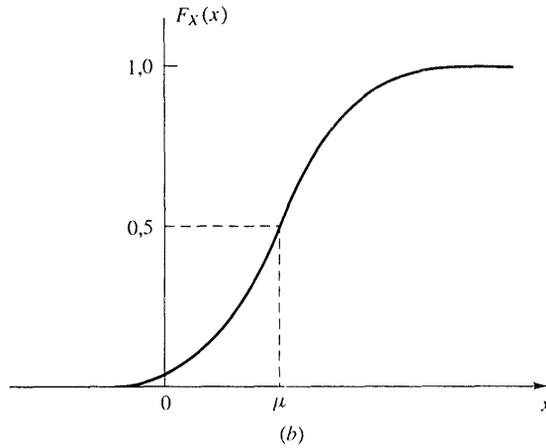
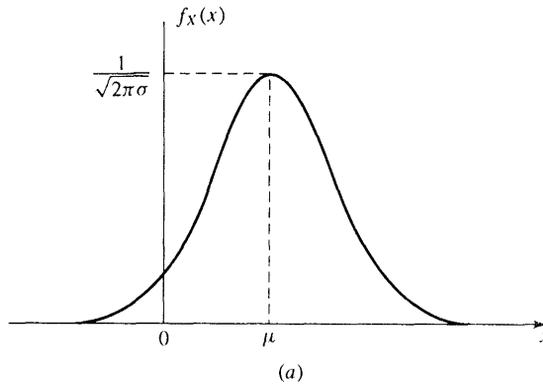


Fig. 5-3 Loi de Gauss (loi normale)

Les figures 5-3(a) et (b) représentent respectivement la densité de probabilité et la fonction de répartition de X . La moyenne et la variance de X ont pour expression :

$$\mu_X = E[X] = \mu \quad (5.107)$$

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \sigma^2 \quad (5.108)$$

On utilisera la notation $N(\mu; \sigma^2)$ pour signifier que X suit une loi normale (gaussienne), de moyenne μ et de variance σ^2 . Notons au passage que lorsque $X = N(0; 1)$, c'est-à-dire lorsque X a une valeur moyenne nulle et une variance unitaire, on dit que X est une *variable aléatoire gaussienne normalisée*.

La loi normale, ou loi de Gauss, joue un rôle fondamental dans l'étude des phénomènes aléatoires que l'on rencontre en physique ou dans la nature. La plupart des processus aléatoires naturels sont pratiquement gaussiens. Cette loi doit surtout son importance au remarquable *théorème de la limite centrée* qui établit que la somme d'un grand nombre de variables aléatoires, dans certaines conditions, suit une loi normale.

Problèmes résolus

PROBABILITÉS

- 5.1.** On observe la somme des chiffres obtenus en lançant une paire de dés. Définissez l'univers associé à cette expérience et, en supposant que les résultats obtenus sur un dé sont équiprobables, évaluer (a) la probabilité d'obtenir une somme égale à 7, et (b) la probabilité pour que cette somme ait une valeur supérieure à 10.

L'espace des événements élémentaires de ce tirage aléatoire comporte 36 éléments, comme le montre la figure 5-4. Soit λ_{ij} l'événement élémentaire correspondant au résultat i sur le premier dé et au résultat j sur le second. On suppose que les dés ne sont pas pipés et que les valeurs affichées par chacun des dés sont équiprobables, soit $P(\lambda_{ij}) = 1/36$.

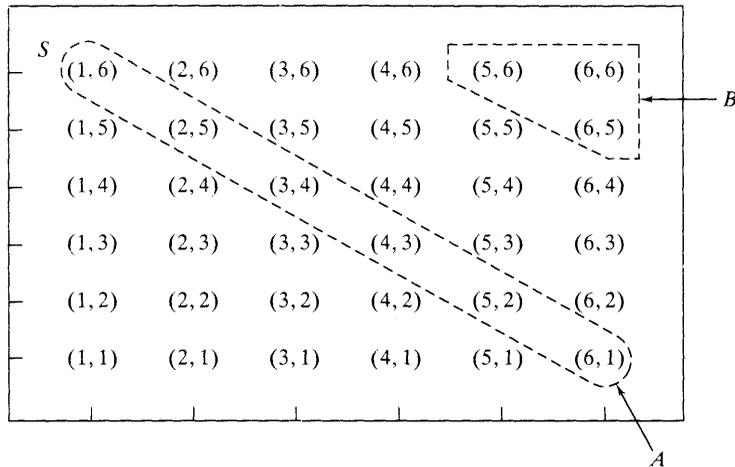


Fig. 5-4 Univers des lancers d'une paire de dés

- (a) Soit A l'événement «la somme est égale à 7». Comme les événements λ_{ij} sont mutuellement exclusifs et d'après la figure 5-4, on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\lambda_{16} \cup \lambda_{25} \cup \lambda_{34} \cup \lambda_{43} \cup \lambda_{52} \cup \lambda_{61}) \\ &= P(\lambda_{16}) + P(\lambda_{25}) + P(\lambda_{34}) + P(\lambda_{43}) + P(\lambda_{52}) + P(\lambda_{61}) \\ &= 6(1/36) = 1/6 \end{aligned}$$

- (b) Soit B l'événement «la somme est supérieure à 10». Si l'on observe la figure 5-4, on obtient :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\lambda_{56} \cup \lambda_{65} \cup \lambda_{66}) = P(\lambda_{56}) + P(\lambda_{65}) + P(\lambda_{66}) \\ &= 3(1/36) = 1/12 \end{aligned}$$

- 5.2.** En appliquant les propriétés axiomatiques des probabilités, (a) établir la relation (5.19), c'est-à-dire :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

et (b) la relation (5.18), c'est-à-dire :

$$P(A) \leq 1$$

- (a) On peut écrire que :

$$S = A \cup \bar{A} \quad \text{et} \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

En appliquant les axiomes 1 et 3, il vient :

$$P(S) = 1 = P(A) + P(\bar{A})$$

soit

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

(b) D'après la relation (5.19), on peut écrire :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

D'après l'axiome 1, $P(\bar{A}) \geq 0$, d'où l'on conclut que :

$$P(A) \leq 1$$

5.3. Vérifier la relation (5.20) au moyen de l'axiomatique des probabilités, à savoir que :

$$P(\emptyset) = 0$$

On sait que l'on a :

$$A = A \cup \emptyset \quad \text{et} \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

Donc, d'après l'axiome 3 :

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$$

d'où l'on conclut que :

$$P(\emptyset) = 0$$

5.4. Vérifier la relation (5.22), au moyen de l'axiomatique des probabilités, soit :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

On décompose d'abord $A \cup B$, A et B comme unions d'événements exclusifs. En exploitant le diagramme de Venn de la figure 5-5, on peut écrire :

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

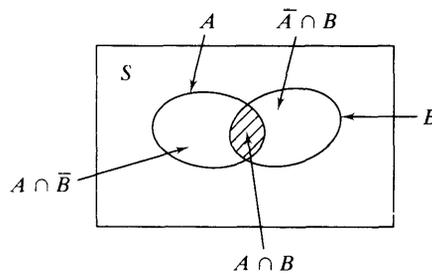


Fig. 5.5

Puis, d'après l'axiome 3 :

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \quad (5.109)$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \quad (5.110)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \quad (5.111)$$

D'après les relations (5.110) et (5.111) :

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

En portant ces égalités dans la relation (5.109), on obtient :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5.5. Etablir le théorème de Bayes (5.24), c'est-à-dire :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

D'après la définition de la probabilité conditionnelle (5.23) et tenant compte de la relation (5.8), nous avons :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (5.112)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (5.113)$$

En rapprochant les relations (5.112) et (5.113), on obtient :

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \quad (5.114)$$

D'où l'on tire :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

5.6. Etablir la relation (5.30), c'est-à-dire :

$$P(B) = \sum_{k=1}^N P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^N P(B|A_k)P(A_k)$$

Du fait que $B \cap S = B$, et en invoquant la relation (5.29), on peut écrire :

$$\begin{aligned} B &= B \cap S = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N) \\ &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_N) \end{aligned} \quad (5.115)$$

Les événements $B \cap A_k$, ($k = 1, 2, \dots, N$) sont mutuellement exclusifs, comme le montre le diagramme de Venn de la figure 5-6. L'axiome 3 de la définition des probabilités ainsi que la relation (5.144) nous permettent d'écrire :

$$P(B) = P(B \cap S) = \sum_{k=1}^N P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^N P(B|A_k)P(A_k)$$

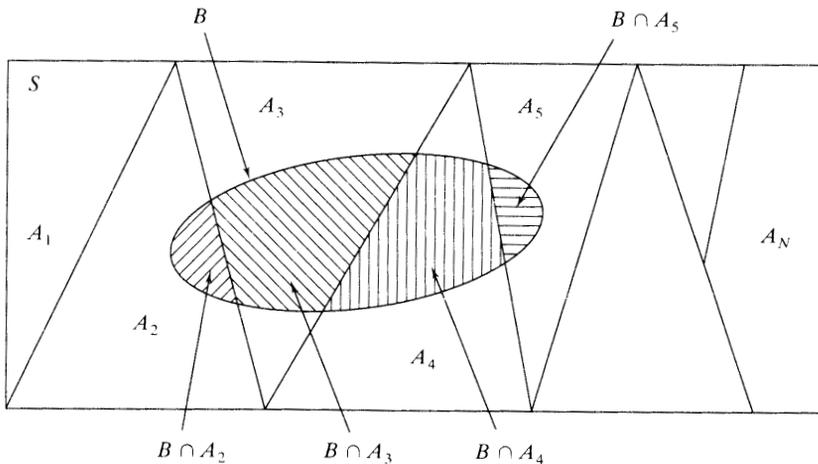


Fig. 5-6

5.7. Considérons le circuit d'interrupteurs a , b et c représenté par la figure 5-7. Soit respectivement A, B et C les événements « a est fermé», « b est fermé» et « c est fermé». Chacun de ces interrupteurs a une probabilité q d'être ouvert. En supposant que ces événements sont indépendants et que $q = 0,5$, calculer la probabilité pour que la continuité de ce circuit soit établie.

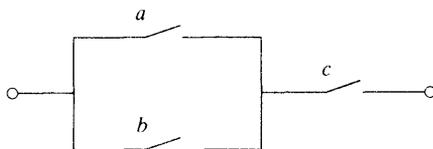


Fig. 5-7 Circuit d'interrupteurs

D'après la figure 5-7, il est évident que la continuité du circuit impose la fermeture simultanée de l'interrupteur c et de l'un/et l'autre des interrupteurs a et b . Comme $P(A) = P(B) = P(C) = p = 1 - q = 0,5$, on obtient, en appliquant les relations (5.22) et (5.25) :

$$\begin{aligned}
 P(\text{continuité}) &= P[(A \cup B) \cap C] \\
 &= P(A \cup B)P(C) \\
 &= [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]P(C) \\
 &= (p + p - p^2)p = (2 - p)p^2 = 0,375
 \end{aligned}$$

5.8. Une liaison numérique (figure 5-8) fonctionne en binaire, transmettant des 0 et des 1. Le bruit de cette liaison induit une confusion, ce qui conduit à interpréter un 1 comme un 0 et réciproquement. Soit respectivement m_0 et m_1 les événements «transmission d'un 0» et «transmission d'un 1»; soit r_0 et r_1 les événements «réception d'un 0» et «réception d'un 1». En faisant l'hypothèse $P(m_0) = 0,5$, $P(r_1|m_0) = p = 0,1$ et $P(r_0|m_1) = q = 0,2$.

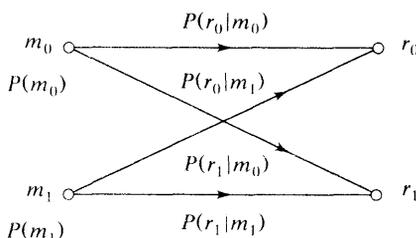


Fig. 5-8 Liaison binaire

- (a) Evaluer $P(r_0)$ et $P(r_1)$.
- (b) Si l'on reçoit un 0, quelle est la probabilité d'émission d'un 0?
- (c) Si l'on reçoit un 1, quelle est la probabilité d'émission d'un 1?
- (d) Calculer la probabilité d'erreur P_e .
- (e) Calculer la probabilité pour que le signal transmis soit correctement reçu par le récepteur.
- (a) D'après la figure 5-8, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 P(m_1) &= 1 - P(m_0) = 1 - 0,5 = 0,5 \\
 P(r_0|m_0) &= 1 - P(r_1|m_0) = 1 - p = 1 - 0,1 = 0,9 \\
 P(r_1|m_1) &= 1 - P(r_0|m_1) = 1 - q = 1 - 0,2 = 0,8
 \end{aligned}$$

En invoquant la relation (5.30), on obtient :

$$P(r_0) = P(r_0|m_0)P(m_0) + P(r_0|m_1)P(m_1) = 0,9(0,5) + 0,2(0,5) = 0,55$$

$$P(r_1) = P(r_1|m_0)P(m_0) + P(r_1|m_1)P(m_1) = 0,1(0,5) + 0,8(0,5) = 0,45$$

(b) En appliquant le théorème de Bayes (5.24), on peut écrire :

$$P(m_0|r_0) = \frac{P(m_0)P(r_0|m_0)}{P(r_0)} = \frac{(0,5)(0,9)}{0,45} = 0,818$$

(c) De la même façon :

$$P(m_1|r_1) = \frac{P(m_1)P(r_1|m_1)}{P(r_1)} = \frac{(0,5)(0,8)}{0,45} = 0,889$$

(d) La probabilité d'erreur a pour expression :

$$P_e = P(r_1|m_0)P(m_0) + P(r_0|m_1)P(m_1) = 0,1(0,5) + 0,2(0,5) = 0,15$$

(e) La probabilité pour que le signal ait été correctement transmis et reçu a pour expression :

$$P_c = P(r_0|m_0)P(m_0) + P(r_1|m_1)P(m_1) = 0,9(0,5) + 0,8(0,5) = 0,85$$

On notera que la probabilité d'erreur P_e a pour valeur :

$$P_e = 1 - P_c = 1 - 0,85 = 0,15$$

5.9. On observe six impulsions consécutives sur un canal de communication, chacune d'entre elles pouvant être positive, négative ou nulle. On suppose que les observations sont indépendantes. On note respectivement $x_i = +1$, $x_i = -1$ et $x_i = 0$ les événements «la i ème impulsion est positive», «la i ème impulsion est négative» et «la i ème impulsion est nulle». On suppose que :

$$P(x_i = +1) = p = 0,4 \quad P(x_i = -1) = q = 0,3 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, 6$$

(a) Quelle est la probabilité pour que toutes les impulsions soient positives?

(b) Quelle est la probabilité pour que les trois premières impulsions soient positives, les deux suivantes nulles et la dernière négative?

(a) Comme il s'agit d'événements indépendants, la relation (5.27) nous permet d'écrire la probabilité pour que toutes les impulsions soient positives sous la forme :

$$\begin{aligned} P\left[\bigcap_{i=1}^6 (x_i = +1)\right] &= P(x_1 = +1)P(x_2 = +1)P(x_3 = +1)P(x_4 = +1)P(x_5 = +1)P(x_6 = +1) \\ &= p^6 = (0,4)^6 = 0,0041 \end{aligned}$$

(b) En vertu des hypothèses faites, on peut écrire que :

$$P(x_i = 0) = 1 - p - q = 0,3$$

La probabilité d'avoir trois impulsions positives, puis deux impulsions nulles, puis d'une impulsion négative a pour valeur :

$$\begin{aligned} &P[(x_1 = +1) \cap (x_2 = +1) \cap (x_3 = +1) \cap (x_4 = 0) \cap (x_5 = 0) \cap (x_6 = -1)] \\ &= P(x_1 = +1)P(x_2 = +1)P(x_3 = +1)P(x_4 = 0)P(x_5 = 0)P(x_6 = -1) \\ &= p^3(1 - p - q)^2q = (0,4)^3(0,3)^2(0,3) = 0,0017 \end{aligned}$$

5.10. Soit A et B deux événements définis sur un univers S . Montrer que si $P(A)$ et $P(B)$ sont non nulles, les événements A et B ne peuvent être à la fois mutuellement exclusifs et indépendants.

Supposons que A et B soient mutuellement exclusifs et que $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$. On sait donc que $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ et $P(A)P(B) \neq 0$, par conséquent :

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Ce qui prouve que A et B ne sont pas indépendants.

5.11. Montrer que, si les événements A et B sont indépendants, alors

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) \quad (5.116)$$

D'après le diagramme de Venn représenté sur la figure 5-1, ou en invoquant les relations (5.1), (5.3) et (5.11), il vient :

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

et

$$(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$$

En appliquant l'axiome 3, relation (5.17), on a :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

Comme A et B sont indépendants et en tenant compte des relations (5.25) et (5.19), on obtient :

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B}) \end{aligned}$$

VARIABLES ALÉATOIRES, FONCTIONS DE RÉPARTITION ET DENSITÉS

5.12. Un générateur de signal délivre des bits 0 et 1 de façon aléatoire, avec des probabilités respectives de 0,4 et 0,6.

(a) Quelle est la probabilité pour que l'on ait deux 1 et trois 0 dans une suite de 5 bits?

(b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins trois 1 apparaissent dans une suite de 5 bits?

(a) Soit X la variable aléatoire qui a pour valeur le nombre de 1 apparaissant dans une suite de 5 bits. Comme un bit ne peut prendre que l'une des deux valeurs 1 ou 0, comme la probabilité d'avoir un 1 est constante et comme le nombre de bits de la suite a une valeur fixe égale à 5, on est en présence d'une loi binomiale (voir définition 5.93), dont les paramètres sont $n = 5$ et $k = 2$. La probabilité d'avoir deux 1 et trois 0 dans une suite de 5 bits a donc pour expression :

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} (0,6)^2 (0,4)^3 = 0,23$$

(b) La probabilité d'avoir au moins trois 1 dans une suite de 5 bits a pour expression :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$$

où

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^2 \binom{5}{k} (0,6)^k (0,4)^{5-k} = 0,317$$

Soit

$$P(X \geq 3) = 1 - 0,317 = 0,683$$

5.13. Montrer que si la valeur de n est grande devant k ($n \gg k$) et la valeur de p est petite ($p \ll 1$), la loi binomiale (définition 5.93) peut être approchée par la loi de Poisson (définition 5.98) :

$$P(X = k) \approx e^{-np} \frac{(np)^k}{k!} \quad (5.117)$$

D'après la relation (5.93) :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k q^{n-k} \end{aligned} \quad (5.118)$$

Lorsque $n \gg k$ et $p \ll 1$, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} n(n-1)\cdots(n-k+1) &\approx n \times n \times n \cdots \times n = n^k \\ q &= 1 - p \approx e^{-p} \quad q^{n-k} \approx e^{-(n-k)p} \approx e^{-np} \end{aligned}$$

En portant ces approximations dans la relation (5.118), il vient :

$$P(X = k) \approx e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$$

5.14. Une liaison perturbée par un bruit présente une probabilité d'erreur par digit de 0,01.

- (a) Calculer la probabilité de recevoir plus d'un digit erroné sur 10.
 (b) Reprendre la question (a) en utilisant l'approximation de Poisson (relation 5.117).
 (a) Soit X la variable de la loi binomiale représentant le nombre d'erreurs enregistrées sur dix digits reçus. En appliquant la relation (5.93), on obtient :

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} (0,01)^0 (0,99)^{10} - \binom{10}{1} (0,01)^1 (0,99)^9 \\ &= 0,0042 \end{aligned}$$

- (b) En appliquant la relation (5.117) avec $np_e = 10(0,01) = 0,1$ on a :

$$P(X > 1) \approx 1 - e^{-0,1} \frac{(0,1)^0}{0!} - e^{-0,1} \frac{(0,1)^1}{1!} = 0,0047$$

5.15. Trouver les valeurs des constantes a et b de façon que

$$F_X(x) = [1 - ae^{-x/b}]u(x)$$

soit une fonction de répartition valide, $u(x)$ étant la fonction échelon unitaire.

Comme $u(-\infty) = 0$, la propriété 1 de $F_X(x)$, relation (5.32a), $F_X(-\infty) = 0$, est satisfaite. La propriété 2 de $F_X(x)$, relation (5.32b), $F_X(\infty) = 1$, est satisfaite pour $b > 0$. La propriété 3, $0 \leq F_X(x) \leq 1$, impose que $0 \leq a \leq 1$.

La fonction $F_X(x)$ est tracée sur la figure 5-9, pour des valeurs $0 \leq a \leq 1$ et $b > 0$. Ce tracé montre que les autres propriétés de $F_X(x)$, relations (5.32e) et (5.32f) sont aussi satisfaites.

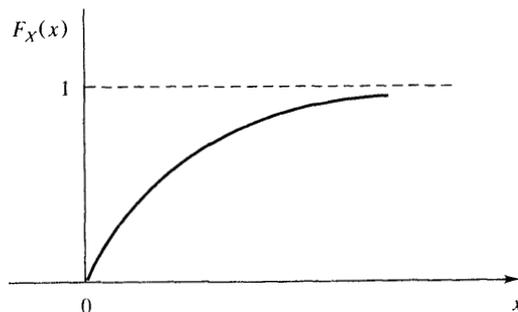


Fig. 5-9

5.16. La densité de probabilité d'une variable aléatoire X a pour expression :

$$f_X(x) = \begin{cases} k & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

où k est une constante.

- (a) Déterminer la valeur de k .
- (b) Soit $a = -1$ et $b = 2$. Evaluer $P(|X| \leq c)$ pour $c = 1/2$.
- (a) D'après la propriété 1 de $f_X(x)$, relation (5.34a), k doit être une constante positive. D'après la propriété 2 de $f_X(x)$, relation (5.34b) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_a^b k dx = k(b - a) = 1$$

d'où l'on tire $k = 1/(b - a)$. Ainsi :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \tag{5.119}$$

Une variable aléatoire X présentant cette densité de probabilité est dite *uniforme*.

- (b) Avec $a = -1$ et $b = 2$, on a :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Cette fonction de répartition est tracée sur la figure 5-10. D'après la relation (5.34d), on peut écrire :

$$P(|X| \leq 1/2) = P(-1/2 \leq X \leq 1/2) = \int_{-1/2}^{1/2} f_X(x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} (1/3) dx = 1/3$$

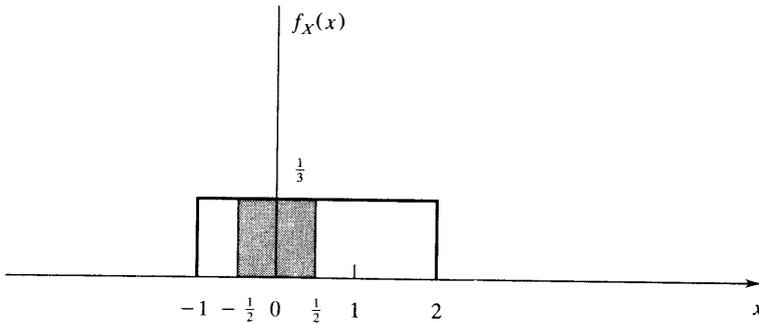


Fig. 5-10 Répartition uniforme

5.17. La densité de probabilité de X a pour expression :

$$f_X(x) = ke^{-ax}u(x)$$

où a est une constante positive. Déterminer la valeur de la constante k et dessiner $f_X(x)$.

D'après la propriété 1 de $f_X(x)$, relation (5.34a), on doit assurer $k \geq 0$. D'après la propriété 2 de $f_X(x)$, relation (5.34b) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = k \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{k}{a} = 1$$

d'où l'on déduit que $k = a$, ainsi :

$$f_X(x) = ae^{-ax}u(x) \quad a > 0 \tag{5.120}$$

fonction qui est représentée sur la figure 5-11.

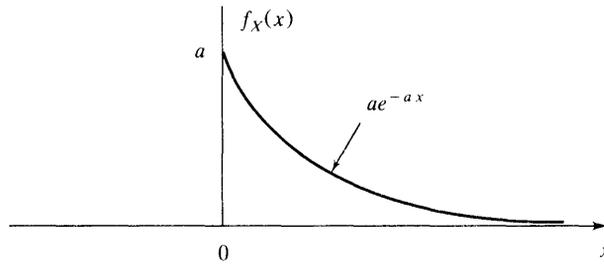


Fig. 5-11 Loi de répartition exponentielle

Une variable aléatoire qui présente cette répartition est dite *exponentielle* de paramètre a .

5.18. Les objets manufacturés tombent tous en panne, un jour ou l'autre. Si le taux de panne est constant, la durée de bon fonctionnement T , avant que n'arrive la panne, est une variable aléatoire de répartition exponentielle. Supposons qu'un type particulier de mémoires pour ordinateur ait pour loi de répartition du temps de bon fonctionnement en heures la fonction (5.120) ci-dessus.

- (a) Les mesures confirment une probabilité de bon fonctionnement sur une durée supérieure à 10 000 heures de valeur $e^{-1} \approx 0,368$. Calculer, dans ce cas, la valeur du paramètre a .
- (b) Avec la valeur de a trouvée, évaluer la durée t_0 de bon fonctionnement ayant une probabilité de 0,05.
- (a) En tenant compte de la relation (5.34c) et de la fonction (5.120), on voit que la loi de répartition de T a pour expression :

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^t f_T(\tau) d\tau = (1 - e^{-at})u(t)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P(T > 10^4) &= 1 - P(T \leq 10^4) \\ &= 1 - F_T(10^4) = 1 - (1 - e^{-a(10^4)}) = e^{-a(10^4)} = e^{-1} \end{aligned}$$

d'où l'on tire $a = 10^{-4}$.

- (b) On veut avoir :

$$F_T(t_0) = P(T \leq t_0) = 0,05$$

soit

$$1 - e^{-at_0} = 1 - e^{-(10^{-4})t_0} = 0,05$$

c'est-à-dire :

$$e^{-(10^{-4})t_0} = 0,95$$

d'où l'on tire :

$$t_0 = -10^4 \ln 0,95 = 513 \text{ h}$$

5.19. La probabilité conjointe de X et Y a pour expression :

$$f_{XY}(x, y) = ke^{-(ax+by)}u(x)u(y)$$

où a et b sont des constantes positives. Déterminer la valeur de k .

On détermine la valeur de k au moyen de la relation (5.41), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} F_{XY}(\infty, \infty) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= k \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(a\xi+b\eta)} d\xi d\eta \\ &= k \int_0^{\infty} e^{-a\xi} d\xi \int_0^{\infty} e^{-b\eta} d\eta = \frac{k}{ab} = 1 \end{aligned}$$

d'où l'on obtient $k = ab$.

5.20. Un fabricant de composants électroniques a utilisé deux procédés différents, XX et YY pour réaliser des mémoires d'ordinateurs. Soit X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie du composant suivant le premier procédé et Y la variable aléatoire relative au second procédé. On suppose que la densité de probabilité conjointe de X et de Y a pour expression :

$$f_{XY}(x, y) = abe^{-(ax+by)}u(x)u(y) \tag{5.121}$$

avec $a = 10^{-4}$ et $b = 1,2(10^{-4})$.

Déterminer la probabilité pour que la durée de vie des composants fabriqués suivant le procédé XX soit supérieure à celle des composants fabriqués selon le procédé YY.

La région D pour laquelle $x > y$ est ombrée sur le diagramme de la figure 5-12. La probabilité pour que la durée de vie des composants de type XX soit supérieure à celle des composants de type YY a pour expression :

$$\begin{aligned} P(x > y) &= \int_D \int f_{XY}(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^x abe^{-(ax+by)} dy dx \\ &= \int_0^{\infty} ae^{-ax} \int_0^x be^{-by} dy dx = \int_0^{\infty} ae^{-ax}(1 - e^{-bx}) dx \\ &= \frac{b}{a+b} = \frac{1,2(10^{-4})}{10^{-4} + 1,2(10^{-4})} = 0,545 \end{aligned}$$

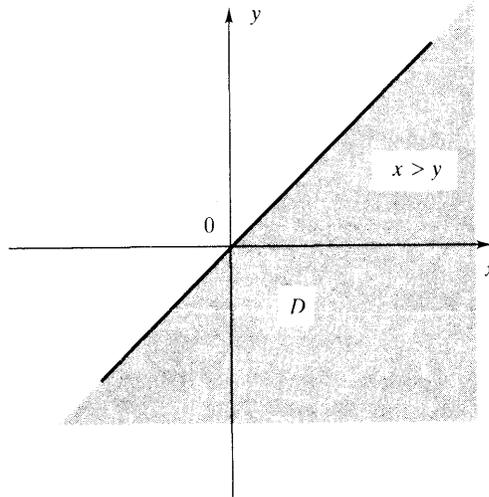


Fig. 5-12

5.21. La probabilité conjointe de X et de Y a pour expression :

$$f_{XY}(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}u(x)u(y)$$

- (a) Evaluer les densités de probabilité marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.
 (b) X et Y sont-ils indépendants?
 (a) D'après les relations (5.43a) et (5.43b), on a :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dy = \int_0^{\infty} xye^{-(x^2+y^2)/2} u(x) dy \\ &= xe^{-x^2/2} u(x) \int_0^{\infty} ye^{-y^2/2} dy = xe^{-x^2/2} u(x) \end{aligned}$$

Comme $f_{XY}(x,y)$ est symétrique en x et en y , on peut échanger ces variables, ce qui donne :

$$f_Y(y) = ye^{-y^2/2} u(y)$$

- (b) Comme $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, on en déduit que X et Y sont indépendants.

5.22. Les variables X et Y sont dites conjointement normales si leur probabilité conjointe a pour expression :

$$\begin{aligned} f_{XY}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right] \right\} \quad (5.122) \end{aligned}$$

- (a) Trouver la densité de probabilité marginale de X et de Y .
 (b) Montrer que X et Y sont indépendants lorsque $\rho = 0$.
 (a) D'après la relation (5.43a), la densité de probabilité marginale de X a pour expression :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dy$$

en faisant apparaître un carré parfait dans l'exponentielle de la relation (5.122), on obtient :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right]}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y(1-\rho^2)^{1/2}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} - \rho \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right) \right]^2 \right\} dy \\ &= \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right]}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y(1-\rho^2)^{1/2}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_Y^2(1-\rho^2)} \left[y - \mu_Y - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X) \right]^2 \right\} dy \end{aligned}$$

En comparant l'intégrande avec la relation (5.103), on voit qu'il s'agit d'une densité de probabilité normale dont la moyenne a pour expression :

$$\mu_Y + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (x - \mu_X)$$

et dont la variance a pour valeur :

$$\sigma_Y^2(1-\rho^2)$$

L'intégrale doit donc avoir 1 pour valeur, ce qui permet d'écrire :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp[-(x - \mu_X)^2/2\sigma_X^2] \quad (5.123)$$

De la même façon, la densité marginale de probabilité de Y a pour expression :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp[-(y - \mu_Y)^2 / 2\sigma_Y^2] \quad (5.124)$$

(b) Lorsque $\rho = 0$, la relation (5.122) se réduit à

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right] \\ &= f_X(x) f_Y(y) \end{aligned}$$

Ce qui montre que X et Y sont indépendants.

FONCTIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES

5.23. Soit une fonction linéaire $Y = 2X + 3$, X étant une variable aléatoire dont la loi de répartition est uniforme sur l'intervalle $[-1, 2]$. Évaluer $f_Y(y)$ et tracer $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.

D'après la relation (5.119) du problème 5.16, on a :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

L'équation $y = g(x) = 2x + 3$ peut se résoudre en x , elle a une solution $x_1 = (y - 3)/2$, l'intervalle sur lequel varie y est $[1, 7]$, et $g'(x) = 2$. On sait que l'on a $-1 \leq x_1 \leq 2$ et, en invoquant la relation (5.33) :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} f_X(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 1 \leq y \leq 7 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La figure 5-13 représente les densités de probabilité $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.

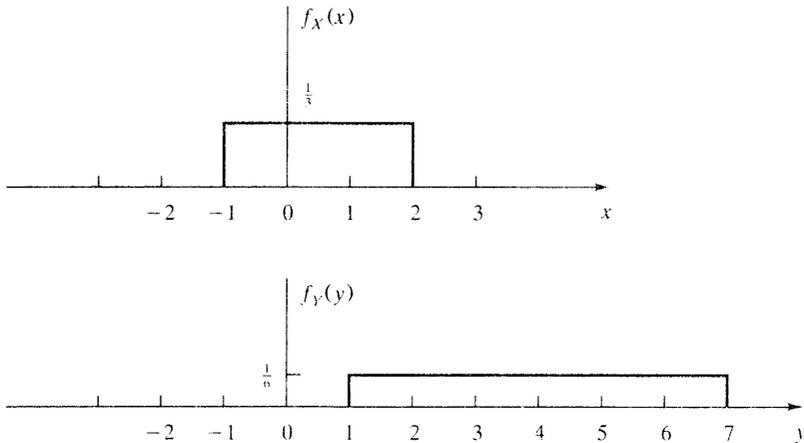


Fig. 5-13

5.24. Soit $Y = aX + b$. Montrer que si $X = N(\mu; \sigma^2)$, alors $Y = N(a\mu + b; a^2\sigma^2)$.

La relation $y = g(x) = ax + b$ présente une solution unique $x_1 = (y - b)/a$ et $g'(x) = a$. L'intervalle de variation de y est $(-\infty, \infty)$, donc, en tenant compte de la relation (5.33) :

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y - b}{a}\right) \quad (5.125)$$

Comme $X = N(\mu; \sigma^2)$ et en invoquant la relation (5.103) :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right] \tag{5.126}$$

d'où l'on déduit, au moyen de la relation (5.125) :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2a^2\sigma^2}(y - a\mu - b)^2\right] \end{aligned} \tag{5.127}$$

qui représente la densité de probabilité de $N(a\mu + b; a^2\sigma^2)$. Si donc $X = N(\mu; \sigma^2)$, alors $Y = N(a\mu + b; a^2\sigma^2)$.

5.25. Soit $Y = X^2$. Evaluer et tracer $f_Y(y)$ lorsque $X = N(0; 1)$.

Si $y < 0$, l'équation $y = x^2$ n'a pas de solution réelle; d'où $f_Y(y) = 0$.

Si $y > 0$, cette équation a deux solutions :

$$x_1 = \sqrt{y} \quad x_2 = -\sqrt{y}$$

D'autre part, $y = g(x) = x^2$ d'où $g'(x) = 2x$. En invoquant la relation (5.53) :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] u(y) \tag{5.128}$$

En tenant compte de ce que $X = N(0; 1)$, on obtient, en utilisant la relation (5.103) :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \tag{5.129}$$

Comme $f_X(x)$ est une fonction paire, ce que montre la relation (5.128), on a :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) u(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} u(y) \tag{5.130}$$

dont la représentation graphique apparaît sur la figure 5-14.

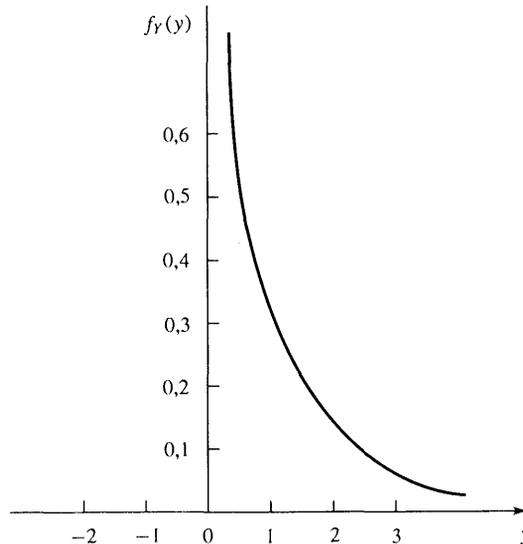


Fig. 5-14

5.26. Considérons la fonction diode ci-après :

$$Y = \begin{cases} X & X \geq 0 \\ 0 & X < 0 \end{cases}$$

Calculer $f_Y(y)$ pour $X = N(0; 1)$.

Il est clair que $f_Y(y) = 0$ pour $y < 0$. Lorsque $y > 0$, $y = g(x) = x$ a une solution unique $x_1 = y$ et $g'(x) = 1$. En utilisant la relation (5.53), il vient :

$$f_Y(y) = f_X(y) \quad \text{et} \quad F_Y(y) = F_X(y) \quad y > 0$$

La fonction $F_Y(y)$ est donc discontinue en $y = 0$, la discontinuité ayant pour valeur :

$$F_Y(0^+) - F_Y(0^-) = F_X(0)$$

En conséquence :

$$f_Y(y) = F_X(0)\delta(y) + f_X(y)u(y) \tag{5.131}$$

Comme $f_X(x)$ est une fonction paire — relation (5.129) — on a :

$$F_X(0) = \int_{-\infty}^0 f_X(x) dx = \frac{1}{2}$$

Et la relation (5.131) devient donc :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}u(y) \tag{5.132}$$

5.27. Soit $Y = \sin X$, X étant une variable aléatoire uniformément répartie telle que :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Calculer $f_Y(y)$, $F_Y(y)$ et tracer ces fonctions.

Si $|y| > 1$, l'équation $y = \sin x$ n'a aucune solution (figure 5-15), donc $f_Y(y) = 0$. Si $|y| < 1$, alors cette équation a deux solutions sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$ (figure 5-15).

$$x_1 = \arcsin y \quad \text{et} \quad x_2 = \pi - x_1$$

Comme

$$y'(x_1) = \cos x_1 = \cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - y^2}$$

$$y'(x_2) = \cos x_2 = \cos(\pi - x_1) = -\cos x_1 = -\sqrt{1 - y^2}$$

l'on obtient, d'après la relation (5.53) :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - y^2}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - y^2}} \quad |y| < 1 \tag{5.133}$$

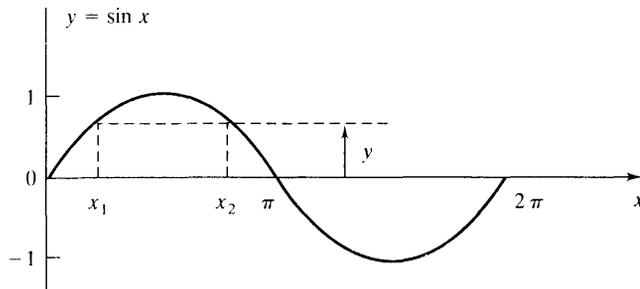


Fig. 5-15

En intégrant cette densité — relation (5.34c) — on obtient :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\arcsin y}{\pi} & -1 \leq y < 1 \\ 1 & 1 \leq y \end{cases} \quad (5.134)$$

La figure 5-16 représente les tracés de ces fonctions.

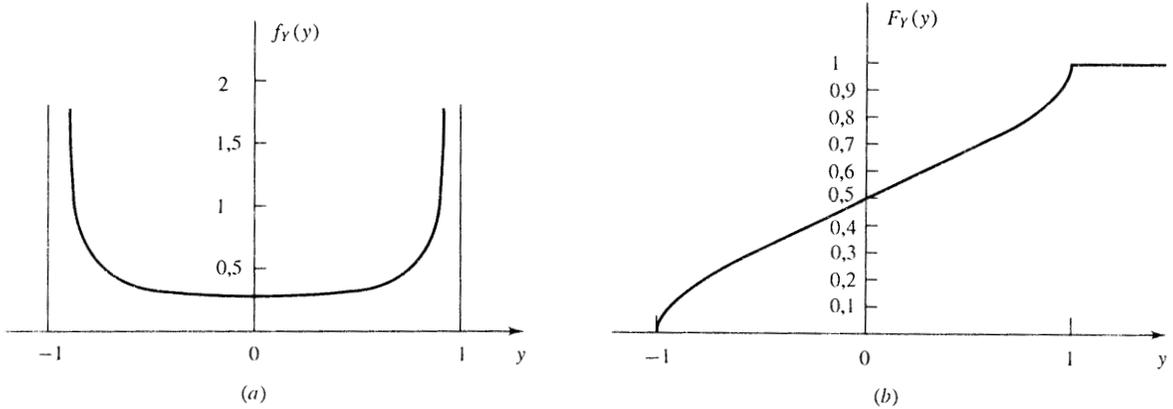


Fig. 5-16

5.28. Le signal d'entrée fourni à une liaison numérique parasitée par un bruit est un nombre binaire aléatoire X dont la loi de probabilité est $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Le signal de sortie Z de la liaison a pour expression $Z = X + Y$ où Y est le bruit qui altère la qualité de la transmission. En supposant que X et Y sont indépendants et que $Y = N(0; 1)$, calculer la densité de probabilité de Z .

En invoquant les relations (5.30) et (5.31), on obtient :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Z \leq z | X = 0)P(X = 0) + P(Z \leq z | X = 1)P(X = 1)$$

Comme

$$Z = X + Y$$

$$P(Z \leq z | X = 0) = P(X + Y \leq z | X = 0) = P(Y \leq z) = F_Y(z)$$

de la même façon :

$$P(Z \leq z | X = 1) = P(X + Y \leq z | X = 1) = P(Y \leq z - 1) = F_Y(z - 1)$$

En conséquence :

$$F_Z(z) = \frac{1}{2}F_Y(z) + \frac{1}{2}F_Y(z - 1)$$

et comme $Y = N(0; 1)$,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$$

et

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{1}{2}f_Y(z) + \frac{1}{2}f_Y(z - 1) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(z-1)^2/2} \right] \end{aligned} \quad (5.135)$$

5.29. Considérons la transformation :

$$Z = aX + bY \quad W = cX + dY \quad (5.136)$$

Calculer la densité de probabilité conjointe $f_{ZW}(z, w)$ en fonction de $f_{XY}(x, y)$.

Si $ad - bc \neq 0$, alors le système

$$ax + by = z \quad cx + dy = w$$

admet une solution unique :

$$x = \alpha z + \beta w \quad y = \gamma z + \eta w$$

où les quantités α , β , γ , et η ont pour valeur :

$$\alpha = \frac{d}{ad - bc} \quad \beta = \frac{-b}{ad - bc} \quad \gamma = \frac{-c}{ad - bc} \quad \eta = \frac{a}{ad - bc}$$

Si l'on se rappelle la relation (5.60), on a :

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

La relation (5.59) permet d'écrire :

$$f_{ZW}(z, w) = \frac{1}{|ad - bc|} f_{XY}(\alpha z + \beta w, \gamma z + \eta w) \quad (5.137)$$

5.30. Soit $Z = X + Y$. Calculer la densité de probabilité de Z si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

Introduisons une variable aléatoire auxiliaire $W = Y$.

Le système $z = x + y$, $w = y$ a une solution unique :

$$x = z - w \quad y = w$$

Comme

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

La relation (5.59) devient (on obtient le même résultat en faisant $a = b = d = 1$ et $c = 0$ dans la relation 5.137)

$$f_{ZW}(z, w) = f_{XY}(z - w, w) \quad (5.138)$$

D'où l'on tire, en tenant compte de la relation (5.43a) :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZW}(z, w) dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z - w, w) dw \quad (5.139)$$

Si X et Y sont indépendants, on a :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - w) f_Y(w) dw \quad (5.140)$$

qui n'est autre que la convolution des fonctions $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.

5.31. Supposons que X et Y soient deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale. Evaluer la densité de probabilité de $Z = X + Y$.

Les densités de probabilité de X et Y ont pour expression :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

D'après la relation (5.140), on peut écrire que :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-w) f_Y(w) dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-w)^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(z^2 - 2zw + 2w^2)\right] dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{z^2}{2} + \left(\sqrt{2}w - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\right\} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}w - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2\right] dw \end{aligned}$$

Posons $u = \sqrt{2}w - z/\sqrt{2}$, il vient :

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

Comme l'intégrande n'est autre que la densité de probabilité de la loi normale $N(0; 1)$, cette intégrale a pour valeur 1, et l'on obtient :

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-z^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-z^2/(2(\sqrt{2})^2)} \quad (5.141)$$

qui est la densité de probabilité de $N(0; \sqrt{2})$.

Ainsi, Z est une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance $\sqrt{2}$.

5.32. Considérons la transformation :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = r \quad \Theta = \arctan \frac{Y}{X} \quad (5.142)$$

Calculer $f_{R\Theta}(r, \theta)$ en fonction de $f_{XY}(x, y)$.

On suppose que $r \geq 0$ et que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Dans cette hypothèse, le système

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \quad \arctan \frac{y}{x} = \theta$$

présente une solution unique :

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

puisque, d'après la relation (5.60),

$$\bar{J}(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

La relation (5.59) donne :

$$f_{R\Theta}(r, \theta) = r f_{XY}(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (5.143)$$

5.33. Une tension V a pour expression :

$$V(t) = X \cos \omega t + Y \sin \omega t \quad (5.144)$$

où ω est une pulsation constante, X et Y sont deux V.A. indépendantes telles que $X = Y = N(0; \sigma^2)$.

(a) Montrer que l'on peut écrire $V(t)$ sous la forme :

$$V(t) = R \cos(\omega t - \Theta) \quad (5.145)$$

(b) Calculer les fonctions de densité de R et Θ , puis montrer que R et Θ sont des V.A. indépendantes.

(a) Développons l'expression de $V(t)$:

$$\begin{aligned} V(t) &= X \cos \omega t + Y \sin \omega t \\ &= \sqrt{X^2 + Y^2} \left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cos \omega t + \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \sin \omega t \right) \\ &= \sqrt{X^2 + Y^2} (\cos \Theta \cos \omega t + \sin \Theta \sin \omega t) \\ &= R \cos(\omega t - \Theta) \end{aligned}$$

où

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{et} \quad \Theta = \arctan \frac{Y}{X}$$

(b) Comme X et Y sont indépendants et comme $X = Y = N(0; \sigma^2)$, on peut écrire, d'après les relations (5.48) et (5.103) :

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/(2\sigma^2)} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)} \end{aligned} \quad (5.146)$$

En utilisant le résultat du problème 5.32 (relation 5.143), il vient :

$$\begin{aligned} f_{R,\Theta}(r,\theta) &= r f_{X,Y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/(2\sigma^2)} \end{aligned} \quad (5.147)$$

En appliquant les relations (5.43a) et (5.43b), on a :

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R,\Theta}(r,\theta) d\theta = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/(2\sigma^2)} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/(2\sigma^2)} \quad (5.148)$$

$$f_\Theta(\theta) = \int_0^\infty f_{R,\Theta}(r,\theta) dr = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty r e^{-r^2/(2\sigma^2)} dr = \frac{1}{2\pi} \quad (5.149)$$

et

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_R(r) f_\Theta(\theta) \quad (5.150)$$

On en déduit que R et Θ sont indépendants.

On notera que Θ est une variable dont la répartition est uniforme. R est parfois appelée variable aléatoire de Rayleigh.

MOYENNES STATISTIQUES

5.34. La variable aléatoire X prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives α et $\beta = 1 - \alpha$. Calculer la moyenne et la variance de X .

En invoquant les relations (5.62) et (5.66), on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_X &= E[X] = 0(\alpha) + 1(\beta) = \beta \\ E[X^2] &= 0^2(\alpha) + 1^2(\beta) = \beta \end{aligned}$$

D'après la relation (5.75), on a :

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = \beta - \beta^2 = \beta(1 - \beta) = \alpha\beta$$

5.35. Soit $Y = \sin X$, X étant une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $(0, 2\pi)$. Calculer la moyenne et le moment d'ordre deux de X en appliquant (a) la relation (5.64) et (b) la relation (5.65).

(a) D'après la solution du problème 5.27, on a :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & |y| < 1 \\ 0 & |y| > 1 \end{cases}$$

En appliquant la relation (5.46), on obtient :

$$E[Y] = \int_{-1}^1 \frac{y}{\pi\sqrt{1-y^2}} dy = 0$$

parce que l'intégrande est une fonction impaire et :

$$E[Y^2] = \int_{-1}^1 \frac{y^2}{\pi\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2}$$

au moyen d'une table d'intégrales.

(b) Comme X est uniformément répartie sur l'intervalle $(0, 2\pi)$, on a :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

En invoquant la relation (5.65), on obtient :

$$E[Y] = E[\sin X] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

et

$$E[Y^2] = E[\sin^2 X] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}$$

5.36. On transmet sur une liaison affectée par un bruit des données binaires par paquets de 16 bits. La probabilité d'erreur en réception d'un bit attribuable au bruit de la liaison est de 1%. On suppose que les erreurs affectant les différents bits d'un bloc sont indépendantes.

- (a) Calculer la moyenne du nombre d'erreurs par bloc.
 (b) Calculer la variance du nombre d'erreurs par bloc.
 (c) Quelle est la probabilité pour que le nombre d'erreurs par bloc soit supérieur ou égal à 4?

(a) Soit X la variable aléatoire représentative du nombre d'erreurs par bloc. Cette variable a donc une distribution binomiale, de paramètres $n = 16$ et $p = 0,01$. D'après la relation (5.96), le nombre moyen d'erreurs par bloc est :

$$E[X] = np = (16)(0,01) = 0,16$$

(b) D'après la relation (5.97) :

$$\sigma_X^2 = np(1-p) = (16)(0,01)(0,99) = 0,158$$

(c) On peut écrire que :

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$$

En appliquant la relation (5.95), on obtient :

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 \binom{16}{k} (0,01)^k (0,99)^{16-k} = 0,986$$

D'où l'on tire :

$$P(X \geq 4) = 1 - 0,986 = 0,014$$

5.37. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, selon la relation (5.98).

(a) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1 \quad (5.151)$$

(b) Démontrer les relations (5.101) et (5.102), c'est-à-dire :

$$\mu_X = E[X] = \alpha \quad \text{et} \quad \sigma_X^2 = \alpha$$

(a) D'après la relation (5.98), on peut écrire que :

$$P(X = k) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!}$$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha} e^{\alpha} = 1$$

(b) En tenant compte de la relation (5.62), on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_X = E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) = 0 + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{(k-1)!} \\ &= \alpha e^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} = \alpha e^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} = \alpha e^{-\alpha} e^{\alpha} = \alpha \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) P(X = k) = 0 + 0 + \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{(k-2)!} \\ &= \alpha^2 e^{-\alpha} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^{k-2}}{(k-2)!} = \alpha^2 e^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} = \alpha^2 e^{-\alpha} e^{\alpha} = \alpha^2 \end{aligned}$$

or on sait que :

$$E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X] = E[X^2] - \alpha = \alpha^2$$

donc

$$E[X^2] = \alpha^2 + \alpha \quad (5.152)$$

L'utilisation de la relation (5.75) conduit à :

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = (\alpha^2 + \alpha) - \alpha^2 = \alpha$$

5.38. Soit $X = N(\mu; \sigma^2)$. Démontrer les relations (5.107) et (5.108), c'est-à-dire :

$$\mu_X = E[X] = \mu \quad \sigma_X^2 = E[(X - \mu)^2] = \sigma^2$$

En incorporant la relation (5.103) à la relation (5.61), on obtient :

$$\mu_X = E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

En faisant un changement de variable $y = (x - \mu)/\sigma$, on obtient :

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu) e^{-y^2/2} dy \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2/2} dy + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle puisque l'intégrande est une fonction impaire. La seconde intégrale a pour valeur 1 puisque l'intégrande est la densité de probabilité de $N(0; 1)$. On obtient donc :

$$\mu_X = E[X] = \mu$$

D'après la propriété 2 de $f_X(x)$ (relation 5.34b), on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx = \sigma\sqrt{2\pi} \quad (5.133)$$

En dérivant cette relation par rapport à σ , il vient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx = \sqrt{2\pi}$$

Et en multipliant des deux côtés par la quantité $\sigma^2/\sqrt{2\pi}$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx = E[(X-\mu)^2] = \sigma_X^2 = \sigma^2$$

5.39. Soit $X = N(0; \sigma^2)$. Montrer que :

$$m_n = E[X^n] = \begin{cases} 0 & n = 2k + 1 \\ 1 \times 3 \times \dots \times (n-1)\sigma^n & n = 2k \end{cases} \quad (5.154)$$

$$X = N(0; \sigma^2) \rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

Les moments d'ordre impair m_{2k+1} de X sont nuls, parce que $f_X(-x) = f_X(x)$. En dérivant l'identité qui suit k fois par rapport à α lorsque $n = 2k$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (5.155)$$

on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2k-1)}{2^k} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2k+1}}}$$

en posant $\alpha = 1/(2\sigma^2)$, il vient :

$$\begin{aligned} m_{2k} = E[X^{2k}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx \\ &= 1 \times 3 \times \dots \times (2k-1)\sigma^{2k} \end{aligned}$$

5.40. Démontrer la relation (5.70), à savoir :

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

Soit $f_{XY}(x, y)$ la fonction de densité conjointe de X et de Y . En invoquant la relation (5.68), il vient :

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

En invoquant les relations (5.43a) et (5.61), il vient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = E[X] \end{aligned}$$

De la même façon, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E[Y]$$

Ainsi l'on obtient :

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

5.41. Soit deux variables aléatoires X et Y indépendantes, montrer que

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad (5.156)$$

et

$$E[g_1(X)g_2(Y)] = E[g_1(X)]E[g_2(Y)] \quad (5.157)$$

Si X et Y sont indépendants, on peut écrire, en vertu des relations (5.48) et (5.68) :

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\ &= E[X]E[Y] \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} E[g_1(X)g_2(Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(y) f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g_2(y) f_Y(y) dy \\ &= E[g_1(X)]E[g_2(Y)] \end{aligned}$$

5.42. Calculer la covariance de X et Y (a) lorsque X et Y sont indépendants et (b) lorsqu'existe entre X et Y la relation $Y = aX + b$.

(a) Si X et Y sont indépendants, on peut écrire, en vertu des relations (5.79) et (5.156) :

$$\begin{aligned} C_{XY} &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= E[X]E[Y] - E[X]E[Y] = 0 \end{aligned} \quad (5.158)$$

(b) On peut écrire, dans ce cas, que :

$$\begin{aligned} E[XY] &= E[X(aX + b)] = aE[X^2] + bE[X] = aE[X^2] + b\mu_X \\ \mu_Y &= E[Y] = E[aX + b] = aE[X] + b = a\mu_X + b \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} C_{XY} &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= aE[X^2] + b\mu_X - \mu_X(a\mu_X + b) \\ &= a(E[X^2] - \mu_X^2) = a\sigma_X^2 \end{aligned} \quad (5.159)$$

Remarquons que le résultat obtenu en (a) montre que si X et Y sont indépendants, ils ne sont pas corrélés, tandis que la réciproque n'est pas forcément vérifiée (voir problème 5.44).

5.43. Soit $Z = aX + bY$, où a et b sont des constantes quelconques. Montrer que, si X et Y sont indépendants, on a :

$$\sigma_Z^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 \quad (5.160)$$

D'après les relations (5.70) et (5.71), on peut écrire que :

$$\mu_Z = E[Z] = E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] = a\mu_X + b\mu_Y$$

En invoquant la relation (5.74), il vient :

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= E[(Z - \mu_Z)^2] = E\left\{\left[(aX + bY) - (a\mu_X + b\mu_Y)\right]^2\right\} \\ &= E\left\{[a(X - \mu_X) + b(Y - \mu_Y)]^2\right\} \\ &= a^2E[(X - \mu_X)^2] + 2abE[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] + b^2E[(Y - \mu_Y)^2] \\ &= a^2\sigma_X^2 + 2abE[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] + b^2\sigma_Y^2 \end{aligned} \quad (5.161)$$

Comme X et Y sont indépendants, on a :

$$E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[X - \mu_X]E[Y - \mu_Y] = 0$$

d'où

$$\sigma_Z^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$$

5.44. Soit X et Y deux variables aléatoires dont la définition est la suivante :

$$X = \cos \Theta \quad \text{et} \quad Y = \sin \Theta$$

où Θ est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

- (a) Montrer que X et Y ne sont pas corrélées.
 (b) Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
 (a) D'après la relation (5.119) :

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

En invoquant les relations (5.61) et (5.65), on a :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

De la même façon,

$$E[Y] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

L'on a aussi :

$$\begin{aligned} E[XY] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta = 0 = E[X]E[Y] \end{aligned}$$

En vertu de la relation (5.83), les variables X et Y sont donc décorrélées.

- (b) Evaluons les espérances mathématiques de X^2 et Y^2 :

$$E[X^2] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2}$$

$$E[Y^2] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2Y^2] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{8}$$

d'où, en définitive :

$$E[X^2Y^2] = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = E[X^2]E[Y^2]$$

Si X et Y étaient indépendants, on aurait, en vertu de la relation (5.157), $E[X^2Y^2] = E[X^2]E[Y^2]$; on en conclut que X et Y ne sont pas indépendants.

5.45. Démontrer que, dans la relation (5.122) obtenue lors de la résolution du problème 5.22, le paramètre ρ est le coefficient de corrélation de X et de Y .

D'après la définition (5.80) et la relation (5.78), le coefficient de corrélation de X et de Y a pour expression :

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= E \left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) \right] f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (5.162)$$

où l'on a :

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)^{1/2}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) + \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

En faisant deux changements de variable $v = (x - \mu_X)/\sigma_X$ et $w = (y - \mu_Y)/\sigma_Y$, la relation (5.62) se transforme en :

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} vw \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v^2 - 2\rho vw + w^2) \right] dv dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v}{\sqrt{2\pi}(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{(v - \rho w)^2}{2(1-\rho^2)} \right] dv \right\} e^{-w^2/2} dw \end{aligned}$$

Le terme entre accolades s'identifie à la moyenne de $V = N(\rho w; 1 - \rho^2)$, et l'on a :

$$\rho_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w}{\sqrt{2\pi}} (\rho w) e^{-w^2/2} dw = \rho \int_{-\infty}^{\infty} w^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} dw$$

Cette dernière intégrale n'est autre que la variance de $W = N(0; 1)$, elle a donc pour valeur 1 et l'on aboutit à $\rho_{XY} = \rho$.

5.46. Si $f_X(x) = 0$ pour $x < 0$, montrer alors que, quel que soit $\alpha > 0$, (inégalité de Markov) :

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{\mu_X}{\alpha} \quad (5.163)$$

où $\mu_X = E[X]$.

D'après la relation (5.34d),

$$P(X \geq \alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} f_X(x) dx$$

Comme $f_X(x) = 0$ pour $x < 0$,

$$\mu_X = E[X] = \int_0^{\infty} x f_X(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\infty} x f_X(x) dx \geq \alpha \int_{\alpha}^{\infty} f_X(x) dx$$

d'où

$$\int_{\alpha}^{\infty} f_X(x) dx = P(X \geq \alpha) \leq \frac{\mu_X}{\alpha}$$

5.47. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, on a (inégalité de Chebyshev) :

$$P(|X - \mu_X| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\epsilon^2} \quad (5.164)$$

où $\mu_X = E[X]$ et σ_X^2 est la variance de X .

D'après la relation (5.34d), on a :

$$P(|X - \mu_X| \geq \epsilon) = \int_{-\infty}^{\mu_X - \epsilon} f_X(x) dx + \int_{\mu_X + \epsilon}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{|x - \mu_X| \geq \epsilon} f_X(x) dx$$

En invoquant la relation (5.74), il vient :

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \geq \int_{|x - \mu_X| \geq \epsilon} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \geq \epsilon^2 \int_{|x - \mu_X| \geq \epsilon} f_X(x) dx$$

D'où l'on déduit que :

$$\int_{|x - \mu_X| \geq \epsilon} f_X(x) dx \leq \frac{\sigma_X^2}{\epsilon^2}$$

Soit

$$P(|X - \mu_X| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\epsilon^2}$$

5.48. Soit X et Y deux variables aléatoires dont les moments d'ordre deux ont une valeur finie (on dit qu'ils sont bornés). Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2] \quad (5.165)$$

Du fait que la moyenne quadratique d'une variable aléatoire ne peut pas être négative, on peut, quel que soit α , écrire que :

$$E[(X - \alpha Y)^2] \geq 0$$

En développant cette inégalité, il vient :

$$E[X^2] - 2\alpha E[XY] + \alpha^2 E[Y^2] \geq 0$$

En choisissant la valeur de α qui rend minimal le membre de gauche, à savoir :

$$\alpha = \frac{E[XY]}{E[Y^2]}$$

On obtient l'inégalité :

$$E[X^2] - \frac{(E[XY])^2}{E[Y^2]} \geq 0$$

Soit

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$$

5.49. Démontrer la relation (5.81).

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, relation (5.165), on obtient :

$$\{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]\}^2 \leq E[(X - \mu_X)^2] E[(Y - \mu_Y)^2]$$

Ce qui s'écrit :

$$C_{XY}^2 \leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2$$

D'où l'on tire

$$\rho_{XY}^2 = \frac{C_{XY}^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \leq 1$$

Ce qui a pour conséquence :

$$|\rho_{XY}| \leq 1$$

5.50. Soit X et Y deux V.A. de densité conjointe de probabilité $f_{XY}(x, y)$. On définit une *espérance mathématique conditionnelle* dont la définition est la suivante :

$$E[Y|X = x] = E[Y|x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x}(y|x) dy \tag{5.166}$$

où, d'après la relation (5.46) :

$$f_{Y|x}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \tag{5.167}$$

Déterminer $E[Y|x]$ pour les deux V.A de loi conjointement normale du problème 5.22.

En tenant compte des relations (5.122) et (5.123) dans la relation (5.167), moyennant quelques calculs auxiliaires :

$$\begin{aligned} f_{Y|x}(y|x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} - \rho \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_Y^2(1-\rho^2)} \left[y - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X) - \mu_Y \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

qui n'est autre que la densité de probabilité de :

$$Y = N \left[\rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X) + \mu_Y; \sigma_Y^2 (1 - \rho^2) \right]$$

On en conclut que :

$$E[Y|x] = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X) + \mu_Y \tag{5.168}$$

Remarquons que, lorsque X et Y sont indépendants, $\rho = 0$ et $E[Y|x] = \mu_Y = E[Y]$.

5.51. Démontrer que :

$$E[E[Y|x]] = E[Y] \tag{5.169}$$

En utilisant les relations (5.166) et (5.167), on obtient :

$$\begin{aligned} E[E[Y|X]] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[Y|x] f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x}(y|x) f_X(x) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} f_X(x) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E[Y] \end{aligned}$$

5.52. Soit $X = N(\mu; \sigma^2)$.

- (a) Trouver la fonction génératrice $M_X(\lambda)$ des moments de X .
 (b) Calculer, en utilisant $M_X(\lambda)$, la moyenne et la variance de X .
 (a) D'après la définition (5.85) :

$$\begin{aligned} M_X(\lambda) &= E[e^{\lambda X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx \end{aligned} \quad (5.170)$$

En opérant le changement de variable $y = (x - \mu)/\sigma$, on obtient :

$$\begin{aligned} M_X(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} e^{\lambda(\sigma y + \mu)} dy \\ &= e^{\lambda\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2 + \lambda\sigma y} dy \\ &= e^{\lambda\mu + \lambda^2\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\lambda\sigma)^2/2} dy \end{aligned}$$

Comme l'intégrande n'est autre que la densité de probabilité de $N(\lambda\sigma; 1)$, l'intégrale a pour valeur 1 et l'on obtient :

$$M_X(\lambda) = e^{\lambda\mu + \lambda^2\sigma^2/2} \quad (5.171)$$

- (b) En invoquant la relation (5.86), il vient :

$$\begin{aligned} E[X] &= \left. \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda\mu + \lambda^2\sigma^2/2} \right|_{\lambda=0} \\ &= (\mu + \lambda\sigma^2) e^{\lambda\mu + \lambda^2\sigma^2/2} \Big|_{\lambda=0} = \mu \\ E[X^2] &= \left. \frac{d}{d\lambda^2} e^{\lambda\mu + \lambda^2\sigma^2/2} \right|_{\lambda=0} \\ &= [\sigma^2 + (\mu + \lambda\sigma^2)^2] e^{\lambda\mu + \lambda^2\sigma^2/2} \Big|_{\lambda=0} = \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

D'après la relation (5.75) :

$$\sigma_X^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

5.53. La fonction génératrice des moments de X et de Y a pour expression :

$$M_{XY}(\lambda_1, \lambda_2) = E[e^{\lambda_1 X + \lambda_2 Y}] \quad (5.172)$$

où λ_1 et λ_2 sont des variables réelles. Soit X et Y des V.A. conjointement normales dont la densité conjointe de probabilité est donnée par la relation (5.122) du problème 5.22. Donner dans ce cas l'expression de la fonction génératrice des moments de X et de Y .

D'après la relation (5.122) :

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)^{1/2}} e^{-Q(x, y)}$$

où $Q(x, y)$ a pour expression :

$$Q(x, y) = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right]$$

Développons l'expression de $M_{XY}(\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\begin{aligned} M_{XY}(\lambda_1, \lambda_2) &= E[e^{\lambda_1 X + \lambda_2 Y}] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^{\lambda_1 x + \lambda_2 y} e^{-Q(x,y)} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y(1-\rho^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi(x,y)} dx dy \end{aligned}$$

où

$$\xi(x,y) = \lambda_1 x + \lambda_2 y - \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right]$$

En effectuant le changement de variable $t = (x - \mu_X)/\sigma_X$ et $s = (y - \mu_Y)/\sigma_Y$, on a :

$$\begin{aligned} \xi(x,y) = \eta(t,s) &= \lambda_1(\sigma_X t + \mu_X) + \lambda_2(\sigma_Y s + \mu_Y) - \frac{1}{2(1-\rho^2)}(t^2 - 2\rho ts + s^2) \\ &= \lambda_1\mu_X + \lambda_2\mu_Y + \lambda_1\sigma_X t - \frac{1}{2}t^2 + \lambda_2\sigma_Y s - \frac{1}{2(1-\rho^2)}(s - \rho t)^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} M_{XY}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta(t,s)} dt ds \\ &= \frac{e^{\lambda_1\mu_X + \lambda_2\mu_Y}}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda_1\sigma_X t - t^2/2} \\ &\quad \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda_2\sigma_Y s} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s - \rho t)^2\right] ds \right\} dt \end{aligned}$$

Considérons alors l'expression qui suit :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\rho^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda_2\sigma_Y s} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(s - \rho t)^2\right] ds \tag{5.173}$$

En comparant la quantité (5.170) avec la relation (5.173), on s'aperçoit que cette dernière est la fonction génératrice des moments de la loi normale $N(\rho t; 1 - \rho^2)$ où l'on a remplacé λ par $\lambda_2\sigma_Y$. En invoquant la relation (5.171), la quantité (5.173) devient :

$$\exp\left[\lambda_2\sigma_Y\rho t + \frac{1}{2}\lambda_2^2\sigma_Y^2(1-\rho^2)\right]$$

D'où l'on tire :

$$M_{XY}(\lambda_1, \lambda_2) = \exp\left[\lambda_1\mu_X + \lambda_2\mu_Y + \frac{1}{2}\lambda_2^2\sigma_Y^2(1-\rho^2)\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda_1\sigma_X t - t^2/2 + \lambda_2\sigma_Y\rho t} dt$$

On aura remarqué que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda_1\sigma_X t - t^2/2 + \lambda_2\sigma_Y\rho t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda_1\sigma_X + \lambda_2\sigma_Y\rho)t} e^{-t^2/2} dt$$

est la fonction génératrice des moments de la loi normale $N(0; 1)$ où λ est remplacé par $\lambda_1\sigma_X + \lambda_2\sigma_Y\rho$ (relation 5.170). Donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda_1\sigma_X t + \lambda_2\sigma_Y\rho t} e^{-t^2/2} dt = \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda_1\sigma_X + \lambda_2\sigma_Y\rho)^2\right]$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} M_{XY}(\lambda_1, \lambda_2) &= \exp \left[\lambda_1 \mu_X + \lambda_2 \mu_Y + \frac{1}{2} \lambda_2^2 \sigma_Y^2 (1 - \rho^2) + \frac{1}{2} (\lambda_1 \sigma_X + \lambda_2 \sigma_Y \rho)^2 \right] \\ &= \exp \left[\lambda_1 \mu_X + \lambda_2 \mu_Y + \frac{1}{2} (\lambda_1^2 \sigma_X^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \sigma_X \sigma_Y \rho + \lambda_2^2 \sigma_Y^2) \right] \end{aligned} \quad (5.174)$$

5.54. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires conjointement normales de moyenne nulle, on a :

$$E[X^2 Y^2] = E[X^2] E[Y^2] + 2(E[XY])^2 \quad (5.175)$$

D'après la relation (5.172), la fonction génératrice des moments de X et de Y a pour expression :

$$M_{XY}(\lambda_1, \lambda_2) = E[e^{\lambda_1 X + \lambda_2 Y}]$$

en développant l'exponentielle et en utilisant la linéarité de l'opérateur E , on obtient :

$$M_{XY}(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E[X^k Y^{n-k}] \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \quad (5.176)$$

Le coefficient de $\lambda_1^2 \lambda_2^2$, dans la relation (5.176) a pour valeur :

$$\frac{1}{4!} \binom{4}{2} E[X^2 Y^2] = \frac{1}{4} E[X^2 Y^2] \quad (5.177)$$

En faisant $\mu_X = \mu_Y = 0$ dans la relation (5.174), on voit que la fonction génératrice des moments conjoints de X et de Y a pour expression :

$$\begin{aligned} M_{XY}(\lambda_1, \lambda_2) &= \exp \left[\frac{1}{2} (\lambda_1^2 \sigma_X^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \sigma_X \sigma_Y \rho + \lambda_2^2 \sigma_Y^2) \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{2} (\lambda_1^2 \sigma_X^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 C_{XY} + \lambda_2^2 \sigma_Y^2) \right] \end{aligned} \quad (5.178)$$

où $C_{XY} = \sigma_X \sigma_Y \rho = E[XY]$ est la covariance de X et Y .

Posons $m = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 \sigma_X^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 C_{XY} + \lambda_2^2 \sigma_Y^2)$, on sait que :

$$e^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} m^n = 1 + m + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{6} m^3 + \dots$$

Les facteurs $\lambda_1^2 \lambda_2^2$ de la relation (5.178) n'apparaissent que dans le terme

$$\frac{1}{2} m^2 = \frac{1}{8} (\lambda_1^2 \sigma_X^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 C_{XY} + \lambda_2^2 \sigma_Y^2)^2$$

et le coefficient de $\lambda_1^2 \lambda_2^2$ dans la relation (5.178) a pour valeur :

$$\frac{1}{8} (2\sigma_X^2 \sigma_Y^2 + 4C_{XY}^2) = \frac{1}{4} \sigma_X^2 \sigma_Y^2 + \frac{1}{2} C_{XY}^2 \quad (5.179)$$

En identifiant les relations (5.177) et (5.179), il vient :

$$\frac{1}{4} E[X^2 Y^2] = \frac{1}{4} \sigma_X^2 \sigma_Y^2 + \frac{1}{2} C_{XY}^2$$

soit

$$E[X^2 Y^2] = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 + 2C_{XY}^2 = E[X^2] E[Y^2] + 2(E[XY])^2$$

5.55. En utilisant la méthode de l'équation caractéristique, démontrer la relation (5.140) du problème 5.30.

Soit $Z = X + Y$, où X et Y sont des V.A. indépendantes. Posons :

$$\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}] \quad \Phi_Y(\omega) = E[e^{j\omega Y}]$$

On a :

$$\begin{aligned}\Phi_Z(\omega) &= E[e^{j\omega Z}] = E[e^{j\omega(X+Y)}] \\ &= E[e^{j\omega X}]E[e^{j\omega Y}] = \Phi_X(\omega)\Phi_Y(\omega)\end{aligned}\quad (5.180)$$

En appliquant le théorème de convolution, relation (I.53), on obtient :

$$\begin{aligned}f_Z(z) &= \mathcal{F}^{-1}[\Phi_Z(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi_X(\omega)\Phi_Y(\omega)] \\ &= f_X(x) * f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx\end{aligned}$$

Comme la convolution est une opération commutative, on peut aussi écrire :

$$f_Z(z) = f_Y(y) * f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)f_X(z-y) dy$$

relation identique à la relation (5.140) obtenue au problème 5.30.

Problèmes supplémentaires

5.56. Montrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors :

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$$

Indication : Utiliser la relation (5.116) et l'identité suivante :

$$\bar{A} = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$$

5.57. Un ordinateur tombe en panne dès que 2 composants A et B présentent simultanément une défaillance. La probabilité de défaillance du composant A est de 1%, tandis que celle du composant B est de 0,5%. Si le composant A est défaillant, la probabilité pour que B le devienne est multipliée par 3.

- (a) Calculer la probabilité de panne de l'ordinateur.
 (b) Évaluer la probabilité pour que A présente une défaillance à la suite d'une défaillance de B .

Réponses : (a) 0,00015, (b) 0,03

5.58. Une transmission PCM binaire n'achemine que des digits +1 et -1 équiprobables. La liaison étant affectée par un bruit, le récepteur commet des erreurs d'identification à l'arrivée. D'autre part, l'atténuation sur la ligne entraîne un manque de niveau du signal sur le récepteur qui n'est pas toujours capable d'identifier le digit reçu. Ce récepteur affiche donc trois valeurs : +1, et -1, en cas de réception correcte, et 0 lorsqu'il y a eu perte de signal. En supposant que $P(Y = -1|X = +1) = 0,1$, $P(Y = +1|X = -1) = 0,2$, et $P(Y = 0|X = +1) = P(Y = 0|X = -1) = 0,05$,

- (a) évaluer la probabilité $P(Y = +1)$, $P(Y = -1)$ et $P(Y = 0)$,
 (b) évaluer les probabilités $P(X = +1|Y = +1)$ et $P(X = -1|Y = -1)$.

Réponses (a) $P(Y = +1) = 0,525$, $P(Y = -1) = 0,425$, $P(Y = 0) = 0,05$

$$(b) P(X = +1|Y = +1) = 0,81, P(X = -1|Y = -1) = 0,88$$

5.59. On s'intéresse au transfert de 10 000 digits sur une liaison affectée par le bruit. La probabilité d'erreur par digit est $p = 5 \times 10^{-5}$. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas plus de deux digits erronés ?

Réponse : 0,9856

5.60. Démontrer que la relation (5.103) définit effectivement une densité de probabilité; montrer en particulier que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Indication : Faire un changement de variable $y = (x - \mu)/\sigma$ et montrer que :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}$$

ce qui peut être prouvé en évaluant I^2 en coordonnées polaires.

5.61. Une résistance produit une tension de bruit $V_n(t)$. A l'instant t_1 , la tension de bruit $X = V_n(t_1)$ est une variable gaussienne dont la densité de probabilité a pour expression :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

Calculer la probabilité pour que $|X| > k\sigma$ pour $k = 1, 2, 3$.

Réponse : $P(|X| > \sigma) = 0,3173$, $P(|X| > 2\sigma) = 0,0455$, $P(|X| > 3\sigma) = 0,0027$

5.62. Considérons la transformation $Y = 1/X$.

(a) Calculer $f_Y(y)$ en fonction de $f_X(x)$.

(b) En supposant que $f_X(x) = \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + x^2}$, calculer $f_Y(y)$.

Réponse : (a) $f_Y(y) = \frac{1}{y^2} f_X\left(\frac{1}{y}\right)$

$$(b) f_Y(y) = \frac{1/(\alpha\pi)}{1/\alpha^2 + y^2}$$

Les variables X et Y sont appelées *variables aléatoires de Cauchy*.

5.63. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :

$$f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x} u(x) \quad f_Y(y) = \beta e^{-\beta y} u(y)$$

Calculer la fonction de densité de $Z = X + Y$.

Réponse :

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}) u(z) & \beta \neq \alpha \\ \alpha^2 z e^{-\alpha z} u(z) & \beta = \alpha \end{cases}$$

5.64. Soit X une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[a, b]$. Calculer sa moyenne et sa variance.

Réponse : $\mu_X = \frac{b+a}{2}$, $\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

5.65. Etant donné une variable aléatoire X de moyenne μ_X et de variance σ_X^2 , trouver une transformation linéaire $Y = aX + b$ telle que $\mu_Y = 0$ et $\sigma_Y^2 = 1$.

Réponse : $a = \frac{1}{\sigma_X}$, $b = -\frac{\mu_X}{\sigma_X}$

5.66. On définit les variables aléatoires Z et W , fonctions des variables aléatoires X et Y au moyen des relations

$$Z = X + aY \quad W = X - aY$$

où a est un nombre réel. Déterminer a de façon que Z et W soient orthogonales.

Réponse : $a = \sqrt{\frac{E[X^2]}{E[Y^2]}}$

- 5.67.** (a) Trouver la fonction génératrice des moments d'une V.A. X uniformément répartie sur l'intervalle $[a, b]$.
 (b) En déduire les expressions de $E[X]$, $E[X^2]$ et $E[X^3]$.

Réponse : (a)
$$\frac{e^{\lambda b} - e^{\lambda a}}{\lambda(b - a)}$$

(b)
$$E[X] = \frac{1}{2}(b + a), E[X^2] = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2), E[X^3] = \frac{1}{4}(b^3 + b^2a + ba^2 + a^3)$$

- 5.68.** Soit $\Phi_X(\omega)$ la fonction caractéristique de X et Y la variable aléatoire telle que $Y = aX + b$. Trouver la fonction caractéristique de Y en fonction de $\Phi_X(\omega)$.

Réponse :
$$\Phi_Y(\omega) = e^{j\omega b} \Phi_X(a\omega)$$

- 5.69.** Soit une variable normale $X = N(\mu; \sigma^2)$. Trouver la fonction caractéristique de X .

Réponse :
$$\Phi_X(\omega) = e^{j\mu\omega - \sigma^2\omega^2/2}$$

- 5.70.** Montrer que, si les V.A. X et Y sont indépendantes, on a la relation :

$$\Phi_{XY}(\omega_1, \omega_2) = \Phi_X(\omega_1)\Phi_Y(\omega_2)$$

Indication : Appliquer les relations (5.48) et (5.88).

- 5.71.** Soit $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, un ensemble de n variables aléatoires normales indépendantes de moyenne μ_i et de variance σ_i^2 . Posons

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Montrer que Y est une variable aléatoire normale dont la moyenne et la variance ont pour expression :

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Indication : Trouver la fonction caractéristique de Y et utiliser les résultats du problème 5.69.

- 5.72.** Montrer que le moment d'ordre n de X peut être obtenu à partir de la fonction caractéristique $\phi_X(\omega)$ au moyen de la formule suivante :

$$E[X^n] = j^{-n} \left. \frac{d^n \Phi_X(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0}$$

Indication : Dériver n fois les deux membres de la relation (5.85) et montrer que l'on a la relation :

$$\frac{d^n}{d\omega^n} E[e^{j\omega X}] = j^n E[X^n e^{j\omega X}]$$

- 5.73.** Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes normales de moyennes μ_1 et μ_2 , de variances σ_1^2 et σ_2^2 .
 (a) En utilisant la méthode de la fonction caractéristique, calculer la densité de probabilité de $Z = a_1X_1 + a_2X_2$.
 (b) En utilisant la fonction caractéristique de $X = N(0; \sigma^2)$, trouver $E[X^4]$.

Réponse :

(a)
$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_Z^2}(z - \mu_Z)^2\right]$$
 avec $\mu_Z = a_1\mu_1 + a_2\mu_2$ et $\sigma_Z^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2$

(b)
$$E[X^4] = 3\sigma^4$$

Signaux aléatoires et bruit

6.1 INTRODUCTION

On propose dans ce chapitre des modèles statistiques descriptifs des signaux aléatoires et du bruit qui affectent les télécommunications. On ne peut en effet décrire les signaux aléatoires ou les bruits au moyen de fonctions certaines. Il est nécessaire d'observer pendant un certain temps un signal aléatoire ou un bruit pour en extraire certains paramètres permettant de le caractériser de façon statistique ou probabiliste. Cette modélisation, reposant sur l'utilisation d'un ensemble de fonctions particulières qui dépendent du temps, définit ce que l'on appelle un processus aléatoire, ou stochastique.

6.2 DÉFINITION DES PROCESSUS STOCHASTIQUES

Considérons une expérience aléatoire dont les résultats λ appartiennent à un espace d'événement S . Si l'on associe à chaque résultat $\lambda \in S$ une fonction du temps à valeur réelle $X(t, \lambda)$, on définit un *processus aléatoire* ou *stochastique*. Le processus aléatoire $X(t, \lambda)$ est donc une fonction de deux paramètres, le temps t et le résultat λ . A un résultat donné λ_i , on associe une fonction unique $X(t, \lambda_i) = x_i(t)$, dite fonction temporelle élémentaire. L'ensemble de toutes ces fonctions constitue une famille. A un instant donné t_j , $X(t_j, \lambda) = X_j$ devient une variable aléatoire, et si l'on fixe $t (= t_j)$ ainsi que $\lambda (= \lambda_i)$, $X(t_j, \lambda_i) = x_i(t_j)$ est une valeur numérique.

C'est la raison pour laquelle on définit parfois un processus aléatoire comme une famille de variables aléatoires indexées par le paramètre $t \in T$, où T est appelé ensemble d'indexage.

La figure 6-1 illustre l'espace des événements de l'expérience considérée, les résultats de cette expérience, les fonctions élémentaires associées et les variables aléatoires obtenues lors de la mesure des deux paramètres d'une fonction temporelle élémentaire.

Dans la suite, nous utiliserons la notation $X(t)$ pour représenter $X(t, \lambda)$.

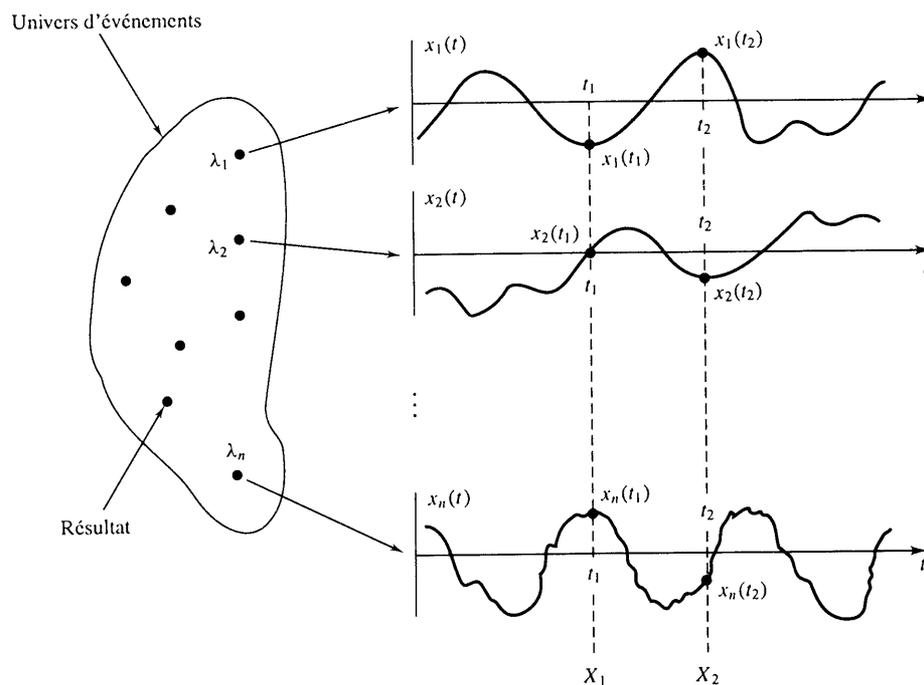


Fig. 6-1 Processus stochastique (ou aléatoire)

6.3 STATISTIQUE DES PROCESSUS ALÉATOIRES

A. Définitions

Considérons un processus stochastique $X(t)$. Si l'on fixe l'instant t , $X(t_1) = X_1$ est une variable aléatoire dont la fonction de répartition $F_X(x_1; t_1)$ a pour définition :

$$f_X(x_1; t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\} \quad (6.1)$$

où x_1 est un nombre réel quelconque.

$F_X(x_1; t_1)$ est appelée *distribution d'ordre un* de $X(t)$. La densité d'ordre un correspondante a pour expression :

$$f_X(x_1; t_1) = \frac{\partial F_X(x_1; t_1)}{\partial x_1} \quad (6.2)$$

De même, si l'on fixe t_1 et t_2 , $X(t_1) = X_1$ et $X(t_2) = X_2$ deviennent deux variables aléatoires. Leur distribution conjointe est appelée *distribution du deuxième ordre*, elle a pour expression :

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \quad (6.3)$$

où x_1 et x_2 sont deux réels quelconques.

La densité d'ordre deux correspondante a pour définition :

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (6.4)$$

De façon identique, pour n variables aléatoires $X(t_i) = X_i$ ($i = 1, \dots, n$), on définit une distribution d'ordre n :

$$F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \quad (6.5)$$

La densité correspondante d'ordre n a pour expression :

$$f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad (6.6)$$

B. Fonctions statistiques remarquables

Les processus stochastiques peuvent être caractérisés, comme les variables aléatoires, au moyen de fonctions particulières.

La *moyenne* de $X(t)$ a pour définition :

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x; t) dx \quad (6.7)$$

où $X(t)$ est considérée comme une variable aléatoire lorsque la valeur de t est fixée.

L'*autocorrélation* de $X(t)$ a pour expression :

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

L'*autocovariance* de $X(t)$ a pour définition :

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\} \\ &= R_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Le moment *conjoint ou composé* d'ordre n de $X(t)$ a pour expression :

$$E[X(t_1) \dots X(t_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \dots x_n f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad (6.10)$$

C. Stationnarité

1. Stationnarité au sens strict

Un processus aléatoire $X(t)$ est dit *stationnaire au sens strict* (SSS) si ses propriétés statistiques sont invariantes lorsqu'on change l'origine des temps. En d'autres termes, le processus $X(t)$ est stationnaire au sens strict (SSS) si :

$$f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_X(x_1, \dots, x_n; t_1 + c, \dots, t_n + c) \quad (6.11)$$

quel que soit c .

D'après la relation (6.11), il s'ensuit que $f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; t_1 + c)$ pour toute valeur de c . La densité de premier ordre d'un processus stationnaire $X(t)$ est donc indépendante de t :

$$f_X(x_1; t) = f_X(x_1) \quad (6.12)$$

De façon identique, $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + c, t_2 + c)$ pour toute valeur de c . En faisant $c = -t_1$, il vient :

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_2 - t_1) \quad (6.13)$$

ce qui montre que si $X(t)$ est SSS, la densité conjointe des variables aléatoires $X(t)$ et $X(t + \tau)$ est indépendante de t et ne dépend que de la variable temporelle τ (écart de temps).

2. Stationnarité au sens large

Un processus aléatoire $X(t)$ est dit *stationnaire au sens large* (SSL) si sa moyenne conserve une valeur constante :

$$E[X(t)] = \mu_X \quad (6.14)$$

tandis que son autocorrélation ne dépend que de τ :

$$E[X(t)X(t + \tau)] = R_{XX}(\tau) \quad (6.15)$$

Les relations (6.9) et (6.15) impliquent que la fonction d'autocovariance d'un processus SSL, elle aussi, ne dépende que de l'écart de temps τ .

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \mu_X^2 \quad (6.16)$$

En faisant $\tau = 0$ dans la relation (6.15), on obtient :

$$E[X^2(t)] = R_{XX}(0) \quad (6.17)$$

On en déduit que la puissance moyenne d'un processus SSL est indépendante de t et a pour valeur $R_{XX}(0)$.

On notera qu'un processus SSS est d'office SSL, mais que la réciproque n'est pas vraie.

Deux processus stochastiques $X(t)$ et $Y(t)$ sont dits *conjointement stationnaires au sens large* si chacun d'eux est SSL et si leur intercorrélacion ne dépend que de la variable τ :

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] = R_{XY}(\tau) \quad (6.18)$$

D'après la relation (6.18), il s'ensuit que l'inter-covariance de $X(t)$ et $Y(t)$ conjointement SSL ne dépend aussi que de la variable τ .

$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \mu_X \mu_Y \quad (6.19)$$

D. Moyennes temporelles et ergodicité

La *moyenne temporelle* d'une fonction élémentaire $x(t)$ d'un processus aléatoire $X(t)$ a pour définition :

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (6.20)$$

où les symboles \bar{x} et $\langle x(t) \rangle$ signifient respectivement *moyenne temporelle* de x et de $x(t)$.

De façon identique, la *moyenne temporelle de l'autocorrélation* de la fonction élémentaire $x(t)$ a pour définition :

$$\bar{R}_{XX}(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau) dt \quad (6.21)$$

Remarquons que \bar{x} et $\bar{R}_{XX}(\tau)$ sont des variables aléatoires; leurs valeurs dépendent de la fonction élémentaire de $X(t)$ qui est utilisée pour leur évaluation.

Si $X(t)$ est stationnaire, en prenant l'espérance mathématique des deux membres des relations (6.20) et (6.21), on obtient :

$$E[\bar{x}] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E[x(t)] dt = \mu_X \tag{6.22}$$

ce qui montre que l'espérance mathématique de la moyenne temporelle est égale à la moyenne d'ensemble du processus et que :

$$E[\bar{R}_{XX}(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E[x(t)x(t + \tau)] dt = R_{XX}(\tau) \tag{6.23}$$

ce qui montre que l'espérance mathématique de la moyenne temporelle de l'autocorrélation est égale à l'autocorrélation d'ensemble du processus.

Un processus aléatoire $X(t)$ est dit *ergodique* si les moyennes temporelles ont même valeur, pour toutes les fonctions temporelles élémentaires que les moyennes d'ensemble. On obtient donc tous les caractères statistiques d'un processus ergodique en observant une seule des fonctions élémentaires $x(t) = X(t, \lambda)$ (λ fixé) du processus.

Un processus stationnaire $X(t)$ est dit à *moyenne ergodique* si :

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle = E[X(t)] = \mu_X \tag{6.24}$$

De façon similaire, un processus stationnaire $X(t)$ est dit à *autocorrélation ergodique* si

$$\bar{R}_{XX}(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle = E[X(t)X(t + \tau)] = R_{XX}(\tau) \tag{6.25}$$

Il est très difficile de vérifier l'ergodicité d'un processus aléatoire. On fait une hypothèse raisonnable, dans le domaine des télécommunications, en supposant que la plupart des signaux de caractère aléatoire ont une moyenne et une autocorrélation ergodiques. Les grandeurs fondamentales qu'utilise l'ingénieur, valeurs continues, valeur efficace (rms = *root mean square* en anglais) et puissance moyenne s'expriment au moyen des moments d'un processus stochastique ergodique. On peut en lire la liste ci-après :

1. $\bar{x} = \langle x(t) \rangle$ est la composante continue du signal $x(t)$.
2. $[\bar{x}]^2 = \langle x(t) \rangle^2$ constitue la puissance de sa composante continue.
3. $\bar{R}_{XX}(0) = \langle x^2(t) \rangle$ constitue la puissance moyenne totale du signal $x(t)$.
4. $\bar{\sigma}_X^2 = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2$ constitue la puissance moyenne de sa composante alternative.
5. $\bar{\sigma}_X$ est égal à la valeur efficace du signal $x(t)$ (on dit aussi valeur rms).

6.4 CORRÉLATION ET DENSITÉ SPECTRALE DE PUISSANCE

Nous supposons dans ce qui suit que tous les processus stochastiques sont stationnaires au sens large.

A. Autocorrélation $R_{XX}(\tau)$

L'autocorrélation de $X(t)$ a pour valeur, d'après la définition (6.15),

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)]$$

Propriétés de $R_{XX}(\tau)$:

1. $R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$ (6.26)
2. $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$ (6.27)
3. $R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$ (6.28)

B. Intercorrélation $R_{XY}(\tau)$

L'intercorrélation de $X(t)$ et de $Y(t)$ a pour expression, d'après la relation (6.18) :

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t + \tau)]$$

Propriétés de $R_{XY}(\tau)$:

$$1. \quad R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau) \quad (6.29)$$

$$2. \quad |R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)} \quad (6.30)$$

$$3. \quad |R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)] \quad (6.31)$$

C. Autocovariance $C_{XX}(\tau)$:

L'autocovariance de $X(t)$ a pour définition, selon la relation (6.9) :

$$\begin{aligned} C_{XX}(\tau) &= E[\{X(t) - E[X(t)]\}\{X(t + \tau) - E[X(t + \tau)]\}] \\ &= R_{XX}(\tau) - \mu_X^2 \end{aligned} \quad (6.32)$$

D. Intercovariance $C_{XY}(\tau)$

L'intercovariance de $X(t)$ et $Y(t)$ a pour expression :

$$\begin{aligned} C_{XY}(\tau) &= E[\{X(t) - E[X(t)]\}\{Y(t + \tau) - E[Y(t + \tau)]\}] \\ &= R_{XY}(\tau) - \mu_X\mu_Y \end{aligned} \quad (6.33)$$

Deux processus stochastiques $X(t)$ et $Y(t)$ sont dits *mutuellement orthogonaux* si :

$$R_{XY}(\tau) = 0 \quad (6.34)$$

Ils sont dits non corrélés lorsque :

$$C_{XY}(\tau) = 0 \quad (6.35)$$

E. Densité spectrale de puissance

Soit $R_{XX}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation de $X(t)$. On appelle *densité spectrale de puissance* (ou *spectre de puissance*) de $X(t)$ la transformée de Fourier (voir paragraphe 1.6) de la fonction d'autocorrélation de $X(t)$, $R_{XX}(\tau)$, c'est-à-dire :

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (6.36)$$

D'où l'on déduit que :

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (6.37)$$

Les relations (6.36) et (6.37) sont connues sous le nom de *formules de Wiener-Khinchin*.

Propriétés de $S_{XX}(\omega)$:

$$1. \quad S_{XX}(\omega) \text{ est réelle et } S_{XX}(\omega) \geq 0 \quad (6.38)$$

$$2. \quad S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega) \quad (6.39)$$

$$3. \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = R_{XX}(0) = E[X^2(t)] \quad (6.40)$$

F. Densité spectrale croisée

La *densité spectrale croisée* (encore appelée *interspectre de puissance*) $S_{XY}(\omega)$ ou $S_{YX}(\omega)$ de $X(t)$ et $Y(t)$ a pour définition :

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (6.41)$$

aussi bien que :

$$S_{YX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (6.42)$$

L'intercorrélation et la densité spectrale croisée forment une paire de transformées de Fourier. On a donc :

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (6.43)$$

$$R_{YX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (6.44)$$

En tenant compte de la relation (6.29), on obtient :

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$$

Ce qui donne, porté dans les relations (6.41) et (6.42) :

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = S_{YX}^*(\omega) \quad (6.45)$$

6.5 PROCESSUS ALÉATOIRE ET SYSTÈME LINÉAIRE

A. Réponse du système

On a vu qu'un *système linéaire indépendant du temps* (SLIT) se définit au moyen de la relation (paragraphe 1.7) :

$$Y(t) = L[X(t)] \quad (6.46)$$

où $Y(t)$ est le signal de sortie du SLIT, représenté par un opérateur linéaire L , alimenté par un signal d'entrée aléatoire $X(t)$.

Soit $h(t)$ la réponse impulsionnelle d'un SLIT (figure 6-2); d'après la relation (1.80) du paragraphe 1.8, on a :

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) X(t - \alpha) d\alpha \quad (6.47)$$

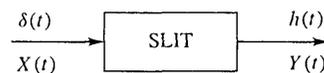


Fig. 6-2 SLIT

B. Moyenne et autocorrélation du signal de sortie

$$\begin{aligned} \mu_Y(t) &= E[Y(t)] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) X(t - \alpha) d\alpha \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) E[X(t - \alpha)] d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \mu_X(t - \alpha) d\alpha = h(t) * \mu_X(t) \end{aligned} \quad (6.48)$$

où le symbole $*$ indique une convolution.

$$\begin{aligned}
R_{YY}(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] \\
&= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)X(t_1 - \alpha)h(\beta)X(t_2 - \beta) d\alpha d\beta \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)E[X(t_1 - \alpha)X(t_2 - \beta)] d\alpha d\beta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_{XX}(t_1 - \alpha, t_2 - \beta) d\alpha d\beta \tag{6.49}
\end{aligned}$$

Si le signal d'entrée $X(t)$ est stationnaire au sens large (SSL), on obtient, en invoquant la relation (6.48) :

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\mu_X d\alpha = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) d\alpha = \mu_X H(0) \tag{6.50}$$

où $H(0)$ est la réponse en fréquence du système linéaire pour $\omega = 0$. La moyenne du signal de sortie a donc une valeur constante.

L'autocorrélation du signal de sortie, qui s'exprime suivant la relation (6.49), devient donc :

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_{XX}(t_2 - t_1 + \alpha - \beta) d\alpha d\beta \tag{6.51}$$

ce qui montre que $R_{YY}(t_1, t_2)$ est une fonction de la différence temporelle $\tau = t_2 - t_1$, ce qui donne :

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_{XX}(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta \tag{6.52}$$

On en conclut donc que si le signal d'entrée $X(t)$ est stationnaire au sens large (SSL) le signal de sortie $Y(t)$ l'est aussi.

C. Densité spectrale de puissance du signal de sortie

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de la relation (6.52), on obtient la densité spectrale de puissance du signal de sortie :

$$\begin{aligned}
S_{YY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{YY}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_{XX}(\tau + \alpha - \beta)e^{-j\omega\tau} d\tau d\alpha d\beta \\
&= |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) \tag{6.53}
\end{aligned}$$

On obtient ici un résultat important : la densité spectrale de puissance du signal de sortie est égale à la densité spectrale de puissance du signal d'entrée multipliée par le carré du module de la réponse en fréquence du système (relation 1.101).

Lorsqu'on désire connaître la fonction d'autocorrélation $R_{YY}(\tau)$ du signal de sortie, il est plus facile d'évaluer sa densité spectrale de puissance $S_{YY}(\omega)$ et d'en prendre la transformée de Fourier inverse (problème 6.21), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
R_{YY}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \tag{6.54}
\end{aligned}$$

En invoquant la relation (6.17), on obtient l'expression de la puissance moyenne du signal de sortie $Y(t)$:

$$E[Y^2(t)] = R_{YY}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) d\omega \tag{6.55}$$

6.6 PROCESSUS STOCHASTIQUES REMARQUABLES

Dans ce qui suit, nous allons étudier un certain nombre de processus stochastiques que l'on rencontre couramment dans le domaine des télécommunications.

A. Processus aléatoire gaussien

Considérons un processus aléatoire $X(t)$ et définissons n variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ correspondant à n instants de mesure t_1, \dots, t_n . On forme un vecteur aléatoire \mathbf{X} (matrice $n \times 1$), qui a pour définition :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

Soit aussi \mathbf{x} un vecteur à n dimensions (matrice $n \times 1$), ayant pour définition :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Ce qui permet de noter $\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\}$ l'événement $\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$. $X(t)$ est, par définition, un processus *gaussien* (ou *normal*) si \mathbf{X} présente une densité multivariable conjointement gaussienne pour tout ensemble fini de valeurs $\{t_i\}$ et pour tout n .

La densité multivariable d'un processus gaussien a pour expression :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det \mathbf{C}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right] \quad (6.58)$$

où T désigne l'opération de transposition matricielle, $\boldsymbol{\mu}$ est le *vecteur moyenne*, \mathbf{C} est la *matrice de covariance*, d'expression :

$$\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[X(t_1)] \\ E[X(t_2)] \\ \vdots \\ E[X(t_n)] \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

où

$$C_{ij} = C_{XX}(t_i, t_j) = R_{XX}(t_i, t_j) - \mu_i \mu_j \quad (6.61)$$

expression qui représente la covariance de $X(t_i)$ et $X(t_j)$, tandis que $\det \mathbf{C}$ est le déterminant de la matrice \mathbf{C} .

Les propriétés les plus importantes d'un processus gaussien sont énumérées ci-après :

1. Un processus gaussien est entièrement défini par l'ensemble de ses moyennes :

$$u_i = E[X(t_i)] \quad i = 1, \dots, n$$

et de ses fonctions d'autocorrélation :

$$R_{XX}(t_i, t_j) = E[X(t_i)X(t_j)] \quad i, j = 1, \dots, n$$

2. Si l'ensemble des variables aléatoires $X(t_i)$, $i = 1, \dots, n$ ne présentent aucune corrélation, c'est-à-dire si :

$$C_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

alors les $X(t_i)$ sont indépendants.

3. Si un processus gaussien $X(t)$ est stationnaire au sens large, alors il l'est au sens strict.

4. Si l'on applique un processus gaussien à l'entrée d'un système linéaire, le processus aléatoire en sortie est lui aussi gaussien.

B. Bruit blanc

On dit qu'un processus aléatoire est un *bruit blanc* lorsque sa densité spectrale de puissance est constante — figure 6-3(a) :

$$S_{XX}(\omega) = \frac{\eta}{2} \quad (6.62)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de cette relation, on obtient :

$$R_{XX}(\tau) = \frac{\eta}{2} \delta(\tau) \quad (6.63)$$

ce qu'illustre la figure 6-3(b). On suppose implicitement que la valeur moyenne d'un bruit blanc est nulle.

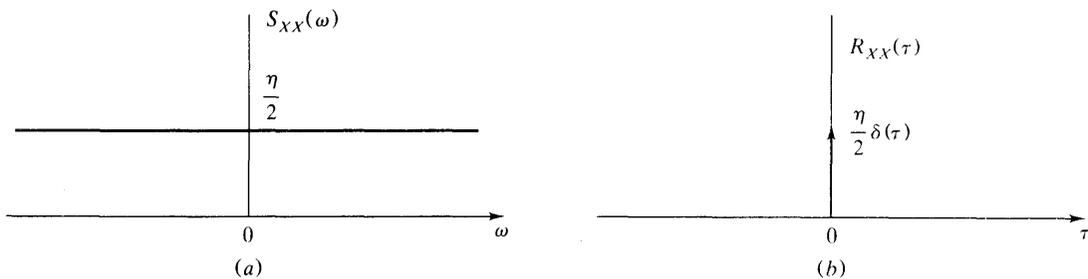


Fig. 6-3 Bruit blanc

C. Bruit blanc à bande limitée

Un processus aléatoire est dit *bruit blanc à bande limitée* s'il satisfait à la condition :

$$S_{XX}(\omega) = \begin{cases} \frac{\eta}{2} & |\omega| \leq \omega_B \\ 0 & |\omega| \geq \omega_B \end{cases} \quad (6.64)$$

d'où l'on déduit que :

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \frac{\eta}{2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{\eta\omega_B}{2\pi} \frac{\sin \omega_B \tau}{\omega_B \tau} \quad (6.65)$$

La figure 6-4 représente la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc à bande limitée.

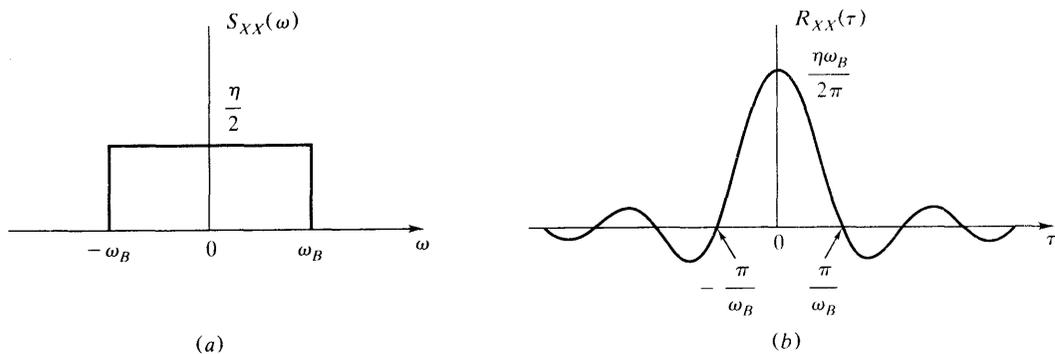


Fig. 6-4 Bruit blanc à bande limitée

Notons au passage que les termes *blanc* ou *blanc à bande limitée* renvoient à l'allure spectrale du processus $X(t)$ et n'impliquent aucunement que la distribution associée à $X(t)$ soit gaussienne.

D. Processus aléatoire à bande étroite

Supposons que $X(t)$ soit un processus SSL de moyenne à valeur nulle et de densité spectrale de puissance $S_{XX}(\omega)$ non nulle dans une bande de largeur $2W$ dont la valeur est faible par rapport à la fréquence centrale ω_c de cette bande, comme le représente la figure 6-5. On dit, dans ces conditions, que $X(t)$ est un *processus à bande étroite*.

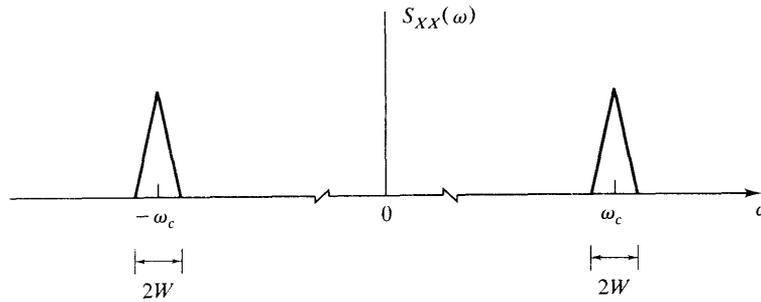


Fig. 6-5 Processus aléatoire à bande limitée

En télécommunication, on obtient un processus aléatoire (ou un bruit) à bande étroite par filtrage linéaire. Lorsqu'on observe une des fonctions temporelles élémentaires du processus, par exemple au moyen d'un oscilloscope, la forme du signal ressemble à une sinusoïde d'amplitude et de phase aléatoires. On peut ainsi représenter un processus aléatoire à bande étroite de la façon suivante :

$$X(t) = V(t) \cos [\omega_p t + \phi(t)] \tag{6.66}$$

où $V(t)$ et $\phi(t)$ sont des processus aléatoires appelés *enveloppe* et *phase* du signal aléatoire.

La relation (6.66) peut ainsi s'écrire :

$$\begin{aligned} X(t) &= V(t) \cos \phi(t) \cos \omega_p t - V(t) \sin \phi(t) \omega_p t \\ &= X_c(t) \cos \omega_p t - X_s(t) \sin \omega_p t \end{aligned} \tag{6.67}$$

où

$$X_c(t) = V(t) \cos \phi(t) \quad (\text{composante en phase}) \tag{6.68a}$$

$$X_s(t) = V(t) \sin \phi(t) \quad (\text{composante en quadrature}) \tag{6.68b}$$

$$V(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)} \tag{6.69a}$$

$$\phi(t) = \arctan \frac{X_s(t)}{X_c(t)} \tag{6.69b}$$

La relation (6.67) définit la *décomposition cartésienne* de $X(t)$. Pour une fonction $X(t)$ donnée, on obtient ses composantes en phase et en quadrature de phase au moyen du dispositif représenté sur la figure 6-6.

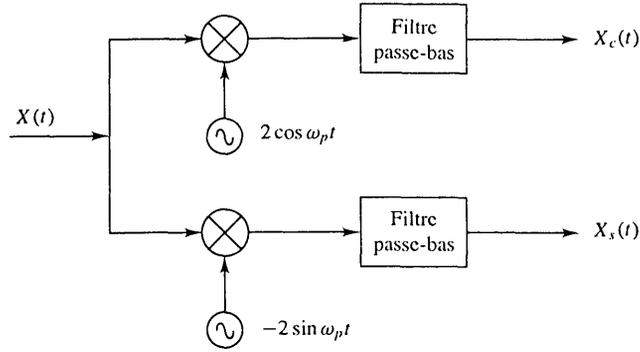


Fig. 6-6

Propriétés de $X_c(t)$ et de $X_s(t)$:

1. $X_c(t)$ et $X_s(t)$ ont même densité spectrale de puissance, liée à celle de $X(t)$ par la relation :

$$S_{X_c}(\omega) = S_{X_s}(\omega) = \begin{cases} S_{XX}(\omega - \omega_p) + S_{XX}(\omega + \omega_p) & |\omega| \leq W \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (6.70)$$

2. $X_c(t)$ et $X_s(t)$ ont même moyenne et même écart-type que $X(t)$:

$$\mu_{X_c} = \mu_{X_s} = \mu_X = 0 \quad (6.71)$$

$$\sigma_{X_c}^2 = \sigma_{X_s}^2 = \sigma_X^2 \quad (6.72)$$

3. $X_c(t)$ et $X_s(t)$ sont décorrélées :

$$E[X_c(t)X_s(t)] = 0 \quad (6.73)$$

4. Si $X(t)$ est un processus gaussien, $X_c(t)$ et $X_s(t)$ sont des processus gaussiens.
5. Si $X(t)$ est gaussien, pour une valeur quelconque de t fixée, $V(t)$ est une variable aléatoire à distribution de Rayleigh tandis que $\phi(t)$ est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ (voir problème 5.33).

Problèmes résolus

PROCESSUS ALÉATOIRES ET FONCTIONS ASSOCIÉES

- 6.1. Considérons un processus aléatoire $X(t)$ défini comme suit :

$$X(t) = A \cos(\omega t + \Theta) \quad (6.74)$$

où A et ω sont des constantes et Θ est une V.A. uniformément répartie sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que $X(t)$ est stationnaire au sens large (SSL).

D'après la relation (5.119) du problème 5.16, on a :

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La valeur moyenne du processus a pour expression :

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(\omega t + \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta \\ &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \theta) d\theta = 0\end{aligned}\quad (6.75)$$

$$\begin{aligned}R_{XX}(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \theta) \cos[\omega(t + \tau) + \theta] d\theta \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos \omega\tau + \cos(2\omega t + 2\theta + \omega\tau)] d\theta \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega\tau\end{aligned}\quad (6.76)$$

La moyenne de $X(t)$ est constante et sa fonction d'autocorrélation ne dépend que de la différence temporelle τ , on en déduit donc que $X(t)$ est SSL.

Notons que la fonction $R_{XX}(\tau)$ est périodique, de période $T_0 = 2\pi/\omega$. Un processus aléatoire SSL est dit *périodique* si sa fonction d'autocorrélation est périodique.

6.2. Soit un processus aléatoire défini par :

$$X(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (6.77)$$

où ω et θ sont des constantes et A est une variable aléatoire. Dire si $X(t)$ est stationnaire au sens large.

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] = E[A \cos(\omega t + \theta)] \\ &= \cos(\omega t + \theta) E[A]\end{aligned}\quad (6.78)$$

ce qui prouve que la moyenne de $X(t)$ n'a pas une valeur constante, à moins que $E[A] = 0$.

$$\begin{aligned}R_{XX}(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= E[A^2 \cos(\omega t + \theta) \cos[\omega(t + \tau) + \theta]] \\ &= \frac{1}{2} [\cos \omega\tau + \cos(2\omega t + 2\theta + \omega\tau)] E[A^2]\end{aligned}\quad (6.79)$$

On voit que l'autocorrélation de $X(t)$ n'est pas uniquement fonction de la différence temporelle τ , ce qui implique la non-stationnarité au sens large du processus $X(t)$.

6.3. On considère le processus aléatoire $Y(t)$ défini par :

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau \quad (6.80)$$

où $X(t)$ a pour expression :

$$X(t) = A \cos \omega t \quad (6.81)$$

la valeur de ω étant constante, et A vérifiant une loi normale $N[0; \sigma^2]$.

(a) Déterminer la densité de probabilité de $Y(t)$ à l'instant $t = t_k$.

(b) $Y(t)$ est-elle stationnaire au sens large ?

$$(a) \quad Y(t_k) = \int_0^{t_k} A \cos \omega\tau d\tau = \frac{\sin \omega t_k}{\omega} A \quad (6.82)$$

D'après le résultat obtenu lors du problème 5.24, on voit que $Y(t_k)$ est une variable aléatoire gaussienne dont l'espérance a pour expression :

$$E[Y(t_k)] = \frac{\sin \omega t_k}{\omega} E[A] = 0 \quad (6.83)$$

et la variance a pour expression :

$$\sigma_Y^2 = \text{var}[Y(t_k)] = \left(\frac{\sin \omega t_k}{\omega} \right)^2 \sigma^2 \quad (6.84)$$

D'après la relation (5.103), la densité de probabilité de $Y(t_k)$ a donc pour expression :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-y^2/(2\sigma_Y^2)} \quad (6.85)$$

- (b) D'après les relations (6.83) et (6.84), la moyenne et la variance de $Y(t)$ dépendent du temps $t(t_k)$, donc $Y(t)$ n'est pas stationnaire au sens large.

6.4. On considère le processus aléatoire $X(t)$ ayant pour définition :

$$X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (6.86)$$

où A et B sont des V.A. tandis que ω est une constante.

- (a) Montrer que la condition suivante :

$$E[A] = E[B] = 0 \quad (6.87)$$

est nécessaire pour que $X(t)$ soit stationnaire.

- (b) Montrer que $X(t)$ est SSL si et seulement si les variables aléatoires A et B sont non corrélées et ont même variance, c'est-à-dire :

$$E[AB] = 0 \quad (6.88)$$

et

$$E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2 \quad (6.89)$$

- (a) La moyenne $\mu_X(t) = E[X(t)] = E[A] \cos \omega t + E[B] \sin \omega t$ doit être indépendante de t pour que $X(t)$ soit stationnaire.

Cela n'est possible que si $\mu_X(t) = 0$, c'est-à-dire :

$$E[A] = E[B] = 0$$

- (b) Si $X(t)$ est SSL, on a, d'après la relation (6.17) :

$$E[X^2(0)] = E\left[X^2\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right] = R_{XX}(0) = \sigma_X^2$$

mais d'autre part :

$$X(0) = A \quad \text{et} \quad X\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = B$$

On en déduit :

$$E[A^2] = E[B^2] = \sigma_X^2 = \sigma^2$$

En utilisant les résultats qui précèdent, on obtient :

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= E\left[(A \cos \omega t + B \sin \omega t)(A \cos \omega(t + \tau) + B \sin \omega(t + \tau))\right] \\ &= \sigma^2 \cos \omega \tau + E[AB] \sin(2\omega t + \omega \tau) \end{aligned} \quad (6.90)$$

qui ne peut être fonction uniquement de τ que si $E[AB] = 0$.

Si maintenant $E[AB] = 0$ et $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$, d'après le résultat obtenu en (a) et la relation (6.90), on a :

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= 0 \\ R_{XX}(t, t + \tau) &= \sigma^2 \cos \omega \tau = R_{XX}(\tau)\end{aligned}$$

d'où l'on conclut que $X(t)$ est stationnaire au sens large (SSL).

6.5. Un processus aléatoire $X(t)$ est dit à *covariance stationnaire* si sa fonction de covariance ne dépend que de l'écart de temps $\tau = t_2 - t_1$, soit :

$$C_{XX}(t, t + \tau) = C_{XX}(\tau) \quad (6.91)$$

Soit alors $X(t)$ tel que :

$$X(t) = (A + 1) \cos t + B \sin t$$

où A et B sont des variables aléatoires indépendantes pour lesquelles on a :

$$E[A] = E[B] = 0 \quad \text{et} \quad E[A^2] = E[B^2] = 1$$

Montrer que $X(t)$ n'est pas SSL, mais à covariance stationnaire.

On peut écrire que :

$$\begin{aligned}\mu_X(t) &= E[X(t)] = E[(A + 1) \cos t + B \sin t] \\ &= E\left[(A + 1) \cos t_1 + B \sin t_1\right] \left[(A + 1) \cos t_2 + B \sin t_2\right] \\ &= E\left[(A + 1)^2\right] \cos t_1 \cos t_2 + E[B^2] \sin t_1 \sin t_2 \\ &\quad + E\left[(A + 1)B\right] (\cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2)\end{aligned}$$

Or il se trouve que :

$$\begin{aligned}E\left[(A + 1)^2\right] &= E[A^2 + 2A + 1] = E[A^2] + 2E[A] + 1 = 2 \\ E\left[(A + 1)B\right] &= E[AB] + E[B] = E[A]E[B] + E[B] = 0 \\ E[B^2] &= 1\end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans l'expression de $R_{XX}(t_1, t_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}R_{XX}(t_1, t_2) &= 2 \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2 \\ &= \cos(t_2 - t_1) + \cos t_1 \cos t_2\end{aligned}$$

D'après la relation (6.9), on a :

$$\begin{aligned}C_{XX}(t_1, t_2) &= R_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \\ &= \cos(t_2 - t_1) + \cos t_1 \cos t_2 - \cos t_1 \cos t_2 \\ &= \cos(t_2 - t_1)\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que $X(t)$ est à covariance stationnaire.

6.6. Montrer que le processus $X(t)$ défini par la relation (6.74) du problème 6.1 est à moyenne et à autocorrélation ergodiques.

D'après la relation (6.20), on a

$$\begin{aligned}\bar{x} = \langle x(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega t + \theta) dt \\ &= \frac{A}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A \cos(\omega t + \theta) dt = 0\end{aligned} \quad (6.92)$$

où $T_0 = 2\pi/\omega$.

D'après la relation (6.21), on a :

$$\begin{aligned}
 \overline{R}_{XX}(\tau) &= \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos(\omega t + \theta) \cos[\omega(t+\tau) + \theta] dt \\
 &= \frac{A^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1}{2} [\cos \omega \tau + \cos(2\omega t + 2\theta + \omega \tau)] dt \\
 &= \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau
 \end{aligned} \tag{6.93}$$

On a, en définitive :

$$\begin{aligned}
 \mu_X(t) &= E[X(t)] = \langle x(t) \rangle = \bar{x} \\
 R_{XX}(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = \langle X(t)X(t+\tau) \rangle = \overline{R}_{XX}(\tau)
 \end{aligned}$$

D'après les définitions (6.24) et (6.25), on conclut que $X(t)$ est à moyenne et à autocorrélation ergodiques.

CORRÉLATION ET SPECTRE DE PUISSANCE

6.7. Montrer que, si $X(t)$ est SSL, on a la relation :

$$E[[X(t+\tau) - X(t)]^2] = 2[R_{XX}(0) - R_{XX}(\tau)] \tag{6.94}$$

où $R_{XX}(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de $X(t)$.

En appliquant la propriété de linéarité de l'opérateur E (espérance mathématique), il vient :

$$\begin{aligned}
 E[[X(t+\tau) - X(t)]^2] &= E[X^2(t+\tau) - 2X(t+\tau)X(t) + X^2(t)] \\
 &= E[X^2(t+\tau)] - 2E[X(t+\tau)X(t)] + E[X^2(t)] \\
 &= R_{XX}(0) - 2R_{XX}(\tau) + R_{XX}(0) \\
 &= 2[R_{XX}(0) - R_{XX}(\tau)]
 \end{aligned}$$

6.8. Soit $X(t)$ un processus stochastique. Démontrer les relations (6.26) et (6.27), à savoir :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad &R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau) \\
 (b) \quad &|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)
 \end{aligned}$$

(a) D'après la relation (6.15), on a :

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

en posant $t + \tau = t'$, il vient :

$$\begin{aligned}
 R_{XX}(\tau) &= E[X(t' - \tau)X(t')] \\
 &= E[X(t')X(t' - \tau)] = R_{XX}(-\tau)
 \end{aligned}$$

(b) On peut écrire que :

$$\begin{aligned}
 &E[[X(t) \pm X(t+\tau)]^2] \geq 0 \\
 \text{soit} \quad &E[X^2(t) \pm 2X(t)X(t+\tau) + X^2(t+\tau)] \geq 0 \\
 \text{ou encore} \quad &E[X^2(t)] \pm 2E[X(t)X(t+\tau)] + E[X^2(t+\tau)] \geq 0 \\
 \text{soit} \quad &2R_{XX}(0) \pm 2R_{XX}(\tau) \geq 0 \\
 \text{d'où} \quad &R_{XX}(0) \geq |R_{XX}(\tau)|
 \end{aligned}$$

- 6.9.** Montrer que le spectre de puissance d'un processus aléatoire $X(t)$ à valeurs réelles est réel et vérifie la relation (6.39), à savoir :

$$S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)$$

D'après la relation (6.36) et en développant l'exponentielle, il vient :

$$\begin{aligned} S_{XX}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) (\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \sin \omega\tau d\tau \end{aligned} \quad (6.95)$$

Comme $R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$ (relation 6.26), le terme imaginaire de la relation (6.95) disparaît et il reste :

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (6.96)$$

ce qui indique que $S_{XX}(\omega)$ est à valeurs réelles.

Comme de plus la fonction cosinus est paire, c'est-à-dire que $\cos(-\omega\tau) = \cos(\omega\tau)$, il s'ensuit que :

$$S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)$$

ce qui démontre que le spectre de puissance de $X(t)$ est une fonction paire de la fréquence.

- 6.10.** On définit une certaine classe de signaux $Y(t)$ au moyen de la relation :

$$Y(t) = AX(t) \cos(\omega_p t + \Theta) \quad (6.97)$$

où $X(t)$ est un signal aléatoire modulant une porteuse sinusoïdale $A \cos(\omega_p t + \Theta)$. Le signal modulant $X(t)$ est un processus aléatoire stationnaire à valeur moyenne nulle, de fonction de corrélation $R_{XX}(\tau)$ et de spectre de puissance $S_{XX}(\omega)$. L'amplitude de la porteuse A ainsi que sa pulsation ω_p sont des constantes, tandis que la phase Θ est uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. En supposant que $X(t)$ et Θ sont indépendants, calculer la valeur moyenne, la fonction d'autocorrélation et le spectre de puissance de $Y(t)$.

Calculons la moyenne :

$$\begin{aligned} \mu_Y(t) &= E[Y(t)] = E[AX(t) \cos(\omega_p t + \Theta)] \\ &= AE[X(t)]E[\cos(\omega_p t + \Theta)] = 0 \end{aligned}$$

puisque $X(t)$ et Θ sont indépendants et puisque $E[X(t)] = 0$.

Calculons la fonction d'autocorrélation :

$$\begin{aligned} R_{YY}(t, t + \tau) &= E[Y(t)Y(t + \tau)] \\ &= E\left[A^2 X(t)X(t + \tau) \cos(\omega_p t + \Theta) \cos[\omega_p(t + \tau) + \Theta]\right] \\ &= \frac{A^2}{2} E[X(t)X(t + \tau)] E[\cos \omega_p \tau + \cos 2\omega_p t + \omega_p \tau + 2\Theta] \\ &= \frac{A^2}{2} R_{XX}(\tau) \cos \omega_p \tau = R_{YY}(\tau) \end{aligned} \quad (6.98)$$

Comme la moyenne de $Y(t)$ est constante et comme sa fonction d'autocorrélation ne dépend que de l'écart de temps τ , $Y(t)$ est stationnaire au sens large (SSL). Ainsi :

Calculons donc le spectre de puissance :

$$S_{YY}(\omega) = \mathcal{F}[R_{YY}(\tau)] = \frac{A^2}{2} \mathcal{F}[R_{XX}(\tau) \cos \omega_p \tau]$$

D'après les relations (6.36) et (1.42) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[R_{XX}(\tau)] &= S_{XX}(\omega) \\ \mathcal{F}(\cos \omega_p \tau) &= \pi \delta(\omega - \omega_p) + \pi \delta(\omega + \omega_p) \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de la convolution (1.54) et la relation (1.52), il vient :

$$\begin{aligned} S_{YY}(\omega) &= \frac{A^2}{4\pi} S_{XX}(\omega) * [\pi\delta(\omega - \omega_p) + \pi\delta(\omega + \omega_p)] \\ &= \frac{A^2}{4} [S_{XX}(\omega - \omega_p) + S_{XX}(\omega + \omega_p)] \end{aligned} \quad (6.99)$$

- 6.11. On considère un processus aléatoire $X(t)$ qui prend les valeurs $\pm A$ avec la même probabilité. La figure 6-7 représente une fonction élémentaire typique du processus $X(t)$. On appelle α le nombre moyen de commutations (passages à zéro) par unité de temps. La probabilité d'avoir k commutations au cours de la durée τ suit une loi de Poisson (relation 5.98) :

$$P(Z = k) = e^{-\alpha\tau} \frac{(\alpha\tau)^k}{k!} \quad (6.100)$$

où Z est la variable aléatoire qui représente le nombre de commutations. Le processus $X(t)$ est connu sous le nom de *signal des télégraphistes*. Calculer la fonction d'autocorrélation et le spectre de puissance de $X(t)$.

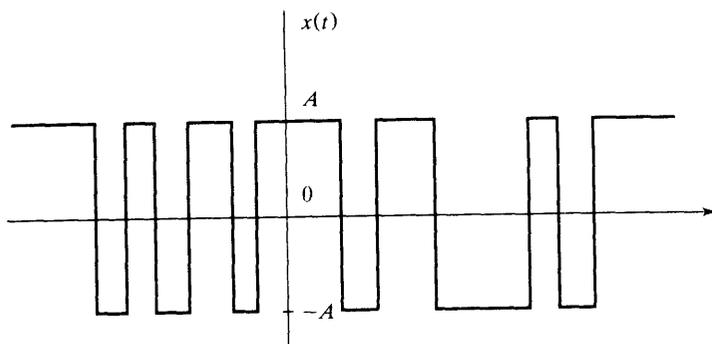


Fig. 6-7 Signal des télégraphistes

Soit τ un intervalle de temps quelconque, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t + \tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \\ &= A^2 P[X(t) \text{ et } X(t + \tau) \text{ ont même signe}] \\ &= +(-A^2) P[X(t) \text{ et } X(t + \tau) \text{ sont de signe différent}] \\ &= A^2 P[Z \text{ pair dans } (t, t + \tau)] - A^2 P[Z \text{ impair dans } (t, t + \tau)] \\ &= A^2 \sum_{k \text{ pair}} e^{-\alpha\tau} \frac{(\alpha\tau)^k}{k!} - A^2 \sum_{k \text{ impair}} e^{-\alpha\tau} \frac{(\alpha\tau)^k}{k!} \\ &= A^2 e^{-\alpha\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\tau)^k}{k!} (-1)^k \\ &= A^2 e^{-\alpha\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha\tau)^k}{k!} = A^2 e^{-\alpha\tau} e^{-\alpha\tau} = A^2 e^{-2\alpha\tau} \end{aligned} \quad (6.101)$$

ce qui montre que l'autocorrélation ne dépend que de l'écart temporel τ . D'après la relation (6.26), la solution complète, englobant les valeurs de τ négatives, a pour expression :

$$R_{XX}(\tau) = A^2 e^{-2\alpha|\tau|} \quad (6.102)$$

dont la figure 6-8(a) représente le tracé.

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de la relation (6.102), on voit que le spectre de puissance de $X(t)$ a pour expression (relation 1.46) :

$$S_{XX}(\omega) = A^2 \frac{4\alpha}{\omega^2 + (2\alpha)^2} \tag{6.103}$$

dont la figure 6-8(b) représente le tracé.

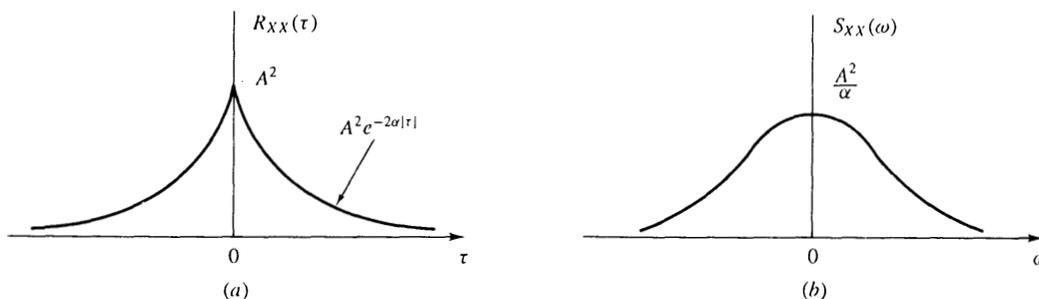


Fig. 6-8

6.12. On considère un processus aléatoire binaire $X(t)$ consistant en une suite de bits 0 et 1. La figure 6-9 représente une fonction type du processus $X(t)$. On suppose par ailleurs que :

1. Les bits 1 et 0 sont respectivement représentés par des impulsions d'amplitude $+A$ et $-A$, de durée T_b .
2. Les bits 0 et 1 sont équiprobables et leurs apparitions, d'un intervalle à un autre, sont indépendantes.
3. La séquence d'impulsions n'est pas synchronisée, ce qui a pour conséquence que l'instant t_r d'apparition de la première impulsion postérieure à $t = 0$ peut prendre toute valeur entre 0 et T_b . Autrement dit, t_r est une valeur de la variable aléatoire T_r uniformément répartie sur l'intervalle $[0, T_b]$.

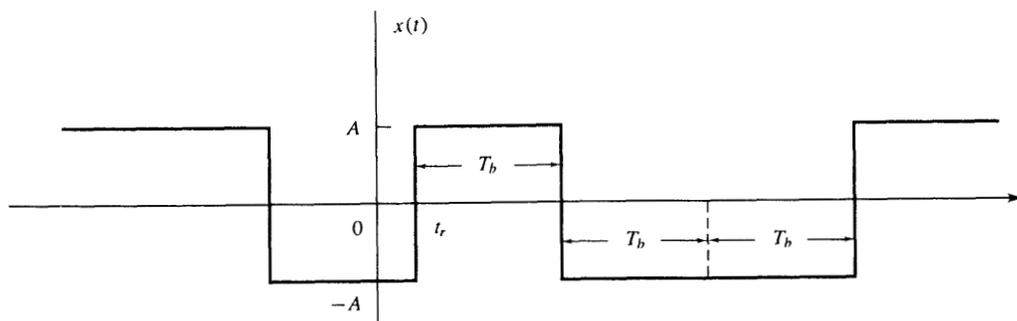


Fig. 6-9 Signal binaire aléatoire

Calculer la fonction d'autocorrélation de $X(t)$.

Ce processus binaire aléatoire a pour représentation :

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k p(t - kT_b - T_r) \tag{6.104}$$

où $\{A_k\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes avec $P[A_k = A] = P[A_k = -A] = \frac{1}{2}$ et $p(t)$ est l'impulsion d'amplitude unité et de durée T_b , tandis que T_r est une V.A. uniformément distribuée sur $[0, T_b]$.

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[A_k] = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(-A) = 0 \quad (6.105)$$

Soit alors $t_2 > t_1$. Lorsque $t_2 - t_1 > T_b$, t_1 et t_2 tombent dans des intervalles différents, comme le montre la figure 6-10(a); les V.A. $X(t_1)$ et $X(t_2)$ sont donc indépendantes et l'on a :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)]E[X(t_2)] = 0 \quad (6.106)$$

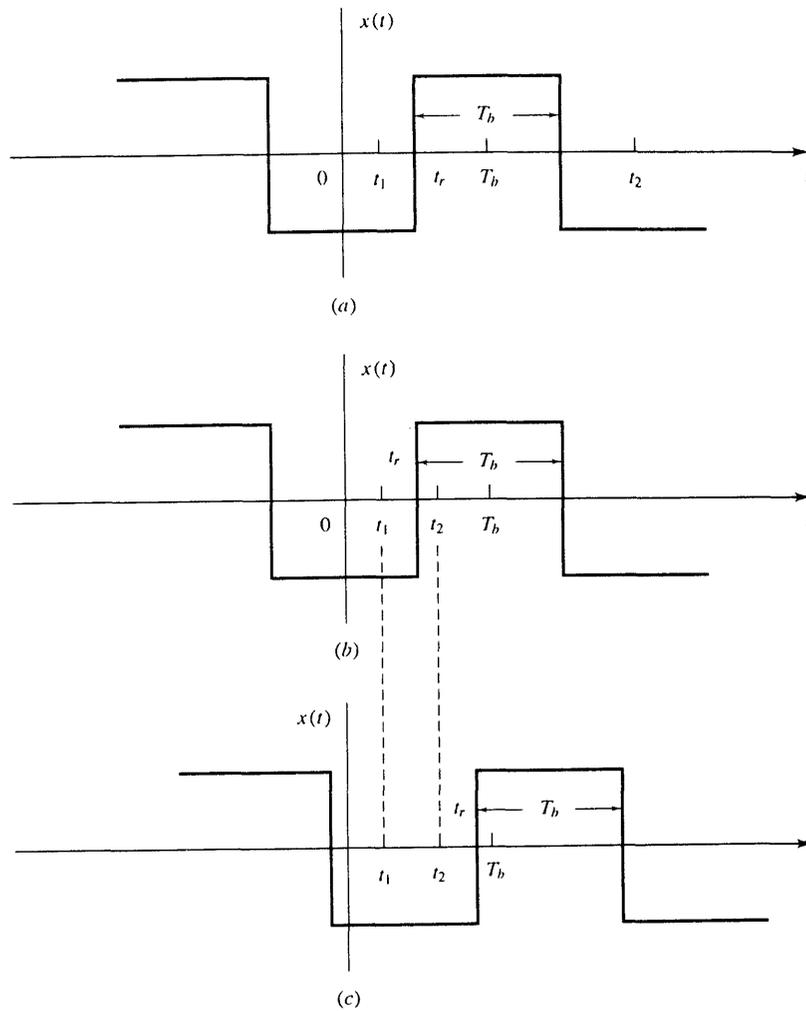


Fig. 6-10

Lorsque $t_2 - t_1 < T_b$, suivant la valeur de T_r , t_1 et t_2 peuvent ne pas appartenir au même intervalle, comme l'illustrent la figure 6-10 (b) et (c); si donc l'on appelle B l'événement aléatoire « t_1 et t_2 sont dans deux intervalles consécutifs», on peut écrire que :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)|B]P(B) + E[X(t_1)X(t_2)|\bar{B}]P(\bar{B})$$

Or

$$\begin{aligned} E[X(t_1)X(t_2)|B] &= E[X(t_1)]E[X(t_2)] = 0 \\ E[X(t_1)X(t_2)|\bar{B}] &= A^2 \end{aligned}$$

Comme $P(B)$ conserve la même valeur lorsque t_1 et t_2 tombent dans un intervalle quelconque de durée T_b , il suffit de prendre en considération le cas $0 < t < T_b$, comme le montre la figure 6-10(b).

$$P(B) = P(t_1 < T_r < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_{T_r}(t_d) dt_r = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{T_b} dt_r = \frac{t_2 - t_1}{T_b}$$

La relation (5.19) permet d'écrire que :

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{t_2 - t_1}{T_b}$$

d'où

$$R_{XX}(t_1, t_2) = A^2 \left(1 - \frac{t_2 - t_1}{T_b} \right) = R_{XX}(\tau) \tag{6.107}$$

où $\tau = t_2 - t_1$.

Comme $R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$, on en conclut que :

$$R_{XX}(\tau) = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T_b} \right) & |\tau| \leq T_b \\ 0 & |\tau| > T_b \end{cases} \tag{6.108}$$

dont la figure 6-11(a) représente le tracé.

D'après les relations (6.105) et (6.108), on voit que $X(t)$ est SSL. Donc, en invoquant la relation (6.36), le spectre de puissance de $X(t)$ a pour expression (voir problème 1.55)

$$S_{XX}(\omega) = A^2 T_b \left[\frac{\sin(\omega T_b / 2)}{\omega T_b / 2} \right]^2 \tag{6.109}$$

dont la figure 6-11(b) montre la forme.

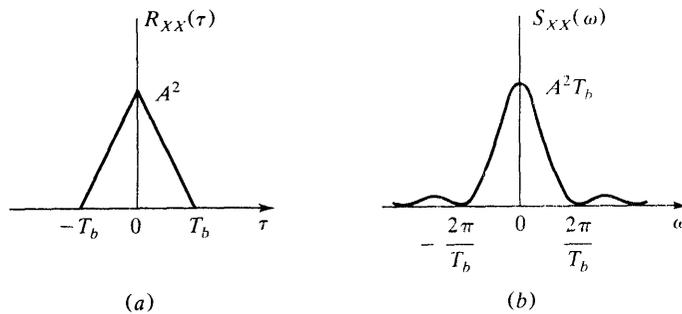


Fig. 6-11

6.13. Soient $X(t)$ et $Y(t)$ deux processus aléatoires stationnaires au sens large. Démontrer les relations (6.29) et (6.30), c'est-à-dire :

- (a) $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$
- (b) $|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$

(a) D'après la relation (6.18), on a :

$$R_{XY}(-\tau) = E[X(t)Y(t - \tau)]$$

En faisant $t - \tau = t'$, on obtient :

$$R_{XY}(-\tau) = E[X(t' + \tau)Y(t')] = E[Y(t')X(t' + \tau)] = R_{YX}(\tau)$$

- (b) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, relation (5.165), problème 5.48, on peut écrire :

$$\{E[X(t)Y(t+\tau)]\}^2 \leq E[X^2(t)]E[Y^2(t+\tau)]$$

ce qui se traduit par :

$$R_{XY}(\tau)^2 \leq R_{XX}(0)R_{YY}(0)$$

d'où

$$|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$$

- 6.14.** Soit $X(t)$ et $Y(t)$ deux processus aléatoires SSL de moyenne nulle. On considère un nouveau processus défini par :

$$Z(t) = X(t) + Y(t) \quad (6.110)$$

- (a) Calculer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $Z(t)$ en supposant que $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement SSL.
 (b) Reprendre le calcul dans le cas où $X(t)$ et $Y(t)$ sont des processus orthogonaux.
 (c) Montrer que, si $X(t)$ et $Y(t)$ sont orthogonaux, la valeur quadratique moyenne de $Z(t)$ est égale à la somme des valeurs quadratiques de $X(t)$ et de $Y(t)$.
 (a) La fonction d'autocorrélation de $Z(t)$ a pour expression :

$$\begin{aligned} R_{ZZ}(t_1, t_2) &= E[Z(t_1)Z(t_2)] \\ &= E\left[[X(t_1) + Y(t_1)][X(t_2) + Y(t_2)]\right] \\ &= E[X(t_1)X(t_2)] + E[X(t_1)Y(t_2)] \\ &\quad + E[Y(t_1)X(t_2)] + E[Y(t_1)Y(t_2)] \\ &= R_{XX}(t_1, t_2) + R_{XY}(t_1, t_2) + R_{YX}(t_1, t_2) + R_{YY}(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (6.111)$$

Si $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement SSL, on a la relation :

$$R_{ZZ}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) + R_{YY}(\tau) \quad (6.112)$$

où $\tau = t_2 - t_1$.

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de la relation (6.112), il vient :

$$S_{ZZ}(\omega) = S_{XX}(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega) + S_{YY}(\omega) \quad (6.113)$$

- (b) Si $X(t)$ et $Y(t)$ sont orthogonaux et si l'on en croit la relation (6.34) :

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(\tau) = 0$$

Les relations (6.112) et (6.113) deviennent donc :

$$R_{ZZ}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{YY}(\tau) \quad (6.114)$$

$$S_{ZZ}(\omega) = S_{XX}(\omega) + S_{YY}(\omega) \quad (6.115)$$

- (c) Les relations (6.114) et (6.17) nous autorisent à écrire :

$$R_{ZZ}(0) = R_{XX}(0) + R_{YY}(0)$$

soit

$$E[Z^2(t)] = E[X^2(t)] + E[Y^2(t)] \quad (6.116)$$

ce qui montre que le carré moyen de $Z(t)$ est égal à la somme des carrés moyens de $X(t)$ et $Y(t)$.

- 6.15.** Deux processus aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ ont pour expressions :

$$X(t) = A \cos(\omega t + \Theta) \quad (6.117a)$$

$$Y(t) = A \sin(\omega t + \Theta) \quad (6.117b)$$

où A et ω sont des constantes, tandis que Θ est une variable uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Calculer l'intercorrélacion de $X(t)$ et $Y(t)$, puis démontrer la relation (6.29).

La relation (6.18) nous donne l'expression de l'intercorrélacion de $X(t)$ et $Y(t)$:

$$\begin{aligned} R_{XY}(t, t + \tau) &= E[X(t)Y(t + \tau)] \\ &= E\left[A^2 \cos(\omega t + \Theta) \sin[\omega(t + \tau) + \Theta]\right] \\ &= \frac{A^2}{2} E\left[\sin(2\omega t + \omega\tau + 2\Theta) - \sin(-\omega\tau)\right] \\ &= \frac{A^2}{2} \sin \omega\tau = R_{XY}(\tau) \end{aligned} \quad (6.118a)$$

De même :

$$\begin{aligned} R_{YX}(t, t + \tau) &= E[Y(t)X(t + \tau)] \\ &= E\left[A^2 \sin(\omega t + \Theta) \cos[\omega(t + \tau) + \Theta]\right] \\ &= \frac{A^2}{2} E\left[\sin(2\omega t + \omega\tau + 2\Theta) + \sin(-\omega\tau)\right] \\ &= -\frac{A^2}{2} \sin \omega\tau = R_{YX}(\tau) \end{aligned} \quad (6.118b)$$

Les relations (6.118a) et (6.118b) nous donnent :

$$R_{XY}(-\tau) = \frac{A^2}{2} \sin \omega(-\tau) = -\frac{A^2}{2} \sin \omega\tau = R_{YX}(\tau)$$

ce qui démontre la relation (6.29).

6.16. Soit $X(t)$ et $Y(t)$ deux processus aléatoires définis de la façon suivante :

$$X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (6.119a)$$

$$Y(t) = B \cos \omega t - A \sin \omega t \quad (6.119b)$$

où ω est une constante, tandis que A et B sont 2 V.A. de moyenne nulle et de variance σ^2 . Calculer l'intercorrélacion de $X(t)$ et $Y(t)$.

L'intercorrélacion de $X(t)$ et $Y(t)$ a pour expression :

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\ &= E[(A \cos \omega t_1 + B \sin \omega t_1)(B \cos \omega t_2 - A \sin \omega t_2)] \\ &= E[AB](\cos \omega t_1 \cos \omega t_2 - \sin \omega t_1 \sin \omega t_2) \\ &\quad - E[A^2] \cos \omega t_1 \sin \omega t_2 + E[B^2] \sin \omega t_1 \cos \omega t_2 \end{aligned}$$

Comme, d'autre part :

$$E[AB] = E[A]E[B] = 0 \quad E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$$

il vient :

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= \sigma^2(\sin \omega t_1 \cos \omega t_2 - \cos \omega t_1 \sin \omega t_2) \\ &= \sigma^2 \sin \omega(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

soit

$$R_{XY}(\tau) = -\sigma^2 \sin \omega\tau \quad (6.120)$$

où $\tau = t_2 - t_1$.

TRAITEMENT DES PROCESSUS ALÉATOIRES PAR DES SYSTÈMES LINÉAIRES

6.17. Un processus aléatoire SSL $X(t)$ est traité par un système linéaire indépendant du temps (SLIT) dont la réponse impulsionnelle a pour expression : $h(t) = 3e^{-2t}u(t)$. Calculer la valeur moyenne du signal $Y(t)$ délivré par le système lorsque $E[X(t)] = 2$.

Si l'on en croit la relation (1.45), la réponse en fréquence du SLIT a pour expression :

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = 3 \frac{1}{j\omega + 2}$$

En appliquant la relation (6.50), la valeur moyenne de $Y(t)$ a pour expression :

$$\mu_Y(t) = E[Y(t)] = \mu_X H(0) = 2 \left(\frac{3}{2} \right) = 3$$

6.18. Soit $Y(t)$ le processus délivré par un SLIT de réponse temporelle $h(t)$, lorsqu'on applique sur son entrée un signal $X(t)$. Montrer que :

$$(a) \quad R_{XY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) R_{XX}(t_1, t_2 - \beta) d\beta \quad (6.121)$$

$$(b) \quad R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) R_{XY}(t_1 - \alpha, t_2) d\alpha \quad (6.122)$$

(a) En invoquant la relation (6.47), on a :

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\ &= E \left[X(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) X(t_2 - \beta) d\beta \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) E[X(t_1)X(t_2 - \beta)] d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) R_{XX}(t_1, t_2 - \beta) d\beta \end{aligned}$$

(b) On a de même :

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] \\ &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) X(t_1 - \alpha) d\alpha Y(t_2) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) E[X(t_1 - \alpha)Y(t_2)] d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) R_{XY}(t_1 - \alpha, t_2) d\alpha \end{aligned}$$

6.19. Soit $X(t)$ un processus SSL appliqué à l'entrée d'un SLIT dont la réponse impulsionnelle est $h(t)$ et soit $Y(t)$ le processus délivré par la sortie de ce système. Montrer que :

$$(a) \quad R_{XY}(\tau) = h(\tau) * R_{XX}(\tau) \quad (6.123)$$

$$(b) \quad R_{YY}(\tau) = h(-\tau) * R_{XY}(\tau) \quad (6.124)$$

$$(c) \quad S_{XY}(\omega) = H(\omega) S_{XX}(\omega) \quad (6.125)$$

$$(d) \quad S_{YY}(\omega) = H^*(\omega) S_{XY}(\omega) \quad (6.126)$$

où $*$ indique la convolution et $H^*(\omega)$ indique la conjugaison de $H(\omega)$.

(a) Si $X(t)$ est SSL, la relation (6.121) du problème 6.18 devient :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) R_{XX}(t_2 - t_1 - \beta) d\beta \quad (6.127)$$

Ce qui montre que $R_{XY}(t_1, t_2)$ n'est fonction que de l'écart de temps $\tau = t_2 - t_1$. La relation (6.127) nous donne :

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) R_{XX}(\tau - \beta) d\beta = h(\tau) * R_{XX}(\tau)$$

- (b) De même, si $X(t)$ est SSL, la relation (6.122) devient à son tour :

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) R_{XY}(t_2 - t_1 + \alpha) d\alpha$$

soit

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) R_{XY}(\tau + \alpha) d\alpha = h(-\tau) * R_{XY}(\tau)$$

- (c) En prenant la transformée de Fourier des deux membres de la relation (6.123) et en invoquant les relations (6.41) et (1.53), on obtient :

$$S_{XY}(\omega) = H(\omega) S_{XX}(\omega)$$

- (d) De même, en prenant la transformée de Fourier des deux membres de la relation (6.124) et en tenant compte des relations (6.36), (1.53) et (1.33), il vient :

$$S_{YY}(\omega) = H^*(\omega) S_{XY}(\omega)$$

Notons qu'en combinant les relations (6.125) et (6.126), on obtient aussi la relation (6.53), c'est-à-dire :

$$S_{YY}(\omega) = H^*(\omega) H(\omega) S_{XX}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega)$$

6.20. Soit $X(t)$ et $Y(t)$ les processus SSL d'entrée et de sortie d'un filtre déphaseur en quadrature (le déphaseur $-\pi/2$ du problème 1.47). Montrer que l'on a les relations :

$$(a) \quad R_{XX}(\tau) = R_{YY}(\tau) \quad (6.128)$$

$$(b) \quad R_{XY}(\tau) = \widehat{R}_{XX}(\tau) \quad (6.129)$$

où $\widehat{R}_{XX}(\tau)$ est la transformée de Hilbert de $R_{XX}(\tau)$.

- (a) La transformée de Hilbert a été définie lors du problème 1.47 comme le signal de sortie d'un filtre déphaseur $-\pi/2$ dont la réponse impulsionnelle a pour expression :

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega)$$

Comme $|H(\omega)|^2 = 1$, on conclut que si $X(t)$ est un processus SSL, alors $Y(t) = \widehat{X}(t)$ et l'on peut écrire, d'après la relation (6.53) :

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) = S_{XX}(\omega)$$

d'où l'on déduit que :

$$R_{YY}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_{YY}(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[S_{XX}(\omega)] = R_{XX}(\tau)$$

- (b) En invoquant les relations (6.123) et (1.139), problème 1.47, on a :

$$R_{XY}(\tau) = h(\tau) * R_{XX}(\tau) = \frac{1}{\pi t} * R_{XX}(\tau) = \widehat{R}_{XX}(\tau)$$

6.21. On applique un processus $X(t)$ à l'entrée d'un SLIT. La fonction d'autocorrélation du processus a pour expression :

$$R_{XX}(\tau) = A e^{-a|\tau|}$$

où A et a sont deux constantes réelles positives.

Le SLIT a pour réponse impulsionnelle :

$$h(t) = e^{-bt} u(t)$$

où b est une constante réelle positive. Calculer la fonction d'autocorrélation du processus de sortie $Y(t)$.

En invoquant la relation (1.45), on voit que la réponse en fréquence $H(\omega)$ du SLIT a pour expression :

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \frac{1}{j\omega + b}$$

On en déduit :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + b^2}$$

En tenant compte de la relation (1.46), on voit que la densité spectrale de puissance de $X(t)$ a pour expression :

$$S_{XX}(\omega) = \mathcal{F}[R_{XX}(\tau)] = A \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

En tenant compte de la relation (6.53), la densité spectrale de puissance de $Y(t)$ a pour expression :

$$\begin{aligned} S_{YY}(\omega) &= |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) \\ &= \left(\frac{1}{\omega^2 + b^2} \right) \left(\frac{2aA}{\omega^2 + a^2} \right) \\ &= \frac{aA}{(a^2 - b^2)b} \left(\frac{2b}{\omega^2 + b^2} \right) - \frac{A}{a^2 - b^2} \left(\frac{2a}{\omega^2 + a^2} \right) \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de la relation précédente et en tenant compte de la relation (1.46), on obtient :

$$R_{YY}(\tau) = \frac{aA}{(a^2 - b^2)b} e^{-b|\tau|} - \frac{A}{a^2 - b^2} e^{-a|\tau|}$$

- 6.22.** Démontrer la relation (6.38), à savoir que le spectre de puissance de tout processus SSL $X(t)$ est à valeurs réelles et que :

$$S_{XX}(\omega) \geq 0$$

pour toute valeur de ω .

Le fait que le spectre de puissance de $X(t)$ soit à valeurs réelles a été démontré lors du problème 6.9. Considérons un filtre passe-bande idéal dont la réponse en fréquence est représentée sur la figure 6-12 et a pour expression :

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

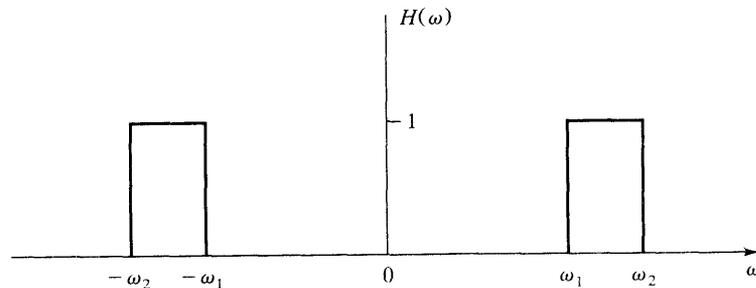


Fig. 6-12

Si l'on applique un processus aléatoire $X(t)$ à l'entrée de ce filtre, il délivre en sortie un signal $Y(t)$ dont le spectre de puissance a pour expression :

$$S_{YY}(\omega) = \begin{cases} S_{XX}(\omega) & \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Ainsi, d'après la relation (6.55), on a :

$$E[Y^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\omega) d\omega = 2 \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_{XX}(\omega) d\omega \geq 0 \quad (6.130)$$

Ce qui montre que l'aire sous la courbe de $S_{XX}(\omega)$ ne prend jamais de valeur négative. Cela n'est possible que si $S_{XX}(\omega) \geq 0$ quelle que soit la valeur de ω .

6.23. On considère un processus aléatoire SSL $X(t)$ ayant $R_{XX}(\tau)$ pour fonction d'autocorrélation et $S_{XX}(\omega)$ pour spectre de puissance. Posons $X'(t) = dX(t)/dt$. Montrer que :

$$(a) \quad R_{XX'}(\tau) = \frac{dR_{XX}(\tau)}{d\tau} \quad (6.131)$$

$$(b) \quad R_{X'X'}(\tau) = -\frac{d^2R_{XX}(\tau)}{d\tau^2} \quad (6.132)$$

$$(c) \quad S_{X'X'}(\omega) = \omega^2 S_{XX}(\omega) \quad (6.133)$$

(Préliminaire) : considérons un différentiateur, c'est-à-dire un circuit dont le signal de sortie est égal à la dérivée du signal d'entrée (figure 6-13).

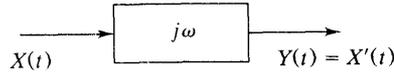


Fig. 6-13 Différentiateur

La réponse en fréquence d'un tel circuit a pour expression $H(\omega) = j\omega$.

(a) D'après la relation (6.125) :

$$S_{XX'}(\omega) = H(\omega)S_{XX}(\omega) = j\omega S_{XX}(\omega)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse des deux membres de cette relation, on obtient :

$$R_{XX'}(\tau) = \frac{dR_{XX}(\tau)}{d\tau}$$

(b) D'après la relation (6.126) :

$$S_{X'X'}(\omega) = H^*(\omega)S_{XX'}(\omega) = -j\omega S_{XX'}(\omega)$$

En prenant à nouveau la transformée inverse des deux membres de la relation précédente tout en utilisant le résultat obtenu en (a), on obtient :

$$R_{X'X'}(\tau) = -\frac{dR_{XX'}(\tau)}{d\tau} = -\frac{d^2R_{XX}(\tau)}{d\tau^2}$$

(c) D'après la relation (6.53), on peut écrire :

$$S_{X'X'}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) = |j\omega|^2 S_{XX}(\omega) = \omega^2 S_{XX}(\omega)$$

6.24. On suppose que l'on fournit au différentiateur de la figure 6-13 le signal aléatoire à moyenne nulle des télégraphistes que nous avons rencontré lors du problème 6.11.

(a) Calculer et tracer le spectre de puissance du signal de sortie du différentiateur.

(b) Déterminer la valeur moyenne quadratique de ce signal.

(a) D'après la relation (6.103) du problème 6.11, on sait que :

$$S_{XX}(\omega) = A^2 \frac{4\alpha}{\omega^2 + (2\alpha)^2}$$

La fonction de transfert du différentiateur, $H(\omega)$, est égale à $j\omega$ et l'on a, d'après la relation (6.53) :

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) = A^2 \frac{4\alpha\omega^2}{\omega^2 + (2\alpha)^2} \quad (6.134)$$

dont la figure 6-14 représente le tracé.

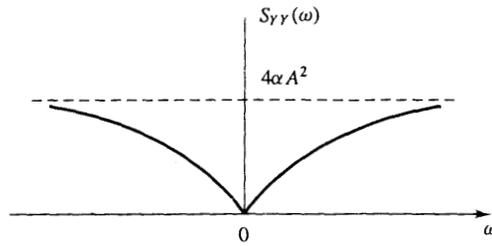


Fig. 6-14

(b) D'après la relation (6.55), ou la figure 6-14, on a :

$$E[Y^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\omega) d\omega = \infty$$

6.25. On suppose que l'on applique le signal des télégraphistes du problème 6.11 à l'entrée d'un filtre passe-bande idéal de gain unité et de bande étroite ($W_B = 2\pi B \ll \omega_p$) de fréquence centrale $\omega_p = 2\alpha$. Calculer la composante continue et la puissance moyenne du signal de sortie.

En invoquant les relations (6.35) et (6.103), puis en observant la figure 6-8(b), on obtient le spectre de puissance demandé, qui a pour expression :

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega)$$

dont la figure 6-15 représente le tracé. Comme $H(0) = 0$, on en déduit, d'après la relation (6.50), que :

$$\mu_Y = H(0)\mu_X = 0$$

La composante continue du signal est donc nulle.

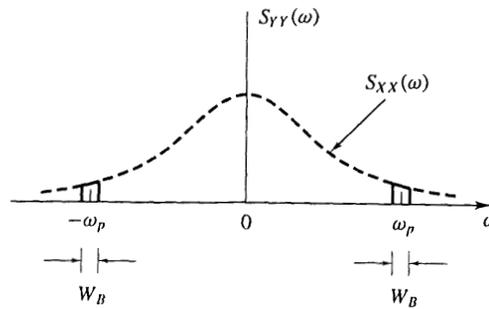


Fig. 6-15

D'après la relation (6.103) du problème 6.11 :

$$S_{XX}(\pm\omega_p) = A^2 \frac{4\alpha}{(2\alpha)^2 + (2\alpha)^2} = \frac{A^2}{2\alpha}$$

Du fait que $W_b \ll \omega_p$,

$$S_{YY}(\omega) \approx \begin{cases} \frac{A^2}{2\alpha} & |\omega - \omega_p| < \frac{W_B}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La puissance moyenne a pour expression :

$$\begin{aligned} E[Y^2(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\omega) d\omega \\ &\approx \frac{1}{2\pi} (2W_B) \left(\frac{A^2}{2\alpha} \right) = \frac{A^2 W_B}{2\pi\alpha} = \frac{A^2 B}{\alpha} \end{aligned} \quad (6.135)$$

6.26. On applique à l'entrée du filtre que représente la figure 6-16 un processus SSL de spectre de puissance $S_{XX}(\omega)$. Calculer le spectre de puissance du processus en sortie du filtre considéré.

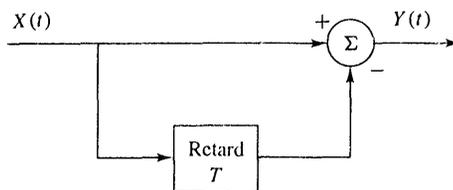


Fig. 6-16

D'après la figure 6-16, le processus de sortie a pour expression :

$$Y(t) = X(t) - X(t - T) \tag{6.136}$$

D'après la relation (1.77), la réponse impulsionnelle du filtre a pour expression :

$$h(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$$

et suivant les relations (1.38) et (1.39), la réponse en fréquence du filtre est :

$$H(\omega) = 1 - e^{-j\omega T}$$

En invoquant la relation (6.53), le spectre de puissance a pour expression :

$$\begin{aligned} S_{YY}(\omega) &= |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) = |1 - e^{-j\omega T}|^2 S_{XX}(\omega) \\ &= [(1 - \cos \omega T)^2 + \sin^2 \omega T] S_{XX}(\omega) \\ &= 2(1 - \cos \omega T) S_{XX}(\omega) \end{aligned} \tag{6.137}$$

6.27. On applique un processus aléatoire $X(t)$ à un SLIT dont la réponse impulsionnelle est $h_1(t)$ et un processus aléatoire $Y(t)$ à un autre SLIT de réponse impulsionnelle $h_2(t)$. On suppose que $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement SSL. Soit $V(t)$ et $Z(t)$ les processus aléatoires obtenus en sortie des deux systèmes (figure 6-17). Calculer l'intercorrrelation et la densité interspectrale de puissance de $V(t)$ et $Z(t)$ en fonction de l'intercorrrelation et de la densité interspectrale de $X(t)$ et $Y(t)$.

En appliquant la relation (6.47), on obtient :

$$\begin{aligned} R_{VZ}(t_1, t_2) &= E[V(t_1)Z(t_2)] \\ &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(t_1 - \alpha) h_1(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} Y(t_2 - \beta) h_2(\beta) d\beta \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) h_2(\beta) E[X(t_1 - \alpha) Y(t_2 - \beta)] d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) h_2(\beta) R_{XY}(t_1 - \alpha, t_2 - \beta) d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) h_2(\beta) R_{XY}(t_2 - t_1 + \alpha - \beta) d\alpha d\beta \end{aligned} \tag{6.138}$$

puisque $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement SSL.

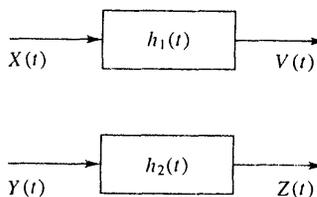


Fig. 6-17

La relation (6.138) indique que $R_{VZ}(t_1, t_2)$ ne dépend que de l'écart de temps $\tau = t_2 - t_1$, on a donc :

$$R_{VZ}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) h_2(\beta) R_{XY}(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta \quad (6.139)$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de la relation (6.139), il vient :

$$\begin{aligned} S_{VZ}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{VZ}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) h_2(\beta) R_{XY}(\tau + \alpha - \beta) e^{-j\omega\tau} d\alpha d\beta d\tau \end{aligned}$$

Posons $\tau + \alpha - \beta = \lambda$, soit $\tau = \lambda - \alpha + \beta$. Il vient :

$$\begin{aligned} S_{VZ}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) h_2(\beta) R_{XY}(\lambda) e^{-j\omega(\lambda - \alpha + \beta)} d\alpha d\beta d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha) e^{j\omega\alpha} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\beta) e^{-j\omega\beta} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \\ &= H_1(-\omega) H_2(\omega) S_{XY}(\omega) \\ &= H_1^*(\omega) H_2(\omega) S_{XY}(\omega) \end{aligned} \quad (6.140)$$

où $H_1(\omega)$ et $H_2(\omega)$ sont les réponses en fréquence des systèmes représentés sur la figure 6-17.

PROCESSUS ALÉATOIRES REMARQUABLES

6.28. Montrer que si un processus gaussien est SSL, il est alors SSS.

Si le processus gaussien $X(t)$ est SSL, il satisfait la condition suivante :

$$\mu_i = E[X(t_i)] = (\mu = \text{constante}) \quad \text{quel que soit } t_i$$

et

$$R_{XX}(t_i, t_j) = R_{XX}(t_j - t_i)$$

Par conséquent, dans l'expression de la densité de probabilité conjointe, relations (6.58), (6.59), (6.60) et (6.61), on a :

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu \rightarrow E[X(t_i)] = E[X(t_i + c)]$$

$$\begin{aligned} C_{ij} = C_{XX}(t_i, t_j) &= R_{XX}(t_i, t_j) - \mu_i \mu_j \\ &= R_{XX}(t_j - t_i) - \mu^2 = C_{XX}(t_i + c, t_j + c) \end{aligned}$$

quel que soit c . Il s'ensuit que :

$$f_{\mathbf{X}(t_i)}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}(t_i+c)}(\mathbf{x})$$

quel que soit c . On en conclut que $X(t)$ est SSS suivant la relation (6.11).

6.29. Soit \mathbf{X} un vecteur aléatoire gaussien à n composantes indépendantes, selon la relation (6.56). Montrer que la fonction de densité conjointe multivariable a pour expression :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^n \sigma_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right] \quad (6.141)$$

où $\mu_i = E[X_i]$ et $\sigma_i^2 = \text{var}(X_i)$.

La fonction de densité multivariable gaussienne nous est donnée par la relation (6.58). Comme les $X_i = X(t_i)$ sont indépendants, on a :

$$C_{ij} = \begin{cases} \sigma_i^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (6.142)$$

Ainsi, d'après la relation (6.60), la matrice de covariance \mathbf{C} a pour expression :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (6.143)$$

Et par conséquent,

$$|\det \mathbf{C}|^{1/2} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n = \prod_{i=1}^n \sigma_i \quad (6.144)$$

ainsi que

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix} \quad (6.145)$$

On peut donc écrire :

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (6.146)$$

En portant les relations (6.144) et (6.146) dans la relation (6.58), on obtient la relation demandée (6.141).

- 6.30.** Soit $X_1 = X(t_1)$ et $X_2 = X(t_2)$ deux variables aléatoires conjointement gaussiennes, de moyenne nulle et de variance σ^2 . Montrer que leur densité conjointe a pour expression :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{\sigma^2(1-\rho^2)} \right] \quad (6.147)$$

où ρ est le coefficient de corrélation de X_1 et X_2 , défini par $\rho = C_{12}/\sigma^2$, [(relation 5.80)].

En tenant compte de ce que $C_{11} = C_{22} = \sigma^2$ et $C_{12} = C_{21} = \rho\sigma^2$ dans la relation (6.60), on obtient :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\det \mathbf{C}|^{1/2} = \sigma^2 \sqrt{(1-\rho^2)}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}$$

Comme $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{x}$, et l'on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x} &= \frac{1}{\sigma^2(1-\rho^2)} [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma^2(1-\rho^2)} (x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2) \end{aligned}$$

En portant ces résultats dans la relation (6.58), on obtient la relation demandée (6.147).

Notons que la relation (6.147) peut être obtenue à partir de la relation (5.122) du problème 5.22 en faisant $X = X_1, Y = X_2, \mu_X = \mu_Y = 0$ et $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$.

6.31. La relation entre l'entrée et la sortie d'une diode a pour expression :

$$Y(t) = X^2(t) \quad (6.148)$$

On applique à l'entrée de la diode un signal $X(t)$, processus aléatoire gaussien stationnaire de moyenne nulle, dont la fonction d'autocorrélation a pour expression :

$$R_{XX}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \quad \alpha > 0$$

Calculer la valeur moyenne $\mu_Y(t)$ du signal de sortie de la diode, sa fonction d'autocorrélation $R_{YY}(\tau)$ ainsi que sa densité spectrale de puissance $S_{YY}(\omega)$.

$$\begin{aligned} \mu_Y(t) &= E[Y(t)] = E[X^2(t)] = R_{XX}(0) \\ R_{YY}(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[X^2(t_1)X^2(t_2)] \end{aligned} \quad (6.149)$$

Comme $X(t_1)$ et $X(t_2)$ sont des processus conjointement gaussiens à moyenne nulle, on en déduit, d'après la relation (5.175) du problème 5.54 :

$$E[X^2(t_1)X^2(t_2)] = E[X^2(t_1)]E[X^2(t_2)] + 2\{E[X(t_1)X(t_2)]\}^2 \quad (6.150)$$

D'autre part, comme $X(t)$ est stationnaire, on a :

$$E[X^2(t_1)] = E[X^2(t_2)] = R_{XX}(0)$$

ainsi que

$$E[X(t_1)X(t_2)] = R_{XX}(t_2 - t_1) = R_{XX}(\tau)$$

Ce qui nous donne :

$$R_{YY}(t_1, t_2) = R_{YY}(\tau) = [R_{XX}(0)]^2 + 2[R_{XX}(\tau)]^2 \quad (6.151)$$

et en faisant appel aux relations (1.40) et (1.54), nous obtenons :

$$S_{YY}(\omega) = \mathcal{F}[R_{YY}(\tau)] = 2\pi[R_{XX}(0)]^2\delta(\omega) + \frac{1}{\pi}S_{XX}(\omega) * S_{XX}(\omega) \quad (6.152)$$

en tenant compte de l'expression de la fonction d'autocorrélation proposée, on obtient :

$$\mu_Y(t) = R_{XX}(0) = 1$$

et

$$R_{YY}(\tau) = 1 + 2e^{-2\alpha|\tau|}$$

En appliquant les relations (1.40) et (1.46), on obtient l'expression de la densité spectrale de puissance :

$$S_{YY}(\omega) = \mathcal{F}[R_{YY}(\tau)] = 2\pi\delta(\omega) + \frac{8\alpha}{\omega^2 + 4\alpha^2}$$

6.32. On applique un signal ayant les caractéristiques d'un bruit blanc à l'entrée du filtre RC représenté sur la figure 6-18.

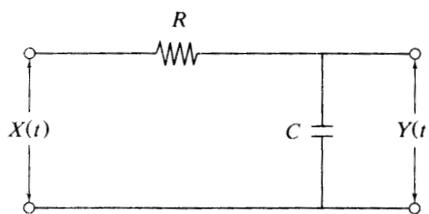


Fig. 6-18. Filtre RC

- (a) Calculer le spectre de puissance du signal de sortie $Y(t)$
 - (b) Déterminer la fonction d'autocorrélation et la valeur quadratique moyenne du processus $Y(t)$.
- D'après le problème 1.46, la réponse en fréquence du filtre RC a pour expression :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

- (a) En tenant compte des relations (6.62) et (6.53), on a :

$$S_{XX}(\omega) = \frac{\eta}{2}$$

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \frac{\eta}{2} \tag{6.153}$$

- (b) La relation (6.153) peut être écrite comme suit :

$$S_{YY}(\omega) = \frac{\eta}{2} \frac{1}{2RC} \frac{2[1/(RC)]}{\omega^2 + [1/(RC)]^2}$$

On identifie là une paire de transformée de Fourier [relation (1.46)], d'où l'on déduit que :

$$R_{YY}(\tau) = \frac{\eta}{2} \frac{1}{2RC} e^{-|\tau/(RC)|} \tag{6.154}$$

d'où l'on déduit :

$$E[Y^2(t)] = R_{YY}(0) = \frac{\eta}{4RC} \tag{6.155}$$

6.33. Le signal d'entrée d'un filtre passe-bande idéal, dont les caractéristiques sont représentées sur la figure 6-19, est un bruit blanc. Calculer la puissance totale du bruit en sortie du filtre.

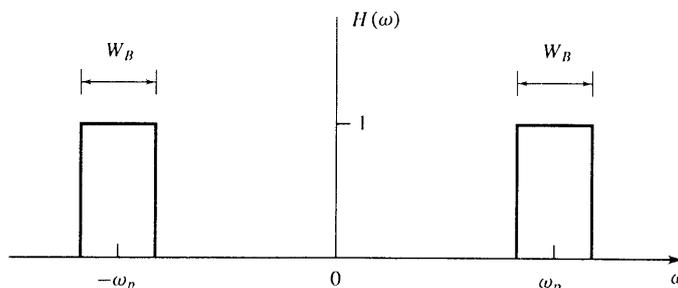


Fig. 6-19

$$S_{XX}(\omega) = \frac{\eta}{2}$$

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) = \frac{\eta}{2} |H(\omega)|^2$$

La puissance totale du bruit de sortie du filtre a pour expression :

$$E[Y^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{\eta}{2} \frac{1}{2\pi} (2W_B) = \eta B \tag{6.156}$$

où $B = W_B/(2\pi)$ en hertz.

6.34. La bande de bruit équivalente d'un système est définie par la relation suivante :

$$B_{\text{eq}} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{|H(\omega)|_{\text{max}}^2} \text{ Hz} \quad (6.157)$$

où $|H(\omega)|_{\text{max}}^2 = \max |H(\omega)|^2$.

- (a) Déterminer la bande de bruit équivalente du filtre passe-bande idéal que représente la figure 6-19.
 (b) Déterminer la bande équivalente du filtre passe-bas de la figure 6-18 et comparer le résultat obtenu avec la bande passante à 3 dB évaluée dans le problème 1.49.
 (a) Dans le cas du filtre passe-bande idéal de la figure 6-19, on a $|H(\omega)|^2 = 1$, d'où l'on déduit que :

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{W_B}{2\pi} = B \text{ Hz} \quad (6.158)$$

- (b) En ce qui concerne le filtre de la figure 6-18, nous avons :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}$$

et

$$\max |H(\omega)|^2 = |H(0)|^2 = 1$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} B_{\text{eq}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + (\omega RC)^2} \\ &= \frac{1}{4RC} \text{ Hz} \end{aligned} \quad (6.159)$$

D'après le problème 1.49, la bande passante à 3 dB d'un filtre RC passe-bas a pour expression :

$$B_{3\text{dB}} = \frac{1}{2\pi} W_{3\text{dB}} = \frac{1}{2\pi RC} \text{ Hz}$$

donc

$$B_{\text{eq}} = \frac{\pi}{2} B_{3\text{dB}} \approx 1,57 B_{3\text{dB}}$$

6.35. Un bruit blanc à bande étroite $X(t)$ présente le spectre de puissance qu'illustre la figure 6-20(a). Donner la décomposition cartésienne de $X(t)$ en ses deux composantes $X_c(t)$ et $X_s(t)$. Calculer les spectres de puissance de ces deux composantes et démontrer que :

$$E[X_c^2(t)] = E[X_s^2(t)] = E[X^2(t)] \quad (6.160)$$

D'après la relation (6.67), on a :

$$X(t) = X_c(t) \cos \omega_p t - X_s(t) \sin \omega_p t$$

D'après la relation (6.70) et la figure 6-20(a), on a :

$$S_{X_c X_c}(\omega) = S_{X_s X_s}(\omega) = \begin{cases} \eta & |\omega| \leq W (= 2\pi B) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La figure 6-20(b) représente ce spectre de puissance. D'après la figure 6-20(a), on peut écrire :

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} (2) \int_{\omega_p - W}^{\omega_p + W} \frac{\eta}{2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \eta 2W = 2\eta B \end{aligned}$$

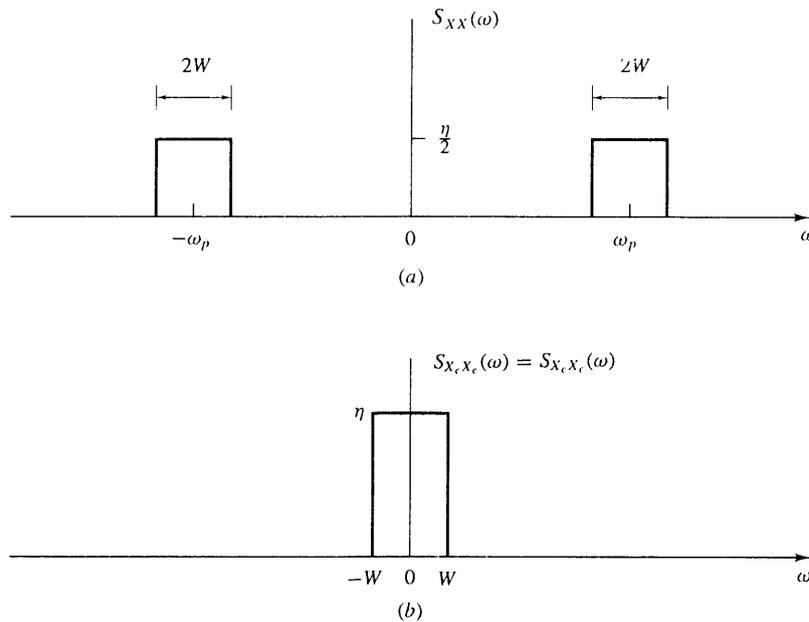


Fig. 6-20

D'après la figure 6-20(b), il apparaît que :

$$E[X_c^2(t)] = E[X_s^2(t)] = \frac{1}{2\pi} (2) \int_0^W \eta d\omega = \frac{1}{2\pi} \eta (2W) = 2\eta B$$

d'où pour conclure :

$$E[X_c^2(t)] = E[X_c^2(t)] = E[X_s^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \eta (2W) = 2\eta B \tag{6.161}$$

Problèmes supplémentaires

6.36. On considère un processus aléatoire d'expression :

$$X(t) = \cos \Omega t$$

où Ω est une variable uniformément répartie sur l'intervalle $[0, \omega_0]$. Déterminer si $X(t)$ est stationnaire.

Réponse : Non stationnaire.

Indication : Examiner des fonctions élémentaires de $X(t)$ à différentes fréquences, par exemple $\Omega = \pi/2, \pi$ et 2π .

6.37. On considère le processus aléatoire $X(t)$ ayant pour définition :

$$X(t) = A \cos \omega t$$

où ω est constant et A est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 1]$. Calculer la fonction d'autocorrélation et d'autocovariance de $X(t)$.

Réponses : $R_{XX}(t) = \frac{1}{3} \cos t_1 \cos t_2$ $C_{XX}(t) = \frac{1}{12} \cos t_1 \cos t_2$

- 6.38. Soit $X(t)$ un processus aléatoire SSL dont la fonction d'autocorrélation a pour expression :

$$R_{XX}(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}$$

Calculer le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire $Y = X(5) - X(2)$.

Réponse : $2A(1 - e^{-3\alpha})$.

- 6.39. Soit $X(t)$ un processus aléatoire SSL dont la fonction d'autocorrélation est $R_{XX}(\tau)$. On forme une variable aléatoire par intégration de $X(t)$:

$$Y = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt$$

Calculer la valeur moyenne et la variance de Y .

Réponse :

$$\mu_Y = 0; \quad \sigma_Y^2 = \frac{1}{T} \int_0^{2T} R_{XX}(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) d\tau$$

- 6.40. La figure 6-21 représente une fonction élémentaire d'un processus du type «signal des télégraphistes». Un tel signal ne prend que deux valeurs équiprobables, A et 0. Le nombre de basculements par unité de temps suit une loi de Poisson de paramètre α .

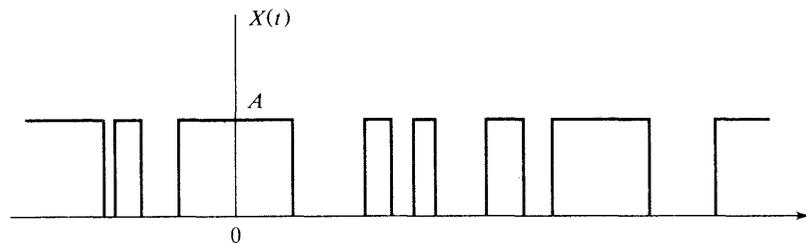


Fig. 6-21

- (a) Calculer l'autocorrélation et le spectre de puissance de $X(t)$.
 (b) Calculer la valeur quadratique moyenne (rms) de $X(t)$.

Réponse :

$$(a) \quad R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{4}(1 + e^{-2\alpha|\tau|}) \quad S_{XX}(\omega) = \frac{A^2}{2}\pi\delta(\omega) + A^2 \frac{4\alpha}{\omega^2 + (2\alpha)^2}$$

$$(b) \quad X_{\text{rms}} = A/2$$

- 6.41. On suppose que $X(t)$ est un processus gaussien, dont la valeur moyenne et la fonction d'autocorrélation ont respectivement pour expression :

$$\mu_X = 2 \quad R_{XX}(\tau) = 5e^{-0,2|\tau|}$$

Quelle est la probabilité pour que $X(4) \leq 1$?

Réponse : 0,159

- 6.42. Le signal de sortie d'un filtre a pour expression :

$$Y(t) = X(t + T) - X(t - T)$$

où $X(t)$ est un processus SSL de spectre de puissance $S_{XX}(\omega)$, T étant une constante. Donner l'expression du spectre de puissance de $Y(t)$.

Réponse : $S_{YY}(\omega) = 4 \sin^2 \omega T S_{XX}(\omega)$

6.43. Soit $\widehat{X}(t)$ la transformée de Hilbert d'un processus $X(t)$ stationnaire au sens large (SSL). Montrer que l'on a :

$$R_{X\widehat{X}}(0) = E[X(t)\widehat{X}(t)] = 0$$

Indication : Faire appel à la relation (b) du problème 6.20 ainsi qu'à la définition (1.139) du problème 1.47.

6.44. Lorsqu'une résistance métallique R se trouve à la température T , il apparaît à ses bornes, en circuit ouvert, une tension de bruit $V(t)$. Cette tension est appelée *bruit thermique*. Son spectre de puissance $S_{VV}(\omega)$ est pratiquement constant pour $f \leq 10^{12}$ Hz (1 térahertz = 1 000 gigahertz = 1 million de mégahertz). Il a pour valeur :

$$S_{VV}(\omega) = 2kTR$$

où l'on a :

k = constante de Boltzmann = $1,37 \cdot 10^{-23}$ joule par degré Kelvin (J/K);

T = température absolue en degrés Kelvin (K);

R = résistance en Ohms (Ω).

Calculer la tension de bruit quadratique (valeur rms) aux bornes du circuit RC que représente la figure 6-22 dans le cas où $R = 1$ kilohm ($k\Omega$), $C = 1$ microfarad (μF) et la température $T = 27^\circ$ C. On rappelle que la température Kelvin est égale à la température Celsius augmentée de 273.

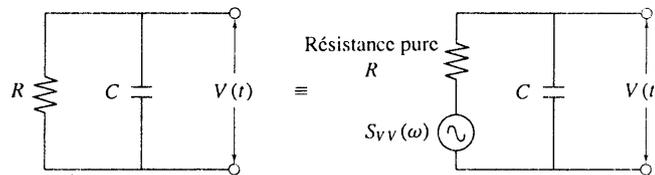


Fig. 6-22

Réponse : $V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{kT}{C}} \approx 0,2\mu V$

Performance d'une liaison en présence de bruit

7.1 INTRODUCTION

La présence de bruit sur un canal de transmission dégrade les performances des systèmes de communication analogiques ou numériques. On mesure la nuisance du bruit qui affecte le canal en évaluant le rapport signal sur bruit de la transmission ou la probabilité d'erreur du signal reçu. Le rapport signal sur bruit est utilisé dans le domaine des communications analogiques tandis que la probabilité d'erreur a cours dans celui des communications numériques.

Dans les paragraphes qui vont suivre, nous ne nous intéresserons qu'au bruit additif qui accompagne le signal à l'entrée du récepteur.

7.2 BRUIT ADDITIF ET RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT

La figure 7-1 représente le schéma d'une liaison typique en télécommunication. On suppose que l'entrée de l'émetteur est modulée par un processus aléatoire $X(t)$, que le canal n'introduit pas d'autre distorsion que l'addition d'un bruit aléatoire et que le récepteur est linéaire. Le récepteur est donc alimenté par un signal auquel est mélangé un bruit. On note S_e la puissance du signal et N_e la puissance de bruit (*noise* en anglais) à l'entrée du récepteur, pour éviter un problème de notation commune avec la bande passante B du récepteur (pulsation en radians par seconde). Puisque le récepteur est linéaire, son signal de sortie a pour expression :

$$Y_s(t) = X_s(t) + n_s(t) \quad (7.1)$$

où $X_s(t)$ et $n_s(t)$ représentent respectivement le signal et le bruit en sortie du récepteur.

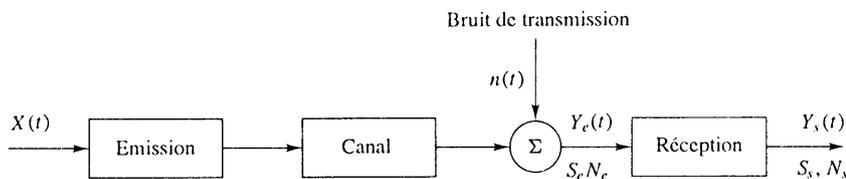


Fig. 7-1 Schéma d'un canal de communication

On fait deux hypothèses complémentaires relatives au bruit additif :

1. Le bruit est gaussien, à valeur moyenne nulle, de densité spectrale $S_{nn}(\omega) = \eta/2$.
2. Le bruit n'est pas corrélé avec le processus $X(t)$.

En tenant compte de ces hypothèses, on peut écrire que :

$$E[Y_s^2(t)] = E[X_s^2(t)] + E[n_s^2(t)] = S_s + N_s \quad (7.2)$$

où $S_s = E[X_s^2(t)]$ et $N_s = E[n_s^2(t)]$ sont respectivement la valeur moyenne du signal et la puissance de bruit en sortie du récepteur. On définit un *rapport signal sur bruit* en sortie du récepteur comme suit :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{S_s}{N_s} = \frac{E[X_s^2(t)]}{E[n_s^2(t)]} \quad (7.3)$$

La qualité d'une liaison analogique se mesure au moyen de la valeur de ce rapport. On notera que ce rapport n'a de sens que si la relation (7.1) est satisfaite.

7.3 BRUIT SUR LES LIAISONS EN BANDE DE BASE

Une liaison en bande de base achemine directement le signal utile sans modulation d'une porteuse. Les performances de ce type simple de liaison servent de référence pour l'étude des performances des systèmes plus complexes. La figure 7-2 représente une liaison en bande de base. Le récepteur est un filtre passe-bas qui assure le transit du message en réduisant à son minimum le bruit qui l'accompagne. Ce filtre doit, évidemment, rejeter les composantes de fréquence qui se trouvent hors du domaine spectral du signal utile. On suppose que le filtre est idéal et qu'il présente une largeur de bande (en radians par seconde) $W = 2\pi B$, ou B est la bande de fréquence utile, en Hertz.

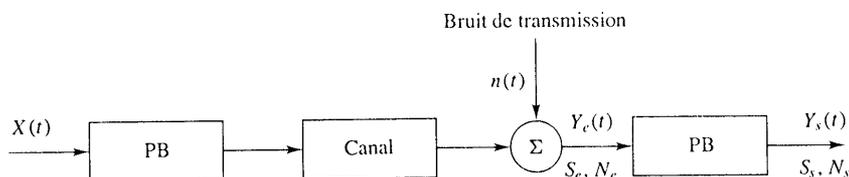


Fig. 7-2 Liaison en bande de base

On suppose que le signal utile $X(t)$ est un processus aléatoire ergodique à valeur moyenne nulle, de largeur de bande limitée à W et de densité spectrale de puissance $S_{XX}(\omega)$. On suppose qu'aucune distorsion n'est introduite par le canal de transmission dans la bande utile, ce qui permet d'écrire :

$$X_s(t) = X(t - t_r) \tag{7.4}$$

où t_r est le temps de retard introduit par la transmission. La puissance moyenne S_s du signal de sortie a pour expression :

$$\begin{aligned} S_s &= E[X_s^2(t)] = E[X^2(t - t_r)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W S_{XX}(\omega) d\omega = S_X = S_e \end{aligned} \tag{7.5}$$

où S_X est la puissance moyenne du signal et S_e la puissance du signal à l'entrée du récepteur. La puissance moyenne de bruit a pour expression :

$$N_s = E[n_s^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W S_{nn}(\omega) d\omega$$

Dans le cas d'un bruit additif, $S_{NN}(\omega) = \eta/2$ et dans ce cas :

$$N_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{\eta}{2} d\omega = \eta \frac{W}{2\pi} = \eta B \tag{7.6}$$

Si l'on fait l'hypothèse que le bruit est blanc, le calcul se simplifie et donne un résultat classique : le rapport signal sur bruit en sortie du récepteur a pour expression :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{S_s}{N_s} = \frac{S_e}{\eta B} \tag{7.7}$$

Posons $\frac{S_e}{\eta B} = \gamma$ (7.8)

alors $\left(\frac{S}{N}\right)_s = \gamma$ (7.9)

Le paramètre γ est directement proportionnel à S_e . On peut ainsi comparer les rapports signal sur bruit en sortie de divers systèmes aussi bien à puissance donnée S_e de leur signal d'entrée qu'à valeur γ donnée de leur rapport signal sur bruit d'entrée.

7.4 BRUIT EN MODULATION D'AMPLITUDE

La figure 7-3 schématise une liaison par voie hertzienne. La partie amont du récepteur (étages HF/FI) est symbolisée par un filtre passe-bande idéal de largeur de bande $2W$ centrée autour de la fréquence porteuse ω_p . Cet élément, parfois appelé *filtre de prédétection*, a pour effet de réduire le niveau de bruit «hors bande» susceptible d'atteindre le détecteur. Le signal d'entrée du détecteur a donc pour expression :

$$Y_e(t) = X_p(t) + n_e(t) \tag{7.10}$$

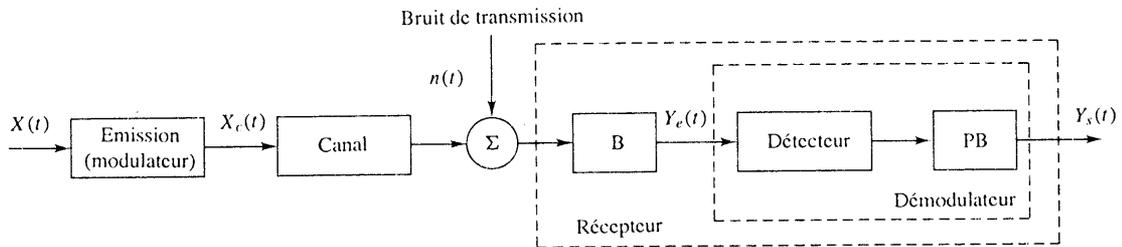


Fig. 7-3 Transmission hertzienne

où $n_e(t)$ est un bruit à bande étroite qui a pour expression [décomposition cartésienne, suivant la relation (6.67)] :

$$n_e(t) = n_c(t) \cos \omega_p t - n_s(t) \sin \omega_p t \tag{7.11}$$

Si la densité spectrale de bruit de $n(t)$ a pour valeur $\eta/2$, il vient (problème 6.35) :

$$E[n_c^2(t)] = E[n_s^2(t)] = E[n_e^2(t)] = 2\eta B \tag{7.12}$$

A. Détection synchrone

1. Modulation BLD

Dans un système à bande latérale double, le signal transmis a pour expression¹

$$X_p(t) = A_p X(t) \cos \omega_p t \tag{7.13}$$

La figure 7-4 représente le démodulateur du système BLD. Le signal d'entrée du récepteur a pour expression :

$$\begin{aligned} Y_e(t) &= A_p X(t) \cos \omega_p t + n_e(t) \\ &= [A_p X(t) + n_c(t)] \cos \omega_p t - n_s(t) \sin \omega_p t \end{aligned} \tag{7.14}$$

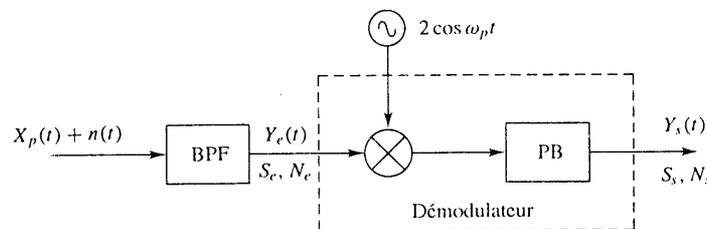


Fig. 7-4 Modulation BLD

En multipliant $Y_e(t)$ par $2 \cos \omega_p t$ et en filtrant le signal obtenu, on obtient :

$$Y_s(t) = A_p X(t) + n_c(t) = X_s(t) + n_s(t) \tag{7.15}$$

où

$$X_s(t) = A_p X(t) \quad \text{et} \quad n_s(t) = n_p(t)$$

1. On aurait besoin d'une phase aléatoire dans l'argument de la porteuse afin de rendre $X_p(t)$ stationnaire (voir problème 6.10). Cette phase aléatoire — indépendante de $X(t)$ — n'affecte aucunement le raisonnement, c'est pourquoi on ne la fait pas apparaître dans le calcul.

On voit que le bruit affecte le signal de sortie de façon additive et que la composante en quadrature $n_s(t)$ a été éliminée par le démodulateur.

On a donc :

$$S_s = E[X_s^2(t)] = E[A_p^2 X^2(t)] = A_p^2 E[X^2(t)] = A_p^2 S_X \quad (7.16a)$$

$$N_s = E[n_s^2(t)] = E[n_c^2(t)] = E[n_c^2(t)] = 2\eta B \quad (7.16b)$$

Et le rapport signal sur bruit a donc pour expression :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{S_s}{N_s} = \frac{A_p^2 S_X}{2\eta B} \quad (7.17)$$

La puissance S_e du signal d'entrée a pour expression :

$$S_e = E[X_p^2(t)] = \frac{1}{2} A_p^2 S_X \quad (7.18)$$

En tenant compte des relations (7.17) et (7.8), on obtient :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{S_e}{\eta B} = \gamma \quad (7.19)$$

Ce qui montre que la modulation BLD présente les mêmes performances qu'une liaison en bande de base, en ce qui concerne le bruit.

Le rapport signal sur bruit à l'entrée du détecteur a pour expression :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_e = \frac{S_e}{N_e} = \frac{S_e}{2\eta B} \quad (7.20)$$

et

$$\frac{(S/N)_s}{(S/N)_e} = \alpha_d = 2 \quad (7.21)$$

Le rapport α_d est le gain de détection, appelé aussi *facteur de mérite* de la démodulation.

2. Modulation BLU

Le même calcul, effectué dans le cas d'un système BLU, conduit à la même performance en bruit que pour une liaison en bande de base ou en BLD (problème 7.4).

3. Modulation AM

Les liaisons faisant appel à la modulation d'amplitude ordinaire peuvent utiliser aussi bien des détecteurs synchrones que des détecteurs d'enveloppe. Un signal modulé en amplitude a pour expression :

$$X_p(t) = A_p[1 + \mu X(t)] \cos \omega_p t \quad (7.22)$$

où μ est l'index de modulation du signal AM. On a d'autre part les relations :

$$\mu \leq 1 \quad \text{et} \quad |X(t)| \leq 1$$

Si le détecteur synchrone est associé à un supprimeur de composante continue idéal, le signal de sortie $Y_s(t)$ du récepteur a pour expression (figure 7-4) :

$$Y_s(t) = A_p \mu X(t) + n_c(t) = X_s(t) + n_s(t) \quad (7.23)$$

où l'on a :

$$X_s(t) = A_p \mu X(t) \quad \text{et} \quad n_s(t) = n_c(t)$$

Soit en définitive :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{S_s}{N_s} = \frac{A_p^2 \mu^2 S_X}{2\eta B} \quad (7.24)$$

La puissance d'entrée S_e du signal a pour expression :

$$S_e = \frac{1}{2} E[A_p^2 [1 + \mu X(t)]^2]$$

comme la valeur moyenne de $X(t)$, par hypothèse, est nulle,

$$S_e = \frac{1}{2} A_p^2 [1 + \mu^2 S_X] \quad (7.25)$$

ce qui entraîne

$$S_s = A_p^2 \mu^2 S_X = \frac{2\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} S_e$$

ainsi que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{S_s}{N_s} = \frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \left(\frac{S_e}{\eta B}\right) = \frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \gamma \quad (7.26)$$

comme $\mu^2 S_X \leq 1$, on a :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \leq \frac{\gamma}{2} \quad (7.27)$$

ce qui indique que le rapport signal sur bruit en AM est dans le meilleur des cas à 3 dB au-dessous de ce qu'on peut attendre d'une liaison BLD ou BLU.

B. Détection d'enveloppe et effet de seuil

On démodule habituellement un signal modulé en amplitude au moyen d'une détection d'enveloppe. Le signal d'entrée du détecteur (figure 7-3) a pour expression :

$$\begin{aligned} Y_e(t) &= X_p(t) + n_e(t) \\ &= \{A_p[1 + \mu X(t)] + n_c(t)\} \cos \omega_p t - n_s(t) \sin \omega_p t \end{aligned} \quad (7.28)$$

On peut analyser l'effet induit par le bruit sur le signal au moyen d'un diagramme vectoriel, en représentant le signal sous forme exponentielle :

$$Y_e(t) = \text{Re} [Y(t) e^{j\omega_p t}] \quad (7.29)$$

où

$$Y(t) = A_p[1 + \mu X(t)] + n_c(t) + j n_s(t) \quad (7.30)$$

La figure 7-5 représente le diagramme vectoriel qui montre que $Y_e(t)$ a pour expression :

$$Y_e(t) = V(t) \cos [\omega_p(t) + \Phi(t)] \quad (7.31)$$

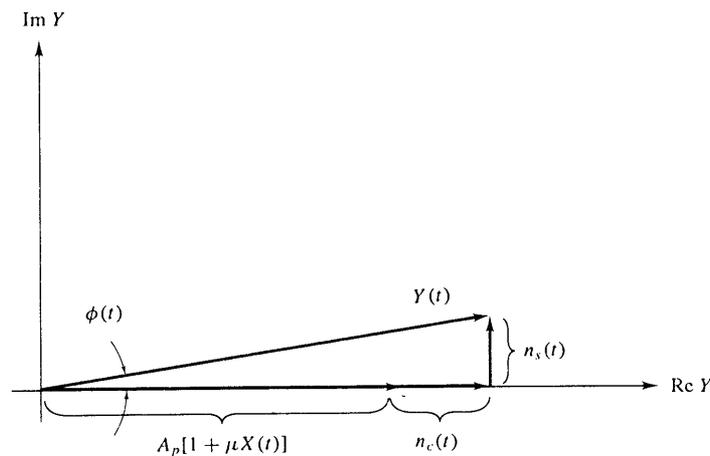


Fig. 7-5 Diagramme vectoriel en AM pour $(S/N)_e \gg 1$

où le module, $V(t)$, a pour expression :

$$V(t) = \sqrt{\{A_p[1 + \mu X(t)] + n_c(t)\}^2 + n_s^2(t)} \tag{7.32a}$$

$$\Phi(t) = \arctan \frac{n_s(t)}{A_p[1 + \mu X(t)] + n_c(t)} \tag{7.32b}$$

1. Fort rapport S/N (signal dominant)

Lorsque $(S/N)_e \gg 1$, $A_p[1 + \mu X(t)] \gg n_e(t)$, donc $A_p[1 + \mu X(t)] \gg n_c(t)$ et $n_s(t)$ la presque totalité du temps. Dans ces conditions, l'enveloppe du signal a pour approximation :

$$V(t) \approx A_p[1 + \mu X(t)] + n_c(t) \tag{7.33}$$

Un détecteur d'enveloppe idéal reproduit l'enveloppe du signal débarrassé de sa composante continue, soit :

$$Y_s(t) = A_p \mu X(t) + n_c(t) \tag{7.34}$$

résultat identique à celui du détecteur synchrone (relation 7.23). Le rapport signal sur bruit en sortie a la même expression que celle de la relation (7.26), à savoir :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \gamma \tag{7.35}$$

Par conséquent, les performances d'une transmission AM, lorsque $(S/N)_e \gg 1$, sont identiques à celles d'un détecteur synchrone.

2. Faible rapport S/N (bruit dominant)

Lorsque $(S/N)_e \ll 1$, l'enveloppe résultante du signal additionné de bruit est essentiellement conditionnée par le bruit (figure 7-6). Une bonne approximation de cette enveloppe a pour expression :

$$V(t) \approx V_n(t) + A_p[1 + \mu X(t)] \cos \phi_n(t) \tag{7.36}$$

où $V_n(t)$ et $\Phi_n(t)$ sont l'enveloppe et la phase du bruit $n_e(t)$. La relation (7.36) montre que le signal de sortie ne contient pas de terme proportionnel à $X(t)$ et que le bruit est « multiplicatif ». Le signal est multiplié par le bruit par un facteur $\cos \phi_n(t)$ qui est aléatoire.

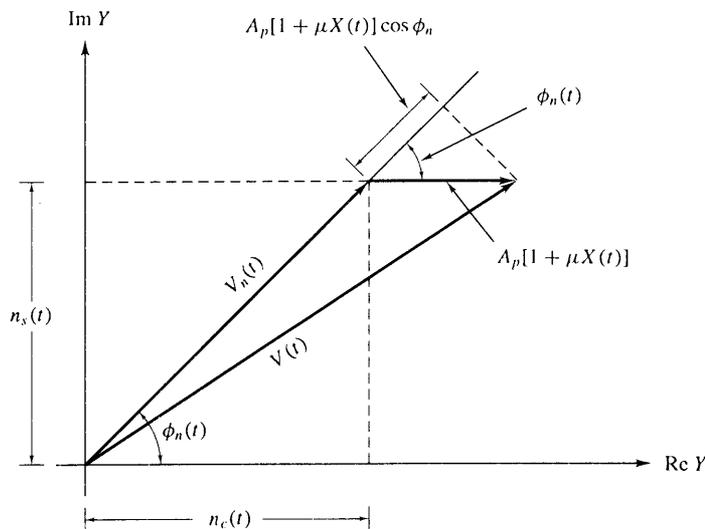


Fig. 7-6 Diagramme vectoriel en AM pour $(S/N)_e \ll 1$

Le signal utile $X(t)$ est fortement altéré et l'on perd l'information que contient ce signal. On aura compris qu'il est inutile, dans ce cas, de parler de rapport signal sur bruit.

La perte ou l'altération du signal utile aux faibles valeurs du rapport signal sur bruit de prédétection est appelé *effet de seuil*. Cela vient du fait qu'il existe une valeur limite de $(S/N)_e$ au-dessus de laquelle cet effet peut être négligé et au-dessous de laquelle les performances se détériorent rapidement. Cette valeur se situe un peu en dessous de 10 dB (voir problème 7.6).

7.5 BRUIT EN MODULATION D'ARGUMENT

Suivant la représentation de la figure 7-3, un signal à modulation d'argument $X_p(t)$ a pour expression :

$$X_p(t) = A_p \cos [\omega_p t + \phi(t)] \quad (7.37)$$

où :

$$\phi(t) = \begin{cases} k_\phi X(t) & \text{en mode PM} \\ k_f \int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau & \text{en mode FM} \end{cases} \quad (7.38)$$

La figure 7-7 représente un démodulateur d'argument. Le filtre de prédétection présente une bande passante de valeur $2(D+1)$ où D est le taux d'excursion et B la largeur de bande du signal modulant, selon la relation (3.27). Le signal à l'entrée du détecteur a pour expression :

$$\begin{aligned} Y_e(t) &= X_p(t) + n_e(t) \\ &= A_p \cos [\omega_p t + \phi(t)] + n_e(t) \end{aligned} \quad (7.39)$$

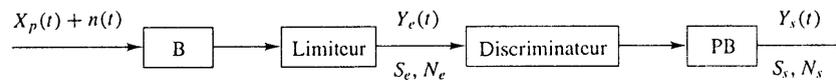


Fig. 7-7 Démodulateur d'argument

L'amplitude de la porteuse reste constante, donc :

$$S_e = E[X_p^2(t)] = \frac{1}{2} A_p^2 \quad (7.40a)$$

ainsi que

$$N_e = \eta B_T \quad (7.40b)$$

Il en découle que :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_e = \frac{A_p^2}{2\eta B_T} \quad (7.41)$$

expression qui ne dépend pas de $X(t)$.

Le rapport $(S/N)_e$ de la relation (7.41) est souvent appelé le rapport *porteuse sur bruit*.

Comme $n_e(t)$ est à bande étroite, on peut l'exprimer sous la forme suivante :

$$n_e(t) = v_n(t) \cos [\omega_p t + \phi_n(t)] \quad (7.42)$$

où $v_n(t)$ suit une distribution de *Rayleigh* et $\phi_n(t)$ est uniformément répartie sur l'intervalle $(0, 2\pi)$ (problème 5.33). Il s'ensuit que $Y_e(t)$ peut s'écrire :

$$Y_e(t) = V(t) \cos [\omega_p t + \theta(t)] \quad (7.43)$$

expression dans laquelle, d'une part :

$$V(t) = \{ [A_p \cos \phi + v_n(t) \cos \phi_n(t)]^2 + [A_p \sin \phi + v_n(t) \sin \phi_n(t)]^2 \}^{1/2}$$

et d'autre part :

$$\theta(t) = \arctan \frac{A_p \sin \phi + v_n(t) \sin \phi_n(t)}{A_p \cos \phi + v_n(t) \cos \phi_n(t)}$$

Le limiteur a pour but de supprimer toute variation d'amplitude de $V(t)$. C'est ainsi qu'en modulation d'argument, les évaluations de rapports signal sur bruit ne portent que sur $\theta(t)$. L'expression de $\theta(t)$ est complexe, elle peut être analysée moyennant quelques simplifications. On suppose que l'on utilise un détecteur idéal, dont le signal de sortie a pour expression :

$$Y_s(t) = \begin{cases} \theta(t) & \text{en mode PM} \\ \frac{d\theta(t)}{dt} & \text{en mode FM} \end{cases} \quad (7.44)$$

A. Signal dominant

On établit un diagramme vectoriel (figure 7-8) à partir de l'expression :

$$Y_e(t) = \text{Re} [Y(t)e^{j\omega_p t}] \quad (7.45)$$

où l'on a :

$$Y(t) = A_p e^{j\phi(t)} + v_n(t) e^{j\phi_n(t)} \quad (7.46)$$

avec $v_n(t) \ll A_p$ de façon quasi-permanente. La longueur L de l'arc AB (figure 7-8) a pour valeur :

$$L = Y(t)[\theta(t) - \phi(t)] \quad (7.47)$$

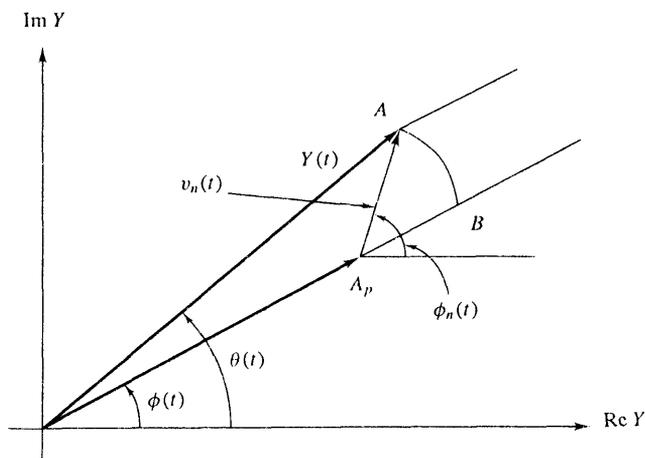


Fig. 7-8 Diagramme vectoriel en modulation d'argument

on peut donc écrire que :

$$Y(t) \approx A_p + v_n(t) \cos [\phi_n(t) - \phi(t)] \approx A_p$$

$$L \approx v_n(t) \sin [\phi_n(t) - \phi(t)]$$

D'après la relation (7.47), on obtient :

$$\theta(t) \approx \phi(t) + \frac{v_n(t)}{A_p} \sin [\phi_n(t) - \phi(t)] \quad (7.48)$$

Pour évaluer un rapport S/N en sortie du démodulateur, on remplace $\phi_n(t) - \phi(t)$ par $\phi_n(t)$, ce qui n'affecte pas les calculs², et l'on obtient :

$$\begin{aligned}\theta(t) &\approx \phi(t) + \frac{v_n(t)}{A_p} \sin \phi_n(t) \\ &= \phi(t) + \frac{n_s(t)}{A_p}\end{aligned}\quad (7.49)$$

Selon les relations (7.44) et (7.38), le signal en sortie du détecteur a pour expression :

$$Y_s(t) = \theta(t) = k_p X(t) + \frac{n_s(t)}{A_p} \quad \text{en mode PM} \quad (7.50)$$

$$Y_s(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = k_f X(t) + \frac{n'_s(t)}{A_p} \quad \text{en mode FM} \quad (7.51)$$

B. S/N en sortie d'une démodulation PM

Selon la relation (7.50), on a :

$$S_s = E[k_p^2 X^2(t)] = k_p^2 E[X^2(t)] = k_p^2 S_X \quad (7.52)$$

$$N_s = E\left[\frac{1}{A_p^2} n_s^2(t)\right] = \frac{1}{A_p^2} E[n_s^2(t)] = \frac{1}{A_p^2} (2\eta B) \quad (7.53)$$

En conséquence :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{k_p^2 A_p^2 S_X}{2\eta B} \quad (7.54)$$

En invoquant les relations (7.8) et (7.40a), il vient :

$$\gamma = \frac{S_e}{\eta B} = \frac{A_p^2}{2\eta B} \quad (7.55)$$

Et la relation (7.54) peut être écrite :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = k_p^2 S_X \gamma \quad (7.56)$$

C. S/N en sortie d'une démodulation FM

D'après la relation (7.51), on a :

$$S_s = E[k_f^2 X^2(t)] = k_f^2 E[X^2(t)] = k_f^2 S_X \quad (7.57)$$

$$N_s = E\left[\frac{1}{A_p^2} [n'_s(t)]^2\right] = \frac{1}{A_p^2} E[[n'_s(t)]^2] \quad (7.58)$$

En invoquant la relation (6.133) du problème 6.23, la densité spectrale de puissance de $n'_s(t)$ a pour expression :

$$S_{n'_s}(\omega) = \omega^2 S_{n_s}(\omega) = \begin{cases} \omega^2 \eta & \text{pour } |\omega| < W (= 2\pi B) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (7.59)$$

2. Cela est légitime du fait qu'au sens des moyennes d'ensemble, $\phi_n - \phi$ ne diffère de ϕ_n que par un décalage de valeur moyenne.

On en déduit que :

$$N_s = \frac{1}{A_p^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-w}^w \omega^2 \eta d\omega = \frac{2}{3} \frac{\eta}{A_p^2} \frac{W^3}{2\pi} \tag{7.60}$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{3A_p^2(2\pi)k_f^2 S_X}{2\eta W^3} \tag{7.61}$$

Si l'on tient compte de la relation (7.55), la relation (7.61) devient :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = 3 \left(\frac{k_f^2 S_X}{W^2}\right) \left(\frac{A_p^2}{2\eta B}\right) = 3 \left(\frac{k_f^2 S_X}{W^2}\right) \gamma \tag{7.62}$$

Comme $\Delta\omega = |k_f X(t)|_{\max} = k_f [|X(t)| \leq 1]$, la relation (7.62) se simplifie :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = 3 \left(\frac{\Delta\omega}{W}\right)^2 S_X \gamma = 3D^2 S_X \gamma \tag{7.63}$$

où D est le taux d'excursion, défini par la relation (3.26).

La relation (7.60) montre qu'en FM le niveau de bruit en sortie du démodulateur est inversement proportionnel à la puissance moyenne de la porteuse $A_p^2/2$. L'augmentation de puissance de la porteuse entraîne un *masquage* du bruit.

D. Effet de seuil en modulation d'argument

Lorsque $A_p^2 \ll E[n_e^2(t)]$, le diagramme vectoriel montre la prépondérance du terme $v_n(t)e^{j\phi_n(t)}$. Dans ce cas, la phase du signal à l'entrée du détecteur a pour expression :

$$\theta(t) \approx \phi_n(t) + \frac{A_p}{v_n(t)} \sin[\phi(t) - \phi_n(t)] \tag{7.64}$$

Le bruit est prédominant et le signal utile est altéré au-delà de toute possibilité de restitution — un effet semblable à celui que l'on observe en AM avec une détection d'enveloppe. La figure 7-9 illustre cet effet de seuil.

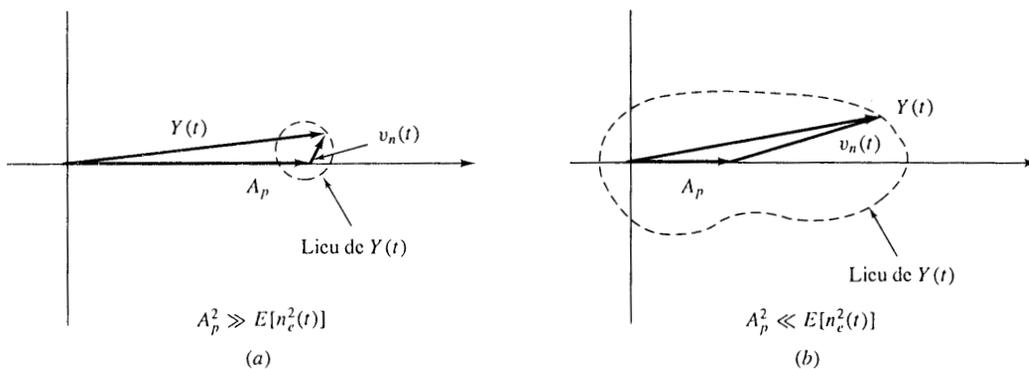


Fig. 7-9 Effet de seuil en mode FM

Si $A_p^2 \gg E[n_c^2(t)]$, on peut raisonnablement conjecturer que $v_n(t) \ll A_p$ en quasi-permanence, et que l'extrémité du vecteur résultant $Y(t)$ effectue un parcours aléatoire autour de l'extrémité du vecteur porteuse, comme l'illustre la figure 7-9(a). La variation de phase demeure donc anodine. Si le bruit devient prépondérant, la variation de phase est telle que l'extrémité du vecteur $Y(t)$ peut s'éloigner de celle du vecteur porteuse au point de faire un tour complet autour de l'origine [(figure 7-9(b)], ce qui induit un saut de phase de 2π [(figure 7-10(a)]. La sortie du discriminateur de fréquence délivrera une impulsion lors de chaque saut de phase, comme l'illustre la figure 7-10(b).

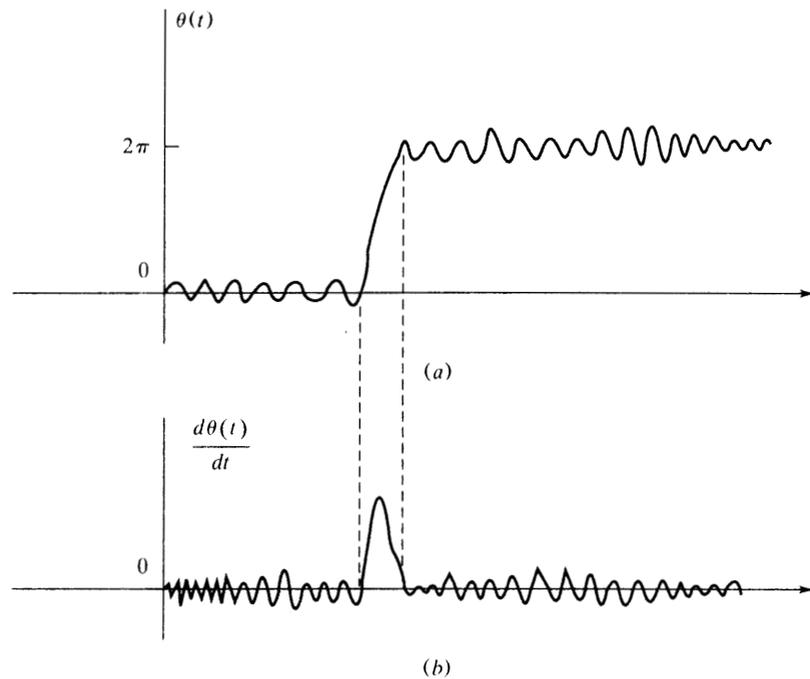


Fig. 7-10

7.6 DÉTECTION D'UN SIGNAL BINAIRE ET TEST D'HYPOTHÈSE

Nous allons étudier les performances des systèmes de communication numériques en présence de bruit additif par le biais de la probabilité d'erreur en détection de ces systèmes. On supposera que l'on a un canal sans distorsion et sans diaphonie. Le bruit est supposé gaussien, à valeur moyenne nulle et indépendant du signal.

La figure 7-11 représente le principe de fonctionnement d'un récepteur binaire. Le signal $s_e(t)$ reçu pendant une période d'échantillonnage a pour expression $s_i(t)$, l'indice i ne prenant que les valeurs 1 et 2 :

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) & 0 \leq t \leq T \quad \text{bit 1} \\ s_2(t) & 0 \leq t \leq T \quad \text{bit 0} \end{cases} \quad (7.65)$$

Le signal reçu par le récepteur a pour expression :

$$r(t) = s_i(t) + n(t) \quad i = 1, 2 \quad 0 \leq t \leq T \quad (7.66)$$

où $n(t)$ est un bruit blanc gaussien additif à moyenne nulle.

La détection s'effectue en deux phases. La première consiste à transformer le signal reçu $r(t)$ en une valeur $z(T)$. Cette opération peut s'effectuer au moyen d'un filtre linéaire suivi d'un échantillonneur, ce qui correspond à la section 1 du schéma 7-11. Le signal de sortie produit, échantillonné à $t = T$, a pour expression :

$$z(T) = a_i(T) + n_s(T) \quad i = 1,2 \tag{7.67a}$$

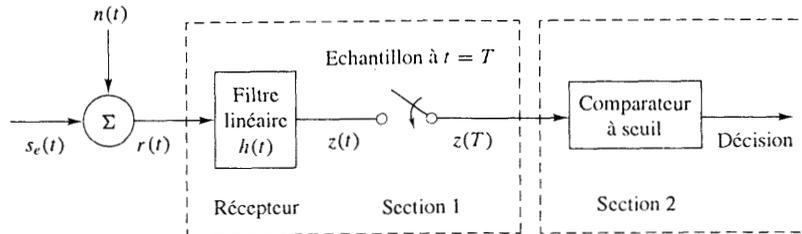


Fig. 7-11 Détection d'un signal numérique

où $a_i(T)$ est la composante signal de $z(T)$ et $n_s(T)$ en est la composante bruit. On écrit souvent la relation (7.67a) sous la forme suivante :

$$z = a_i + n_s \quad i = 1,2 \tag{7.67b}$$

Notons que la composante bruit n_s est une variable aléatoire gaussienne à valeur moyenne nulle, ce qui entraîne que z est une variable gaussienne de valeur moyenne a_1 ou a_2 selon que $s_1(t)$ ou $s_2(t)$ a été envoyé par le transmetteur. L'échantillon z est parfois appelé *valeur test*.

La deuxième phase de la détection consiste à comparer, dans la section 2 de la figure 7-11, la valeur test z à une valeur donnée λ , au moyen d'un comparateur à seuil. La détection consiste à décider si :

$$\begin{matrix} H_1 \\ z \gtrless \lambda \\ H_2 \end{matrix} \tag{7.68}$$

où H_1 et H_2 sont deux hypothèses mutuellement exclusives. Le choix de H_1 revient à décider qu'un signal $s_1(t)$ a été transmis, tandis que le choix de H_2 revient à décider que c'est le signal $s_2(t)$ qui a été transmis. La relation (7.68) indique que l'hypothèse H_1 correspond à $z > \lambda$, tandis que H_2 correspond à $z < \lambda$. Dans le cas où $z = \lambda$, la décision peut être arbitraire.

7.7 PROBABILITÉ D'ERREUR ET MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

A. Probabilité d'erreur

Les erreurs de détection sur un signal numérique peuvent se produire de deux façons : lorsque le signal $s_1(t)$ a été transmis alors que l'on a validé H_2 et lorsque le signal $s_2(t)$ a été transmis alors que l'on a validé H_1 . La probabilité d'une erreur de détection a donc pour expression :

$$P_e = P(H_2|s_1)P(s_1) + P(H_1|s_2)P(s_2) \tag{7.69}$$

où $P(s_1)$, resp. $P(s_2)$ est la probabilité *a priori* que $s_1(t)$, resp. $s_2(t)$ ait été transmis.

Lorsque les digits 1 et 0 sont équiprobables, c'est-à-dire lorsque $P(s_1) = P(s_2) = 1/2$, on a :

$$P_e = \frac{1}{2}[P(H_2|s_1) + P(H_1|s_2)] \quad (7.70)$$

B. Critère de détection du maximum de vraisemblance

Un critère de choix du seuil λ de la relation (7.68) consiste à minimiser la probabilité d'erreur qu'exprime la relation (7.69). Pour calculer cette valeur optimale de λ , on commence par faire un *test sur le rapport de vraisemblance* qui a pour expression :

$$\Lambda(z) = \frac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \quad (7.71)$$

où $f(z|s_i)$ est une fonction de densité de probabilité conditionnelle connue sous le nom de *vraisemblance* de s_i . Le rapport $\Lambda(z)$ est appelé *rapport de vraisemblance*. La relation (7.71) indique que l'on doit choisir l'hypothèse H_1 si le rapport de vraisemblance $\Lambda(z)$ présente une valeur supérieure au rapport des probabilités *a priori*. Si $P(s_1) = P(s_2)$, la relation (7.71) se réduit à :

$$\Lambda(z) = \frac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} 1 \quad (7.72a)$$

soit encore :

$$f(z|s_1) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} f(z|s_2) \quad (7.72b)$$

Si $P(s_1) = P(s_2)$ et si les vraisemblances $f(z|s_i)$ ($i = 1, 2$) sont symétriques, la relation (7.71) donne un critère (problème 7.18) :

$$\underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda_0 \quad (7.73)$$

avec :

$$\lambda_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (7.74)$$

On peut montrer que le seuil proposé par la relation (7.74) est le *seuil optimal* qui minimise la probabilité d'erreur (problème 7-19). Le critère de la relation (7.73) est connu sous le nom de *critère d'erreur minimum*. Un détecteur qui minimise la probabilité d'erreur (dans le cas où les classes de signaux sont équivraisemblables) est appelé *détecteur à maximum de vraisemblance*.

C. Probabilité d'erreur en bruit gaussien

La fonction de densité de probabilité du bruit aléatoire gaussien n_s dans la relation (7.67b) — relation (5.103) — a pour expression :

$$f_{n_s}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_s}} e^{-\xi^2/(2\sigma_{n_s}^2)} \quad (7.75)$$

où $\sigma_{n_s}^2$ est la variance du bruit. Il résulte des relations (7.67b) et (7.75) que :

$$f(z|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_s}} e^{-(z-a_1)^2/(2\sigma_{n_s}^2)} \quad (7.76a)$$

$$f(z|s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_s}} e^{-(z-a_2)^2/(2\sigma_{n_s}^2)} \quad (7.76b)$$

fonctions représentées sur la figure 7-12.

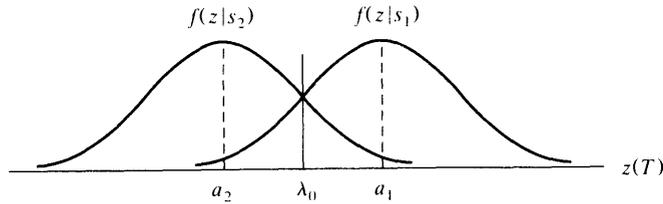


Fig. 7-12 Fonction de densité de probabilité conditionnelle

On a donc :

$$P(H_2|s_1) = \int_{-\infty}^{\lambda_0} f(z|s_1) dz \quad (7.77a)$$

$$P(H_1|s_2) = \int_{\lambda_0}^{\infty} f(z|s_2) dz \quad (7.77b)$$

En raison de la symétrie de $f(z|s_i)$, la relation (7.70) se réduit à :

$$P_e = P(H_2|s_1) = P(H_1|s_2) \quad (7.78)$$

La probabilité d'erreur P_e est donc égale à l'aire sous la courbe du côté « erreur » de l'une ou l'autre des deux fonctions de vraisemblance $f(z|s_1)$ ou $f(z|s_2)$:

$$P_e = \int_{\lambda_0}^{\infty} f(z|s_2) dz \quad (7.79)$$

où $\lambda_0 = (a_1 + a_2)/2$ est le seuil optimal — relation (7.74). En invoquant la relation (7.76b), on obtient :

$$P_e = \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n_s}} e^{-(z-a_2)^2/(2\sigma_{n_s}^2)} dz$$

Posons $y = (z - a_2)/\sigma_{n_s}$. On a donc $\sigma_{n_s} dy = dz$ et la relation précédente devient :

$$P_e = \int_{(a_1 - a_2)/(2\sigma_{n_s})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_s}}\right) \quad (7.80)$$

où l'on a reconnu dans $Q(\cdot)$ la fonction complémentaire de la fonction d'erreur, la fonction Q définie par la relation (5.105), dont les valeurs sont tabulées en Annexe C.

7.8 DÉTECTION OPTIMALE

Nous allons voir dans ce qui suit comment optimiser le filtre linéaire du récepteur (section 1) illustré par la figure 7-11 par minimisation de la probabilité d'erreur P_e .

A. Filtre adapté

On appelle *filtre adapté* un filtre linéaire capable d'assurer le rapport signal sur bruit optimal pour un signal donné. Soit un signal prédéterminé $s(t)$ auquel s'ajoute un bruit $n(t)$ blanc gaussien, l'ensemble constituant le signal d'entrée d'un filtre linéaire indépendant du temps.

Ce filtre est suivi d'un échantillonneur, comme le montre la figure 7-11. Soit $a(t)$ le signal de sortie du filtre. D'après la relation (7.67a), nous avons à l'instant $t = T$:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{a^2(t)}{E[n_s^2(T)]} = \frac{a^2(T)}{\sigma_{n_s}^2} \quad (7.81)$$

On désire pour ce filtre une fonction de transfert $H_s(\omega)$ qui maximise le rapport signal sur bruit de la relation (7.81). On montre que (problème 7.23) :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \leq \frac{2}{\eta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{2E}{\eta} \quad (7.82)$$

où $S(\omega) = \mathcal{F}[s(t)]$, $\eta/2$ est la puissance spectrale du bruit d'entrée $n(t)$ et E est l'énergie du signal d'entrée $s(t)$. On aura noté que le terme de droite de cette inégalité ne dépend pas de $H(\omega)$ mais seulement de l'énergie du signal et de la densité spectrale du bruit. Ainsi :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{s_{\max}} = \frac{2E}{\eta} \quad (7.83)$$

La relation (7.82) n'est une égalité que lorsque la réponse en fréquence $H_s(\omega)$ est utilisée (problème 7.23) de façon que :

$$H(\omega) = H_s(\omega) = S^*(\omega)e^{-j\omega T} \quad (7.84)$$

où l'astérisque * indique la conjugaison complexe.

La réponse temporelle $h(t)$ du filtre optimal — voir relations (1.30) et (1.33) — a donc pour expression :

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \begin{cases} s(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (7.85)$$

Les relations (7.85) et la figure 7-13 illustrent bien la propriété de base du filtre adapté : sa réponse temporelle est une version retardée de l'image en miroir du signal auquel on veut l'adapter.

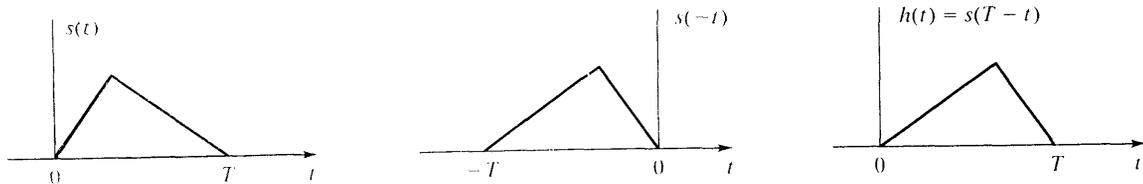


Fig. 7-13 Caractéristiques d'un filtre adapté

B. Corrélateur

La sortie $z(t)$ d'un filtre causal — relation (1.82) — a pour expression :

$$z(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t-\tau) d\tau \quad (7.86)$$

En portant l'expression de $h(t)$ de la relation (7.85) dans la relation (7.86), il vient :

$$z(t) = \int_0^t r(\tau)s[T-(t-\tau)] d\tau \quad (7.87)$$

Lorsque $t = T$, on a :

$$z(T) = \int_0^T r(\tau)s(\tau) d\tau \quad (7.88)$$

opération connue comme étant la corrélation des signaux $r(t)$ et $s(t)$.

Comme le signal de sortie du filtre adapté et celui du corrélateur sont identiques lors de l'instant d'échantillonnage $t = T$, on peut utiliser de façon interchangeable le corrélateur et le filtre adapté qu'illustre la figure 7-14.

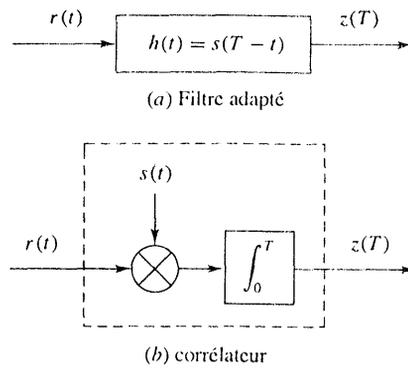


Fig. 7-14 Equivalence entre filtre adapté et corrélateur

C. Détection optimale

Pour minimiser P_e — relation (7.80) — il nous faut déterminer le filtre linéaire qui maximise le terme $(a_1 - a_2)/(2\sigma_{n_s})$ ou, ce qui revient au même, qui maximise le terme :

$$\frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_{n_s}^2} \tag{7.89}$$

où $a_1 - a_2$ est la différence entre composantes du signal à la sortie du filtre à l'instant $t = T$; le terme $(a_1 - a_2)^2$ est donc la puissance instantanée du signal différentiel tandis que $\sigma_{n_s}^2$ est la puissance moyenne du bruit en sortie du filtre.

Considérons un filtre adapté au signal différentiel $s_1(t) - s_2(t)$. D'après les relations (7.81) et (7.83), on a :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_{n_s}^2} = \frac{E_d}{\eta/2} = \frac{2E_d}{\eta} \tag{7.90}$$

où $\eta/2$ est la densité spectrale de bruit et E_d l'énergie du signal différentiel à l'entrée du filtre, à savoir :

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \tag{7.91}$$

En invoquant alors les relations (7.80) et (7.90), on obtient :

$$P_e = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_s}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right) \tag{7.92}$$

7.9 PROBABILITÉ D'ERREUR DES SYSTÈMES DE TRANSMISSION BINAIRES

En utilisant la relation (7.92), on peut comparer les probabilités d'erreur de divers systèmes de transmission.

A. Transmission en bande de base unipolaire

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = 0 & 0 \leq t \leq T \end{cases} \tag{7.93}$$

La probabilité d'erreur a pour expression :

$$Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \quad (7.94)$$

où $E_b = A^2T/2$ est l'énergie moyenne par digit du signal reçu.

B. Transmission en bande de base bipolaire

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = +A & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = -A & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (7.95)$$

La probabilité d'erreur a pour expression :

$$Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) \quad (7.96)$$

où $E_b = A^2T$ est l'énergie moyenne par digit du signal reçu.

C. Modulation d'une porteuse par tout ou rien

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_p t & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = 0 & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (7.97)$$

où T vaut un nombre entier de fois $1/f_p$. La probabilité d'erreur a pour expression :

$$Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{4\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \quad (7.98)$$

où $E_b = A^2T/4$ est l'énergie moyenne par digit du signal reçu.

D. Modulation PSK d'une porteuse

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_p t & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = A \cos (\omega_p t + \pi) \\ \quad = -A \cos \omega_p t & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (7.99)$$

où T vaut un nombre entier de fois $1/f_p$. La probabilité d'erreur a pour expression :

$$Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) \quad (7.100)$$

où $E_b = A^2T/2$ est l'énergie moyenne par digit du signal reçu.

E. Modulation FSK d'une porteuse

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_1 t & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = A \cos \omega_2 t & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (7.101)$$

Si l'on suppose que $\omega_1 T \gg 1$ et $\omega_2 T \gg 1$ et $(\omega_1 - \omega_2)T \gg 1$, la probabilité d'erreur P_e a pour expression (problème 7.33) :

$$Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \quad (7.102)$$

où $E_b = A^2T/2$ est l'énergie moyenne par digit du signal reçu.

Problèmes résolus

BRUIT EN BANDE DE BASE

- 7.1. On considère une liaison analogique en bande de base avec un bruit blanc additif. Le canal de transmission est supposé sans distorsion; la densité spectrale du bruit blanc $\eta/2$ a pour valeur 10^{-9} watts par hertz (W/Hz). Le signal à transmettre est un signal BF de 4 kHz de largeur de bande. Du côté du récepteur, on utilise un filtre passe-bas RC dont la bande passante à 3 dB est de 8 kHz pour limiter le bruit en sortie du récepteur. Calculer la puissance de bruit en sortie de cette liaison.

D'après le problème 1.49, la réponse en fréquence $H(\omega)$ d'un filtre passe-bas RC de bande passante à 3 dB égale à 8 kHz a pour expression :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0}$$

où $\omega_0 = 2\pi(8\,000)$. En invoquant les relations (6.40) et (6.53), on peut évaluer la puissance de bruit en sortie N_s :

$$\begin{aligned} N_s &= E[n_s^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2} |H(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{\eta}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^2} d\omega \\ &= \frac{1}{4} \eta \omega_0 = \frac{1}{4} 2(10^{-9})(2\pi)(8)(10^3) \text{W} = 25,2 \mu\text{W} \end{aligned}$$

- 7.2. On considère une transmission analogique en bande de base avec bruit blanc additif de densité spectrale de puissance $\eta/2$ sur un canal affecté de distorsion, selon la fonction de transfert :

$$H_p(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/W}$$

La distorsion est corrigée par un filtre du récepteur (égaliseur) dont la fonction de transfert a pour expression :

$$H_{eq}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{H_p(\omega)} & 0 \leq |\omega| \leq W \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Calculer l'expression du rapport signal sur bruit en sortie.

$$\begin{aligned} S_s &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_c(\omega)|^2 |H_{eq}(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W S_{XX}(\omega) d\omega = S_X \\ N_s &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2} |H_{eq}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{\eta}{2\pi} \int_0^W \left[1 + \left(\frac{\omega}{W} \right)^2 \right] d\omega = \frac{\eta}{2\pi} \left(\frac{4}{3} W \right) = \frac{4}{3} \eta B \end{aligned}$$

d'où l'on conclut :

$$\left(\frac{S}{N} \right)_s = \frac{S_s}{N_s} = \frac{S_X}{\frac{4}{3} \eta B} = \frac{3}{4} \frac{S_X}{\eta B} \quad (7.103)$$

BRUIT EN MODULATION D'AMPLITUDE

- 7.3. Un signal BLD avec bruit blanc additif est démodulé au moyen d'un détecteur synchrone (figure 7-7) avec une erreur de phase ϕ . On suppose que le signal délivré par l'oscillateur local a pour expression $2 \cos(\omega_p t + \phi)$, montrer que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \gamma \cos^2 \phi \quad (7.104)$$

où γ est défini par la relation (7.8).

D'après la relation (7.14),

$$Y_e(t) = [A_p X(t) + n_c(t)] \cos \omega_p t - n_s(t) \sin \omega_p t$$

En multipliant $Y_e(t)$ par $2 \cos(\omega_p t + \phi)$ et en traitant le produit dans un filtre passe-bas, on obtient :

$$\begin{aligned} Y_s(t) &= A_p X(t) \cos \phi + n_c(t) \cos \phi + n_s(t) \sin \phi \\ &= X_s(t) + n_s(t) \end{aligned}$$

où l'on a :

$$\begin{aligned} X_s(t) &= A_p X(t) \cos \phi \\ n_s(t) &= n_c(t) \cos \phi + n_s(t) \sin \phi \end{aligned}$$

Ainsi S_s s'exprime de la façon suivante :

$$S_s = E[X_s^2(t)] = A_p^2 \cos^2 \phi E[X^2(t)] = A_p^2 (\cos^2 \phi) S_X$$

N_s s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} N_s &= E[n_s^2(t)] = E[n_c^2(t) \cos^2 \phi + n_s^2(t) \sin^2 \phi + n_c(t)n_s(t) \sin 2\phi] \\ &= E[n_c^2(t)] \cos^2 \phi + E[n_s^2(t)] \sin^2 \phi \\ &= E[n_e^2(t)] (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = E[n_e^2(t)] = 2\eta B \end{aligned}$$

puisque $E[n_c(t)n_s(t)] = 0$, d'après la relation (6.73).

On obtient ainsi, d'après les relations (7.17), (7.18) et (7.19) :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{A_p^2 S_X \cos^2 \phi}{2\eta B} = \frac{\frac{1}{2} A_p^2 S_X}{\eta B} \cos^2 \phi = \gamma \cos^2 \phi$$

où γ a pour valeur (relation 7.8) :

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2} A_p^2 S_X}{\eta B} = \frac{S_e}{\eta B}$$

- 7.4. Montrer que les performances d'un démodulateur BLU utilisant une détection synchrone sont équivalentes à celles d'un démodulateur BLD ou d'une liaison en bande de base.

Un signal BLU a pour expression (relation 2.11) :

$$X_p(t) = A_p [X(t) \cos \omega_p t + \hat{X}(t) \sin \omega_p t] \quad (7.105)$$

où $\hat{X}(t)$ est la transformée de Hilbert de $X(t)$. On remarquera que la relation (7.105) représente la bande inférieure du signal BLU. La bande passante minimale du filtre de prédétection, dans ce cas, a pour valeur W .

En se reportant à la figure 7-4, le signal à l'entrée du récepteur a pour expression :

$$\begin{aligned} Y_e(t) &= X_p(t) + n_e(t) \\ &= [A_p X(t) + n_c(t)] \cos \omega_p t + [A_p \hat{X}(t) - n_s(t)] \sin \omega_p t \end{aligned} \quad (7.106)$$

Une détection synchrone élimine les composantes du signal et du bruit en quadrature par rapport à la porteuse, ce qui donne :

$$Y_s(t) = A_p X(t) + n_c(t) = X_s(t) + n_s(t) \quad (7.107)$$

où l'on a :

$$X_s(t) = A_p X(t) \quad \text{et} \quad n_s(t) = n_c(t)$$

La puissance du signal en sortie a pour expression :

$$S_s = E[X_s^2(t)] = A_p^2 E[X^2(t)] = A_p^2 S_X$$

La figure 7-15 représente la densité spectrale de puissance de $n_c(t)$ dans le cas d'une modulation BLI (bande latérale inférieure).

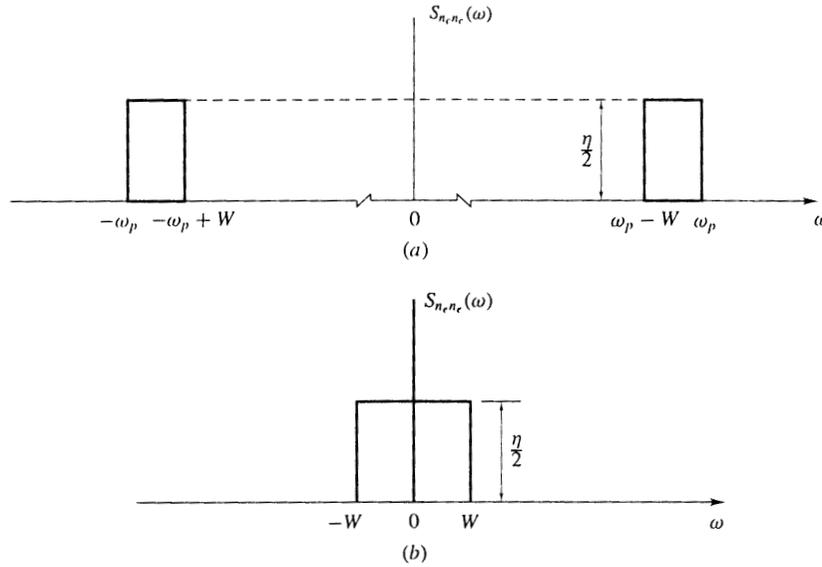


Fig. 7-15

La puissance de bruit en sortie a pour valeur :

$$N_s = E[n_c^2(t)] = \frac{\eta W}{2\pi} = \eta B$$

et le rapport signal sur bruit en sortie a pour expression :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{A_p^2 S_X}{\eta B} \tag{7.108}$$

La puissance du signal en entrée a pour valeur :

$$\begin{aligned} S_e &= E[X_p^2(t)] = A_p^2 \left\{ \frac{1}{2} E[X^2(t)] + \frac{1}{2} E[\widehat{X}^2(t)] \right\} \\ &= A_p^2 E[X^2(t)] = A_p^2 S_X \end{aligned}$$

comme, en vertu des résultats obtenus lors du problème et d'après la relation (6.128) du problème 6.20, on peut écrire que :

$$E[X(t)\widehat{X}(t)] = 0 \quad \text{et} \quad E[X^2(t)] = E[\widehat{X}^2(t)]$$

on en déduit :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{S_e}{\eta B} = \gamma \tag{7.109}$$

ce qui nous montre qu'en ce qui concerne le bruit, la modulation BLU avec détection synchrone présente les mêmes performances qu'une transmission en bande de base ou de type BLD.

7.5. Montrer qu'en modulation d'amplitude sinusoïdale, le rapport signal sur bruit en sortie du détecteur d'enveloppe a pour expression :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2} \gamma \tag{7.110}$$

où μ est l'index de modulation AM.

En modulation sinusoïdale, on a :

$$X(t) = \cos \omega_m t$$

et donc :

$$S_X = E[X^2(t)] = \frac{1}{2}$$

D'après la relation (7.35), on déduit que :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{\mu^2 S_X}{1 + \mu^2 S_X} \gamma = \frac{\mu^2 (\frac{1}{2})}{1 + \mu^2 (\frac{1}{2})} \gamma = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2} \gamma$$

Notons qu'avec une modulation à 100% ($\mu = 1$), on a :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{1}{3} \gamma \quad (7.111)$$

- 7.6. La valeur de seuil d'un détecteur d'enveloppe en AM est généralement définie comme valeur du rapport signal sur bruit $(S/N)_e$ pour laquelle $V_n \ll A_p$ avec une probabilité de 0,99, où A_p et V_n sont les amplitudes respectives de la porteuse et du bruit. Montrer que si $\mu = 1$ et $S_X = E[X^2(t)] = 1$, alors la condition $P(V_n \ll A_p) = 0,99$ impose que :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_e = 4 \ln 10 = 9,2 \approx 10 \quad (7.112)$$

D'après la relation (6.69a) et la relation (5.148) du problème 5.33, la densité de probabilité de V_n a pour expression :

$$f_{V_n}(v_n) = \frac{v_n}{N_e} e^{-v_n^2/(2N_e)} \quad \text{pour } v_n > 0 \quad (7.113)$$

où l'on a :

$$e = E[\eta_e^2(t)] = 2\eta B$$

ainsi que

$$\begin{aligned} P(V_n \geq A_p) &= \int_{A_p}^{\infty} f_{V_n}(v_n) dv_n \\ &= \int_{A_p}^{\infty} \frac{v_n}{N_e} e^{-v_n^2/(2N_e)} dv_n = \int_{A_p^2/(2N_e)}^{\infty} e^{-\lambda} d\lambda = e^{-A_p^2/(2N_e)} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$P(V_n < A_p) = 0,99 \rightarrow P(V_n \geq A_p) = 0,01$$

d'où il s'ensuit que :

$$e^{-A_p^2/(2N_e)} = e^{-A_p^2/(4\eta B)} = 0,01 \quad (7.114)$$

D'après la relation (7.25), en faisant $\mu = 1$ et $S_X = 1$, il vient :

$$S_e = \frac{1}{2} A_p^2 (1 + \mu^2 S_X) = A_p^2$$

ainsi que :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_e = \frac{S_e}{N_e} = \frac{A_p^2}{2\eta B}$$

La relation (7.114) peut donc être écrite sous la forme :

$$e^{-(1/2)(S/N)_e} = 0,01$$

d'où l'on déduit la valeur du rapport signal à bruit au seuil, en entrée :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{e_s} = 2 \ln \frac{1}{0,01} = 4 \ln 10 = 9,2 \approx 10 \text{ (10 dB)} \quad (7.115)$$

- 7.7. On considère un système à modulation d'amplitude avec un bruit thermique additif de densité spectrale de puissance $\eta/2 = 10^{-12}$ W/Hz. On suppose que le signal modulant présente une largeur de bande de 4 kHz et que sa loi de répartition d'amplitude a la forme que représente la figure 7-16. Le signal est démodulé au moyen d'un détecteur d'enveloppe suivi d'un filtre approprié. On suppose que $\mu = 1$.

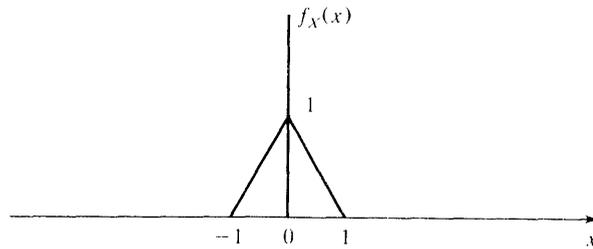


Fig. 7-16

- (a) Quelle est la valeur minimale de la porteuse A_p assurant un rapport $(S/N)_s \geq 40$ dB.
- (b) Calculer la valeur de seuil de A_p .
- (a) On peut écrire :

$$X_p(t) = A_p[1 + X(t)] \cos \omega_p t$$

$$S_X = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = 2 \int_0^1 x^2(-x + 1) dx = \frac{1}{6}$$

D'après la relation (7.26) ($\mu = 1$), on a :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{S_X}{1 + S_X} \gamma = \frac{\frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{6}} \gamma = \frac{1}{7} \gamma \geq 10^4$$

Il s'ensuit que :

$$\gamma \geq 7(10^4)$$

D'après les relations (7.8) et (7.25) :

$$\frac{A_p^2(1 + \frac{1}{6})}{4(10^{-12})(4)(10^3)} \geq 7(10^4)$$

d'où l'on tire que :

$$A_p \geq 31(10^{-3}) \text{ V} = 31 \text{ mV}$$

La valeur minimale requise pour A_p est donc de 31 mV.

- (b) D'après la relation (7.115), on a :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{e_s} = 10$$

Par conséquent :

$$\gamma|_{\text{au seuil}} = \gamma_{\text{th}} = 2 \left(\frac{S}{N}\right)_{e_s} = 20 \tag{7.116}$$

D'après le (a) ci-dessus, on doit avoir :

$$\frac{A_p^2(1 + \frac{1}{6})}{4(10^{-12})(4)(10^3)} = 20$$

Ce qui induit que :

$$A_p = 0,52(10^{-3}) \text{ V} = 0,52 \text{ mV}$$

valeur de seuil de l'amplitude A_p de la porteuse.

- 7.8. Evaluer la bande passante B_T et la puissance de signal S_T requises pour la transmission d'un signal BF de largeur de bande 10 kHz en mode BLD, BLU et AM avec un rapport signal sur bruit de 40 dB, en supposant que le canal de transmission introduit une perte en ligne de 40 dB et qu'il présente un bruit blanc gaussien de densité spectrale $\eta/2 = 10^{-9}$ W/Hz. On supposera aussi que $\mu^2 S_X = 0,5$ en AM.

Si l'on se souvient des développements du chapitre 2, on peut facilement répondre en ce qui concerne les bandes passantes :

$$B_T = \begin{cases} 20 \text{ kHz} & \text{en BLD et en AM} \\ 10 \text{ kHz} & \text{en BLU} \end{cases}$$

D'après les relations (7.19) et (7.109), on sait évaluer les puissances nécessaires en mode BLD et BLU : on a, en effet, d'une part :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{S_e}{\eta B} = 10^4 (= 40 \text{ dB})$$

et d'autre part :

$$S_e = \eta B (10^4) = 2(10^{-9})(10^4)(10^4) = 0,2 \text{ W}$$

Puisque la perte introduite par le canal est de 40 dB, la puissance nécessaire, en mode BLD ou BLU, a pour valeur :

$$S_T = 0,2(10^4) = 2000 \text{ W} = 2 \text{ kW}$$

Dans le cas du mode AM avec détecteur d'enveloppe, en invoquant la relation (7.26) et en tenant compte de ce que $\mu^2 S_X = 0,5$:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{1}{3} \left(\frac{S_e}{\eta B}\right)$$

On constate que la puissance nécessaire S_T est trois fois celle que demande le mode BLD ou BLU, c'est-à-dire :

$$S_T = 6 \text{ kW}$$

- 7.9. On considère un démodulateur AM (figure 7-17) utilisant un détecteur quadratique (problème 2.7). On suppose l'existence d'un bruit blanc gaussien additif de densité spectrale $\eta/2$. Calculer le rapport signal sur bruit en sortie du détecteur.

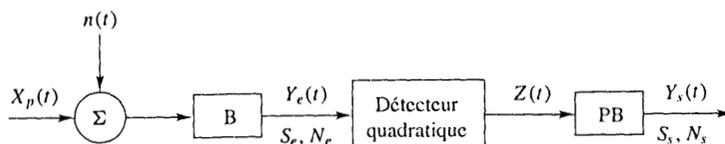


Fig. 7-17 Détecteur quadratique

Le signal incident a pour expression :

$$X_p(t) = A_p[1 + \mu X(t)] \cos \omega_p t$$

Le signal à l'entrée du détecteur a pour expression :

$$Y_e(t) = X_p(t) + n_e(t)$$

Le signal en sortie du détecteur a pour expression :

$$\begin{aligned} Z(t) &= Y_e^2(t) \\ &= \frac{A_p^2}{2} [1 + 2\mu X(t) + \mu^2 X^2(t)] (1 + \cos 2\omega_p t) + n_e^2(t) + 2A_p n_e(t) [1 + \mu X(t)] \cos \omega_p t \end{aligned}$$

Comme on impose que $|\mu X(t)| \ll 1$ pour ne pas introduire de distorsion en démodulation quadratique (problème 2.7), on peut écrire une approximation de $Z(t)$ sous la forme suivante :

$$Z(t) \approx \frac{A_p^2}{2} [1 + 2\mu X(t)] (1 + \cos 2\omega_p t) + n_e^2(t) + 2A_p n_e(t) \cos \omega_p t \quad (7.117)$$

Après filtrage passe-bas et élimination de la composante continue, le signal de sortie $Y_s(t)$ du récepteur a pour expression :

$$Y_s(t) = X_s(t) + n_s(t)$$

où

$$X_s(t) = A_p^2 \mu X(t)$$

et où $n_s(t)$ est le résultat du filtrage de $n_e^2(t) + 2A_p n_e(t) \cos \omega_p t$ et de la suppression de la composante continue. On peut donc écrire que :

$$S_s = E[X_s^2(t)] = A_p^4 \mu^2 E[X^2(t)] = A_p^4 \mu^2 S_X \tag{7.118}$$

D'autre part, d'après la relation (6.125) du problème 6.31, on a :

$$S_{n_e^2 n_e^2}(\omega) = 2\pi E[n_e^2(t)]\delta(\omega) + \frac{1}{\pi} S_{n_e n_e}(\omega) * S_{n_e n_e}(\omega) \tag{7.119}$$

et d'après la relation (6.99) du problème 6.10, on sait que la densité spectrale de $2A_p n_e(t) \cos \omega_p t$, que nous noterons $S_{nep}(\omega)$ a pour expression :

$$S_{nep}(\omega) = A_p^2 [S_{n_e n_e}(\omega - \omega_p) + S_{n_e n_e}(\omega + \omega_p)] \tag{7.120}$$

La figure 7-18 représente ces deux densités spectrales. Le filtre qui suit la détection élimine la composante continue (le premier terme du membre de droite de la relation 7.119) et ne transmet que les composantes spectrales qui se trouvent dans la bande $-W, +W$ ($W = 2\pi B$). D'après la figure 7-18, la puissance de bruit en sortie du détecteur a pour expression :

$$N_s = E[n_s^2(t)] = 3\eta^2 B^2 + 2A_p^2 \eta B \tag{7.121}$$

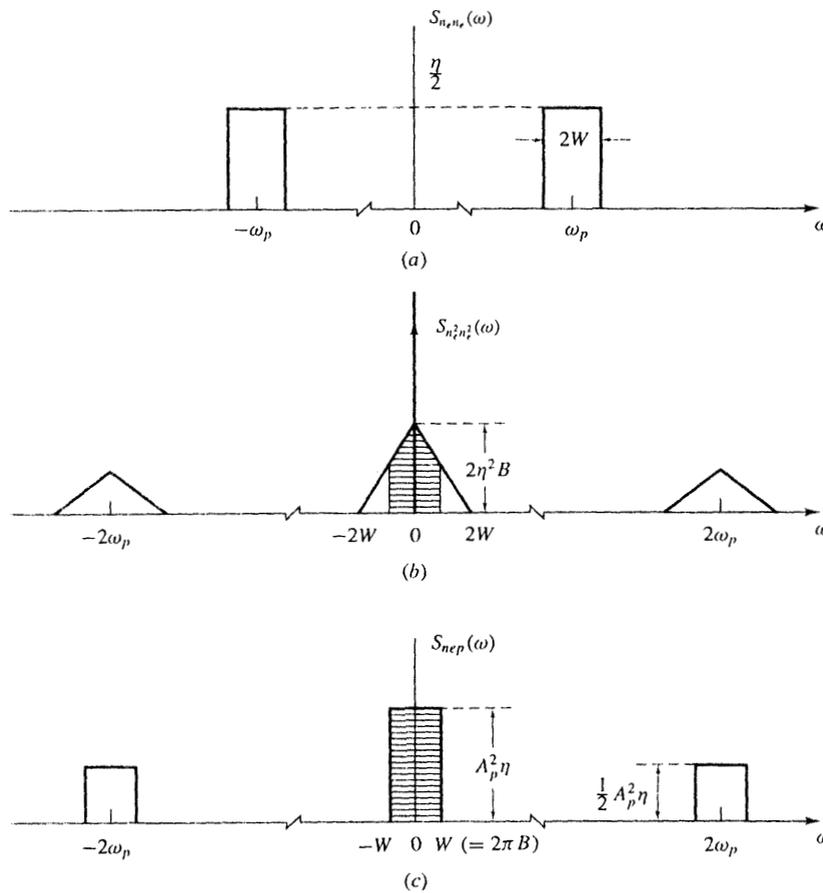


Fig. 7-18

On en déduit que le rapport signal sur bruit en sortie du détecteur a pour valeur :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{S_s}{N_s} = \frac{A_p^4 \mu^2 S_X}{3\eta^2 B^2 + 2A_p^2 \eta B} \quad (7.122)$$

BRUIT ET MODULATION D'ARGUMENT

- 7.10.** On considère une émission FM dont les caractéristiques sont les suivantes : excursion $\Delta f = 75$ kHz et $B = 15$ kHz. En supposant que $S_X = \frac{1}{2}$, calculer le rapport signal sur bruit en sortie de démodulation et calculer le gain de performance, en dB, par rapport à une liaison en bande de base.

En portant les valeurs données dans la relation (7.63), on obtient :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = 3 \left(\frac{75(10^3)}{15(10^3)}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) \gamma = 37,5\gamma$$

Puisque $10 \log 37,5 = 15,7$ dB, on en déduit que le rapport $(S/N)_s$ est supérieur de 16 dB à celui d'une liaison en bande de base.

- 7.11.** Montrer que le rapport signal sur bruit d'un démodulateur FM, pour un signal modulant sinusoïdal, a pour expression :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{3}{2} \beta^2 \gamma \quad (7.123)$$

où β est l'index de modulation de la transmission.

Le signal modulant, sinusoïdal, a pour expression :

$$X(t) = \cos \omega_m t$$

d'où l'on déduit que :

$$S_X = E[X^2(t)] = \frac{1}{2}$$

Selon la relation (7.62), nous avons :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = 3 \left(\frac{k_f^2 S_X}{W^2}\right) \gamma = \frac{3}{2} \left(\frac{\Delta\omega}{W}\right)^2 \gamma = \frac{3}{2} \beta^2 \gamma$$

puisque

$$\Delta\omega = |k_f X(t)|_{\max} = k_f \quad \text{et} \quad \frac{\Delta\omega}{W} = \beta$$

Il est important de remarquer que l'index de modulation est fixé à partir de la bande passante W du filtre passe-bas qui suit la détection et ne dépend pas de la fréquence ω_p du signal modulant. La bande W étant définie, la fréquence du signal modulant sinusoïdal peut se trouver n'importe où dans l'intervalle $0, W$, le rapport signal sur bruit en sortie conservant sa valeur.

- 7.12.** Montrer que la FM en bande étroite (NBFM) ne présente aucun avantage par rapport au mode AM en ce qui concerne le rapport signal sur bruit en sortie de détection.

Dans le cas d'une modulation AM avec détection d'enveloppe, en supposant que l'on module la porteuse à 100%, le rapport signal à bruit en sortie de détection a pour expression (problème 7.5, relation 7.111) :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{1}{3} \gamma$$

Dans le cas du mode FM, pour une modulation sinusoïdale, la valeur du rapport signal sur bruit en sortie a pour expression (problème 7.11, relation 7.123) :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{3}{2} \beta^2 \gamma$$

On voit donc que la FM apporte une amélioration du rapport signal sur bruit par rapport au mode AM lorsque :

$$\frac{3}{2} \beta^2 > \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \beta > 0,47$$

Dans le paragraphe 3.7, nous avons dit qu'une modulation FM à bande étroite se caractérise par une valeur $\beta < 0,2$. On conclut donc que ce mode ne présente pas d'avantage en S/B sur le mode AM.

Remarquons que les considérations précédentes, relativement au bruit, conduisent à définir plutôt la valeur $\beta = 0,5$ comme la frontière entre FM normale et NBFM.

- 7.13.** On transmet un signal BF $X(t)$ sur un canal de radiodiffusion affecté d'un bruit blanc gaussien additif. On exige un rapport signal sur bruit en réception supérieur à 40 dB. Les caractéristiques du signal modulant et du canal sont les suivantes :

$$E[X(t)] = 0 \quad |X(t)| \leq 1 \quad S_X = E[X^2(t)] = \frac{1}{2} \quad B = 15 \text{ kHz}$$

$$\text{Densité spectrale de puissance du bruit blanc : } \eta/2 = 10^{-12} \text{ W/Hz}$$

$$\text{Perte de puissance du canal} = 50 \text{ dB}$$

Calculer la largeur de bande B_T et la puissance S_T avec laquelle il faut émettre dans les cas de modulation suivants :

- (a) Mode BLD.
 (b) Mode AM avec $\mu = 100\%$ et détection d'enveloppe.
 (c) Mode PM avec $k_p = 3$.
 (d) Mode FM, index de modulation $D = 5$.
 (a) En mode BLD, on a :

$$B_T = 2B = 30 \text{ kHz}$$

D'après les relations (7.8) et (7.19) on a :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \gamma = \frac{S_e}{\eta B} = \frac{S_e}{2(10^{-10})(15)(10^3)} \geq 10^4 (= 40 \text{ dB})$$

soit

$$S_e \geq 3(10^{-2}) \text{ W}$$

d'où

$$S_T = S_e(10^5) \geq 3000 \text{ W} = 3 \text{ kW}$$

- (b) En AM, avec $\mu = 1$ et une détection d'enveloppe, on a :

$$B_T = 2B = 30 \text{ kHz}$$

D'après la relation (7.35), on a :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{1}{3}\gamma$$

d'où l'on conclut que :

$$S_T \geq 9 \text{ kW}$$

- (c) En mode PM, avec $k_\phi = 3$, on a, d'après les relations (3.21) et (3.25)

$$B_T + 2(k_\phi + 1)B = 120 \text{ kHz}$$

D'après la relation (7.56), on a :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = k_\phi^2 S_X \gamma = (3^2) \left(\frac{1}{2}\right) \frac{5}{2(10^{-10})(15)(10^3)} \geq 10^4$$

soit

$$S_e \geq \frac{2}{3}(10^{-2}) \text{ W}$$

d'où

$$S_T = S_e(10^5) \geq 667 \text{ W}$$

- (d) En mode FM avec $D = 5$, d'après la relation (3.27), on a :

$$B_T = 2(D + 1)B = 180 \text{ kHz}$$

D'après la relation (7.63), on sait que :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = 3D^2 S_X \gamma = 3(5^2) \left(\frac{1}{2}\right) \frac{5}{2(10^{-10})(15)(10^3)} \geq 10^4$$

soit

$$S_e \geq \frac{2}{25} (10^{-2}) \text{ W}$$

d'où l'on déduit :

$$S_T = S_e (10^5) \geq 80 \text{ W}$$

7.14. Les résultats du problème 7.6 montrent que la valeur de seuil en mode AM est équivalente à un rapport signal sur bruit en entrée $(S/N)_e = 10$. On supposera qu'il en est de même en mode FM.

- (a) Calculer le rapport signal sur bruit au seuil en mode FM, dans le cas d'une modulation sinusoïdale.
 (b) Trouver l'index de modulation β qui assure un rapport $(S/N)_e = 30$ dB au seuil.

(a) D'après la relation (7.62), on a :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = 3 \left(\frac{k_f^2 S_X}{W^2}\right) \left(\frac{A_p^2}{2\eta B}\right) \quad (7.124)$$

Pour une modulation sinusoïdale, on sait que :

$$S_X = \frac{1}{2} \Delta\omega = k_f \beta = \frac{\Delta\omega}{W}$$

On peut donc écrire la relation (7.124) comme suit :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{3}{2} \beta^2 \left(\frac{\frac{1}{2} A_p^2}{\eta B}\right)$$

En invoquant la relation (7.41), il vient :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{3}{2} \beta^2 \left(\frac{B_T}{B}\right) \left(\frac{S}{N}\right)_e$$

D'après la formule de Carson (3.25), on sait que :

$$B_T = 2(\beta + 1)B$$

On obtient donc :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = 3\beta^2(\beta + 1) \left(\frac{S}{N}\right)_e \quad (7.125)$$

En faisant $\left(\frac{S}{N}\right)_e = 10$, on voit que le rapport signal sur bruit au seuil a pour valeur :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{s_s} = 30\beta^2(\beta + 1) \quad (7.126)$$

(b) On a la relation :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{s_s} = 30\beta^2(\beta + 1) = 10^3 (= 30 \text{ dB})$$

En résolvant, on obtient $\beta = 2,92$.

7.15. On utilise en radiodiffusion FM commerciale un filtrage de *préaccentuation / désaccentuation* pour améliorer le rapport signal sur bruit en sortie. La méthode consiste à renforcer à l'émission les fréquences les plus hautes du signal BF avant que le bruit ne s'introduise dans le canal et l'on effectue en réception une atténuation compensatrice pour rétablir l'équilibre spectral du signal originel. La figure 7-19 représente les filtres de pré-accélération (PA) et de désaccélération (DA) utilisés. La valeur standard de la constante de temps de ces filtres est $R_1C = 75\mu\text{s}$, avec la condition $R_2C \gg R_1C$.

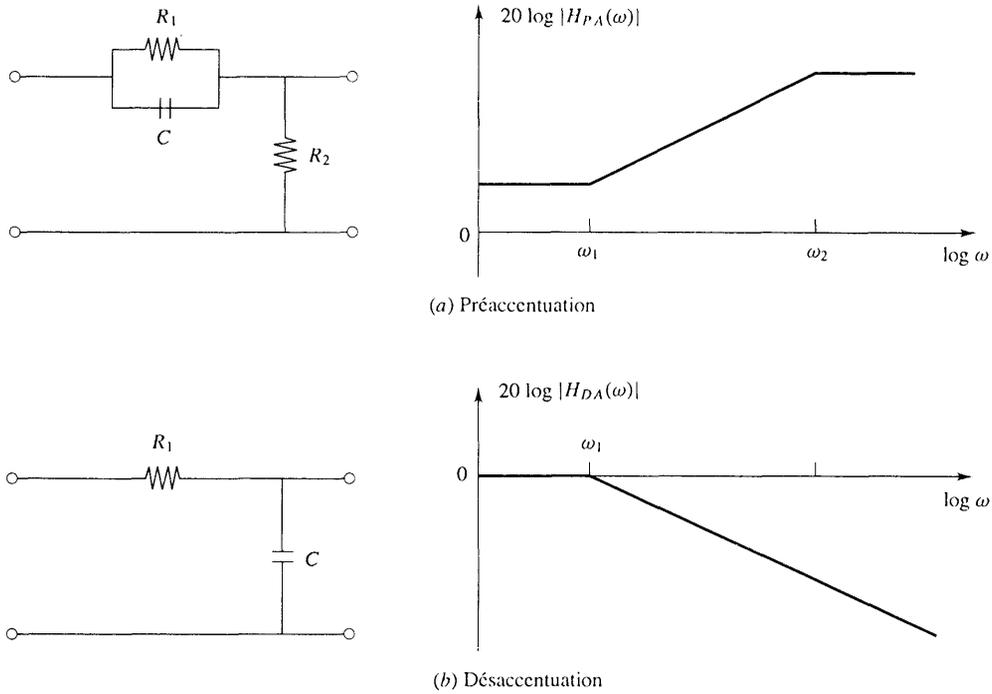


Fig. 7-19

Calculer le facteur de gain en bruit, défini par :

$$\Gamma = \frac{N_s}{N'_s}$$

où N_s est le bruit de sortie sans système de préaccentuation / désaccentuation et N'_s est le bruit de sortie lorsque ce système est installé.

La réponse en fréquence (fonction de transfert) du filtre de préaccentuation a pour expression :

$$H_{PA}(\omega) = K \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$$

où

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \tau_1 = R_1 C \quad \tau_2 = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \approx R_2 C$$

Pour $\omega \ll \omega_2$, où $\omega_2 = 1/\tau_2$, $H_{PA}(\omega)$ a pour approximation :

$$H_{PA}(\omega) = K(1 + j\omega\tau_1) = K \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right) \tag{7.127}$$

où l'on a :

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau_1} \quad \text{et} \quad f_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1} = \frac{1}{2\pi(75)(10^{-6})} = 2,1(10^3) \text{ Hz} = 2,1 \text{ kHz}$$

La réponse en fréquence du filtre de désaccentuation a pour expression :

$$H_{DA}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_1} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_1)} \tag{7.128}$$

On remarquera que

$$H_{PA}(\omega)H_{DA}(\omega) \approx K \quad \text{pour } \omega \ll \omega_2$$

Ce qui est la condition à remplir pour éviter la distorsion.

Lorsque le système est utilisé, le bruit en sortie N_s est modifié [relation (7.60)] :

$$\begin{aligned} N'_s &= \frac{1}{A_p^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \omega^2 \eta |H_{DA}(\omega)| d\omega \\ &= \frac{\eta}{A_p^2 \pi} \int_0^W \frac{\omega^2}{1 + (\omega/\omega_1)^2} d\omega \\ &= \frac{\eta \omega_1^3}{A_p^2 \pi} \left(\frac{W}{\omega_1} - \arctan \frac{W}{\omega_1} \right) \end{aligned}$$

Sans filtre de désaccentuation, le bruit en sortie a pour expression :

$$N_s = \frac{\eta W^3}{3A_p^2 \pi}$$

Ainsi :

$$\Gamma = \frac{N_s}{N'_s} = \frac{1}{3} \frac{(W/\omega_1)^3}{W/\omega_1 - \arctan(W/\omega_1)} \quad (7.129)$$

Si $f_1 = 2,1$ kHz et $B = 15$ kHz, alors $W/\omega_1 = B/f_1 = 7,14$ et Γ a pour valeur :

$$\Gamma = \frac{1}{3} \frac{(7,14)^3}{7,14 - 1,43} = 21,25 (= 13,27 \text{ dB}) \quad (7.130)$$

On remarquera que la relation (7.130) néglige l'effet d'augmentation de la puissance du signal émis qui résulte de la préaccentuation de la partie haute du spectre BF transmis. L'amélioration effective apportée par cette méthode en tenant compte de la remarque précédente est évaluée dans le problème qui suit.

7.16. On suppose qu'un signal $X(t)$ a pour densité spectrale de puissance :

$$S_{XX}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (\omega/\omega_1)^2} & |\omega| < 2\pi(15)(10^3) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

où $\omega_1 = 2\pi(2,1)(10^3)$ rad/s.

- Déterminer la différence entre niveaux de modulation avec et sans préaccentuation à puissance de modulation constante.
- Evaluer le gain net en rapport signal sur bruit obtenu dans ces conditions.
- Sans préaccentuation, la puissance du signal modulant a pour expression :

$$S_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{1}{1 + (\omega/\omega_1)^2} d\omega = \frac{\omega_1}{\pi} \arctan \frac{W}{\omega_1}$$

Avec préaccentuation, en tenant compte de la relation (7.127) du problème 7.15, on obtient :

$$S_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W S_{XX}(\omega) |H_{PA}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W K d\omega = K \frac{W}{\pi}$$

S'il faut que la puissance du signal modulant reste constante, on doit assurer :

$$K = \frac{\arctan(W/\omega_1)}{W/\omega_1}$$

Avec $\beta = 15$ kHz et $f_1 = 2,1$ kHz, on obtient :

$$K = \frac{\arctan 7,14}{7,14} = 0,20 (= -6,98 \text{ dB})$$

- (b) Selon la relation (7.130) du problème 7.15, le facteur de gain en bruit avec préaccentuation / désaccentuation vaut 13,27 dB. Il nous faut cependant réduire le niveau de modulation de 6,98 dB, ce qui ramène le gain en bruit du système à une valeur nette de $13,27 - 6,98 = 6,29$ dB.

PROBABILITÉ D'ERREUR, MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

- 7.17. Expliciter le test suivant le critère du maximum de vraisemblance énoncé par la relation (7.71), c'est-à-dire :

$$\Lambda(z) = \frac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

Une décision raisonnable au niveau du récepteur consiste à choisir l'hypothèse H_1 si la probabilité *a posteriori* $P(s_1|z)$ est supérieure à la probabilité *a posteriori* $P(s_2|z)$. Dans le cas contraire, on choisit l'hypothèse H_2 (voir problème 5.8), soit :

$$P(s_1|z) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} P(s_2|z) \quad (7.131)$$

ou encore :

$$\frac{P(s_1|z)}{P(s_2|z)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} 1 \quad (7.132)$$

Le critère de décision de la relation (7.132) est appelé *maximum a posteriori* (MAP).

L'expression de la règle de Bayes (relation 5.24), dans le cas d'une fonction continue de densité de probabilité (relation 5.46), a la forme suivante :

$$P(s_i|z) = \frac{f(z|s_i)P(s_i)}{f(z)} \quad i = 1, 2 \quad (7.133)$$

où $f(z|s_i)$ est la densité de probabilité conditionnelle pour que l'échantillon z reçu appartienne à la classe s_i . En invoquant la relation (7.133), la relation ci-dessus devient :

$$f(z|s_1)P(s_1) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} f(z|s_2)P(s_2) \quad (7.134)$$

soit

$$\Lambda(z) = \frac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

- 7.18. Démontrer la relation (7.73), à savoir que :

$$z(T) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

En appliquant les relations (7.76a) et (7.76b), le critère du maximum de vraisemblance peut s'écrire comme suit :

$$\Lambda(z) = \frac{f(z|s_1)}{f(z|s_2)} = \frac{e^{-(z-a_1)^2/(2\sigma_{n_s}^2)}}{e^{-(z-a_2)^2/(2\sigma_{n_s}^2)}} = e^{z(a_1-a_2)/\sigma_{n_s}^2 - (a_1^2-a_2^2)/(2\sigma_{n_s}^2)}$$

d'où la définition du test de vraisemblance :

$$e^{z(a_1-a_2)/\sigma_{n_s}^2 - (a_1^2-a_2^2)/(2\sigma_{n_s}^2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \quad (7.135)$$

L'inégalité (7.135) est satisfaite par toute transformation monotone croissante (ou décroissante). En prenant le logarithme naturel des deux membres, on obtient :

$$\frac{z(a_1 - a_2)}{\sigma_{n_s}^2} - \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{(2\sigma_{n_s}^2)} \frac{H_1}{H_2} \ln \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \quad (7.136)$$

Lorsque $P(s_1) = P(s_2)$,

$$\ln \frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \ln 1 = 0$$

La relation (7.136) permet d'écrire que :

$$z \geq \frac{H_1}{H_2} \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{2(a_1 - a_2)} = \frac{a_1 + a_2}{2} = \lambda_0 \quad (7.137)$$

7.19. Vérifier que le seuil λ_0 défini par la relation (7.137) assure une probabilité d'erreur minimale lorsque $P(s_1) = P(s_2)$.

On suppose que le seuil est réglé à la valeur λ (figure 7-20). Selon la relation (7.69), on a :

$$\begin{aligned} P_e &= P(H_2|s_1)P(s_1) + P(H_1|s_2)P(s_2) \\ &= P(s_1) \int_{-\lambda}^{\lambda} f(z|s_1) dz + P(s_2) \int_{\lambda}^{\infty} f(z|s_2) dz \\ &= P(s_1) \int_{-\infty}^{\lambda} f(z|s_1) dz + P(s_2) \left[1 - \int_{-\infty}^{\lambda} f(z|s_2) dz \right] \\ &= P(s_2) + \int_{-\infty}^{\lambda} [P(s_1)f(z|s_1) - P(s_2)f(z|s_2)] dz \end{aligned}$$

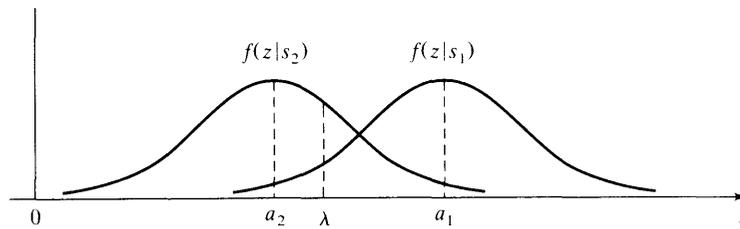


Fig. 7-20

Pour trouver le seuil λ_0 qui minimise la probabilité d'erreur P_e , on impose :

$$\frac{dP_e}{d\lambda} = 0$$

ce qui donne :

$$P(s_1)f(\lambda_0|s_1) = P(s_2)f(\lambda_0|s_2) \quad (7.138)$$

soit

$$\frac{f(\lambda_0|s_1)}{f(\lambda_0|s_2)} = \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \quad (7.139)$$

En invoquant les relations (7.76a) et (7.76b), on obtient :

$$\frac{f(\lambda_0|s_1)}{f(\lambda_0|s_2)} = \frac{e^{-(\lambda_0 - a_1)^2 / (2\sigma_{n_s}^2)}}{e^{-(\lambda_0 - a_2)^2 / (2\sigma_{n_s}^2)}} = \frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

ou encore :

$$e^{\lambda_0(a_1 - a_2)/\sigma_{n_s}^2 - (a_1^2 - a_2^2)/(2\sigma_{n_s}^2)} = \frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\lambda_0(a_1 - a_2)}{\sigma_{n_s}^2} + \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{(2\sigma_{n_s}^2)} = \ln \frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

D'où l'on tire :

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{\sigma_{n_s}^2}{a_1 - a_2} \ln \frac{P(s_2)}{P(s_1)} \tag{7.140}$$

Lorsque $P(s_1) = P(s_2)$, cette relation se réduit à :

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

7.20. Un signal binaire bipolaire $s_i(t)$ prend les valeurs $+A$ et $-A$ volts sur l'intervalle de temps $0, T$. Le filtre linéaire (figure 7-11) est dans le cas présent un intégrateur (figure 7-21). Il s'agit d'un système de détection-intégration. En supposant que $\sigma_{n_s}^2 = 0,1$, déterminer le seuil optimal de détection λ_0 lorsque la probabilité de détection a les valeurs suivantes :

- (a) $P(s_1) = 0,5$
- (b) $P(s_1) = 0,7$
- (c) $P(s_1) = 0,2$

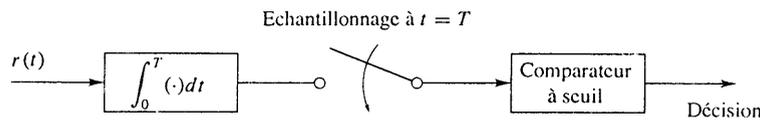


Fig. 7-21 Détection-intégration

Le signal reçu a pour expression :

$$r(t) = s_i(t) + n(t)$$

où

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = +A & 0 \leq t \leq T \text{ pour } 1 \\ s_2(t) = -A & 0 \leq t \leq T \text{ pour } 0 \end{cases}$$

Le signal de sortie de l'intégrateur en fin de période T a pour valeur :

$$z(T) = \int_0^T [s_i(t) + n(t)] dt = \begin{cases} a_1 + n_s & \text{pour } 1 \\ a_2 + n_s & \text{pour } 0 \end{cases} \tag{7.141}$$

où

$$a_1 = \int_0^T A dt = AT \quad a_2 = \int_0^T (-A) dt = -AT \tag{7.142}$$

et où n_s est une variable aléatoire définie comme suit :

$$n_s = \int_0^T n(t) dt \tag{7.143}$$

- (a) $P(s_1) = P(s_2) = 0,5$.

D'après les relations (7.74) et (7.142), le seuil optimal a pour valeur :

$$\lambda_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{AT + (-AT)}{2} = 0$$

- (b) $P(s_1) = 0,7$ et $P(s_2) = 0,3$.

D'après les relations (7.140) et (7.142), le seuil optimal a pour valeur :

$$\lambda_0 = \frac{0,1}{2AT} \ln \frac{0,3}{0,7} = -\frac{0,04}{AT}$$

- (c)
- $P(s_1) = 0,2$
- et
- $P(s_2) = 0,8$
- .

D'après les relations (7.140) et (7.142), le seuil optimal a pour valeur :

$$\lambda_0 = \frac{0,1}{2AT} \ln \frac{0,8}{0,2} = \frac{0,07}{AT}$$

7.21. Montrer que la probabilité d'erreur P_e du système binaire étudié dans le problème 7.20 a pour expression :

$$P_e = Q \left(\sqrt{\frac{2A^2T}{\eta}} \right) \quad (7.144)$$

D'après la relation (7.143), on a :

$$n_s = \int_0^T n(t) dt$$

Comme le bruit de sortie n_s résulte du traitement linéaire d'une fonction élémentaire d'un processus gaussien, ce bruit est lui-même une variable aléatoire gaussienne. On a donc :

$$E[n_s] = E \left[\int_0^T n(t) dt \right] = \int_0^T E[n(t)] dt = 0 \quad (7.145)$$

Comme $n(t)$ a une valeur moyenne nulle, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{n_s}^2 &= E[n_s^2] = E \left[\left[\int_0^T n(t) dt \right]^2 \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(\tau)] dt d\tau \end{aligned}$$

Comme $n(t)$ est un bruit blanc, on a (relation 6.63) :

$$E[n(t)n(\tau)] = \frac{\eta}{2} \delta(t - \tau)$$

ainsi que

$$\sigma_{n_s}^2 = \int_0^T \int_0^T \frac{\eta}{2} \delta(t - \tau) dt d\tau = \frac{\eta}{2} \int_0^T d\tau = \frac{\eta T}{2} \quad (7.146)$$

En utilisant les relations (7.80) et (7.142), on obtient :

$$P_e = Q \left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{n_s}} \right) = Q \left(\frac{AT}{\sqrt{\eta T/2}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{2A^2T}{\eta}} \right)$$

7.22. On suppose que le système binaire du problème 7.20 présente les caractéristiques suivantes : $P(s_1) = P(s_2) = 1/2$, $\eta/2 = 10^{-9}$ W/Hz, $A = 10$ mV et le débit est de 10^4 bits/s (bauds).

- (a) Calculer la probabilité d'erreur P_e du système.
 (b) Si le débit passe à 10^5 bauds, quelle doit être la valeur de A pour que P_e ait la même valeur qu'en (a)?

- (a) On peut écrire que :

$$\frac{2A^2T}{\eta} = \frac{A^2T}{\eta/2} = \frac{(0,01)^2(10^{-4})}{10^{-9}} = 10$$

D'après la relation (7.144) et la table C-1, on obtient :

$$P_e = Q \left(\sqrt{\frac{2A^2T}{\eta}} \right) = Q(\sqrt{10}) = 7,8(10^{-4})$$

- (b) On a dans ce cas :

$$\frac{A^2T}{\eta/2} = \frac{A^2(10^{-5})}{10^{-9}} = 10$$

Ce qui nous donne la valeur de A :

$$A = 31,62 (10^{-3}) \text{ V} = 31,62 \text{ mV}$$

FILTRE ADAPTÉ ET CORRÉLATEUR

7.23. Démontrer la relation (7.82), à savoir que :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \leq \frac{2E}{\eta}$$

où E est l'énergie du signal d'entrée $s(t)$ et $\eta/2$ la densité spectrale de puissance du bruit d'entrée (figure 7-11).

Soit $H(\omega)$ la réponse en fréquence du filtre linéaire et $a(t)$ le signal en sortie du filtre. D'après la relation (1.85), on a :

$$a(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega T} d\omega \quad (7.147)$$

où $S(\omega) = \mathcal{F}[s(t)]$. La puissance de bruit en sortie N_s a pour expression (relation 6.53) :

$$N_s = E[n_s^2(t)] = \frac{\eta}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (7.148)$$

Le rapport signal sur bruit en sortie a donc pour expression :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{[1/(2\pi)^2] \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega T} d\omega \right|^2}{(\eta/2) [1/(2\pi)] \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} \quad (7.149)$$

On peut appliquer l'*inégalité de Schwarz* à cette relation, ce qui donne :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\omega) f_2(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(\omega)|^2 d\omega \quad (7.150)$$

L'égalité se produit lorsque :

$$f_1(\omega) = k f_2^*(\omega) \quad (7.151)$$

où k est une constante arbitraire et * indique la conjugaison complexe.

Si l'on pose :

$$f_1(\omega) = H(\omega) \quad f_2(\omega) = S(\omega) e^{j\omega T}$$

on peut alors écrire :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega T} d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (7.152)$$

En portant la relation (7.152) dans la relation (7.149), on obtient :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \leq \frac{2}{\eta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{2E}{\eta}$$

où

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega$$

expression qui représente l'énergie du signal $s(t)$.

- 7.24. Quel est le signal en sortie du filtre adapté à un signal d'entrée $s(t)$ rectangulaire d'amplitude A et de durée T ; calculer la valeur maximale du rapport $(S/N)_s$.

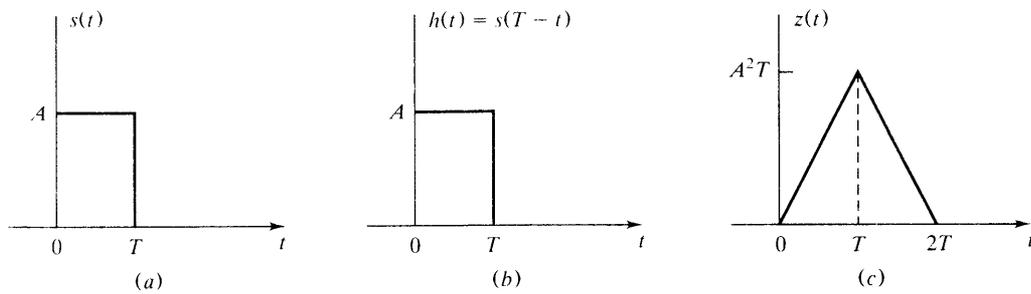


Fig. 7-22

Pour le signal $s(t)$ donné, représenté sur la figure 7-22(a), la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre adapté a pour expression (relation 7.85) :

$$h(t) = s(T - t) = s(t)$$

qui est rigoureusement identique au signal d'entrée, comme le montre la figure 7-22(b). On en déduit le signal de sortie :

$$z(t) = s(t) * h(t) = \begin{cases} A^2 t & 0 \leq t \leq T \\ -A^2 t + 2A^2 T & T \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

que représente la figure 7-22(c).

On remarquera que $z(T) = A^2 T$ est la valeur maximale de $z(t)$. D'après la relation (7.83), la valeur maximale de $(S/N)_s$ a pour expression :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{s_{\max}} = \frac{2E}{\eta}$$

où

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_0^T A^2 dt = A^2 T$$

d'où il s'ensuit que :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{s_{\max}} = \frac{2A^2 T}{\eta} \quad (7.153)$$

- 7.25. Reprendre le problème 7.24 dans le cas où l'on utilise un réseau RC — figure 7-23(a) — au lieu d'un filtre adapté.

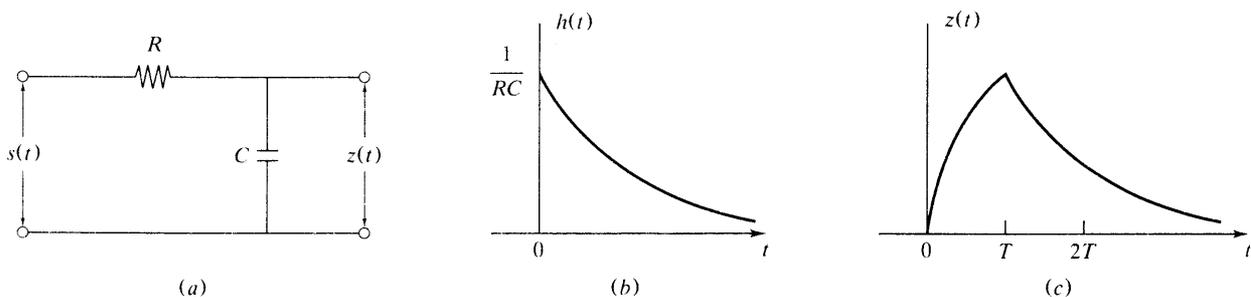


Fig. 7-23

D'après le problème 1.46, la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la réponse en fréquence $H(\omega)$ du filtre RC ont pour expression :

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} u(t)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Le signal de sortie $z(t)$ a donc pour expression :

$$z(t) = s(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A(1 - e^{-t/(RC)}) & 0 \leq t \leq T \\ A(1 - e^{-T/(RC)})e^{-(t-T)/(RC)} & t > T \end{cases}$$

La figure 7-23(c) représente ce signal. Remarquons que le maximum du signal $z(t)$ est atteint lorsque $t = T$ et qu'il a pour valeur :

$$z(T) = A(1 - e^{-T/(RC)})$$

La puissance moyenne du bruit en sortie a pour expression :

$$N_s = E[n_s^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2} \frac{d\omega}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{\eta}{4RC} \quad (7.154)$$

d'où l'on déduit l'expression du rapport signal sur bruit en sortie :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{z^2(T)}{N_s} = \frac{4A^2 T (1 - e^{-T/(RC)})^2}{\eta T/(RC)} \quad (7.155)$$

On cherche donc à maximiser $(S/N)_s$ vis-à-vis de RC . En posant $x = T/(RC)$ ainsi que :

$$g(x) = \frac{(1 - e^{-x})^2}{x}$$

et en imposant :

$$g'(x) = \frac{2xe^{-x}(1 - e^{-x}) - (1 - e^{-x})^2}{x^2} = 0$$

on obtient :

$$2xe^{-x} = 1 - e^{-x} \quad \text{soit} \quad 1 + 2x = e^x$$

En résolvant cette équation en x , on a :

$$x = \frac{T}{RC} \approx 1,257$$

En portant cette valeur dans la relation (7.155), on obtient :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{s_{\max}} = (0,815) \frac{2A^2 T}{\eta} \quad (7.156)$$

On remarquera qu'en remplaçant le filtre adapté par un circuit RC le rapport signal sur bruit est réduit d'un facteur 0,815, soit 0,89 dB par rapport à celui qu'assure le filtre adapté.

7.26. Calculer la réponse en fréquence $H_0(\omega)$ qui maximise le rapport signal sur bruit en sortie lorsque le bruit en entrée n'est pas blanc.

Soit $H(\omega)$ la réponse en fréquence d'un filtre linéaire. Soit $S_{nn}(\omega)$ le spectre de puissance du bruit d'entrée. En opérant comme au problème 7.23, on voit que le signal de sortie du filtre à l'instant $t = T$ a pour expression :

$$a(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega T} d\omega$$

La puissance de bruit en sortie a pour expression :

$$N_s = E[n_s^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega$$

On en déduit la valeur du rapport signal sur bruit en sortie :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{[1/2\pi] \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega T} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega} \quad (7.157)$$

Pour déterminer la réponse en fréquence qui maximise l'expression (7.17), on applique l'inégalité de Schwarz — relation (7.150) — après avoir posé :

$$f_1(\omega) = \sqrt{S_{nn}(\omega)} H(\omega) \quad f_2(\omega) = \frac{S(\omega) e^{j\omega T}}{\sqrt{S_{nn}(\omega)}}$$

on peut ainsi écrire :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S_{nn}(\omega) e^{j\omega T} d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{S_{nn}(\omega)} d\omega \quad (7.158)$$

L'égalité ayant lieu lorsque :

$$\sqrt{S_{nn}(\omega)} H(\omega) = k \frac{S^*(\omega) e^{-j\omega T}}{\sqrt{S_{nn}(\omega)}} \quad (7.159)$$

En tenant compte de la relation (7.158), la relation (7.157) devient :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{S_{nn}(\omega)} d\omega \quad (7.160)$$

La valeur maximale de $\left(\frac{S}{N}\right)_s$ est atteinte lorsque l'égalité a lieu dans la relation (7.160) ou (7.158). En tenant compte de la relation (7.159), la réponse optimale en fréquence a pour expression :

$$H_s(\omega) = k \frac{S^*(\omega) e^{-j\omega T}}{S_{nn}(\omega)} \quad (7.161)$$

Le filtre optimal défini par la relation (7.161) est appelé *filtre optimal en bruit coloré*.

- 7.27. En se reportant aux relations (7.90) et (7.91) on voit que le rapport signal sur bruit en sortie d'un filtre adapté a pour expression :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{2E_d}{\eta} = \frac{2}{\eta} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \quad (7.162)$$

Supposons que l'on désire que les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ aient la même énergie. Montrer que le choix optimal pour $s_2(t)$, connaissant $s_1(t)$ est le suivant :

$$s_2(t) = -s_1(t) \quad (7.163)$$

et que le rapport signal sur bruit en sortie qui en résulte a pour expression :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{8}{\eta} \int_0^T s_1^2(t) dt = \frac{8E}{\eta} \quad (7.164)$$

où E est l'énergie du signal.

D'après la relation (7.162), on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_s &= \frac{2}{\eta} \int_0^T [s_1^2(t) + s_2^2(t) - 2s_1(t)s_2(t)] dt \\ &= \frac{4E}{\eta} - \frac{4}{\eta} \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt \end{aligned} \quad (7.165)$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient :

$$\left| \int_0^T s_1(t)s_2(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^T s_1^2(t) dt \int_0^T s_2^2(t) dt} = E$$

L'égalité se produit lorsque :

$$s_2(t) = k s_1(t)$$

La condition d'isoénergie des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ impose que $k = \pm 1$, tandis que la maximisation du rapport $(S/N)_s$ impose $k = -1$. Il faut donc assurer :

$$s_2(t) = -s_1(t)$$

En portant cette valeur dans la relation (7.165), il vient :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{4E}{\eta} + \frac{4}{\eta} \int_0^T s_1^2(t) dt = \frac{8E}{\eta}$$

PROBABILITÉ D'ERREUR DES SYSTÈMES DE TRANSMISSION BINAIRES

7.28. Démontrer la relation (7.96), à savoir :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right)$$

D'après la relation (7.95), on a :

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = +A & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = -A & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Ensuite, en invoquant les relations (7.91) et (7.92), on obtient :

$$\begin{aligned} E_d &= \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \\ &= \int_0^T (2A)^2 dt = 4A^2T \end{aligned}$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right)$$

Où $E_b = A^2T$ est l'énergie moyenne par bit. On remarquera que la relation (7.96) est identique à la relation (7.144) que l'on a obtenue en résolvant le problème 7.21.

7.29. Un signal bipolaire $s_i(t)$ est constitué d'impulsions d'amplitude $+1$ V ou -1 V de durée T . Un bruit blanc additif de densité spectrale $\eta/2 = 10^{-5}$ W/Hz s'ajoute au signal. Déterminer le débit maximal transmissible avec une probabilité d'erreur $P_e \leq 10^{-4}$.

D'après la relation (7.96), on a :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{\eta}}\right) \leq 10^{-4}$$

D'après la Table C-1 :

$$Q(x) = 10^{-4} \rightarrow x = 3,71$$

d'où

$$\sqrt{\frac{2A^2T}{\eta}} = \sqrt{\frac{2(1)^2T}{2(10^{-5})}} = 3,71$$

On en extrait la valeur de T :

$$T = (3,71)^2(10^{-5}) = 13,76(10^{-5}) \text{ s}$$

Le débit maximal du signal a donc pour valeur :

$$R = \frac{1}{T} = 7,26(10^3) \text{ bauds} = 7,26 \text{ kbauds}$$

7.30. Démontrer la relation (7.100), à savoir :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right)$$

D'après la relation (7.99), le signal $s_i(t)$ a pour expression :

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_p t & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = A \cos(\omega_p t + \pi) \\ \quad = -A \cos \omega_p t & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

où T vaut un nombre entier de fois $1/f_p$. En invoquant les relations (7.91) et (7.92), on obtient :

$$\begin{aligned} E_d &= \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \\ &= \int_0^T (2A \cos \omega_p t)^2 dt = 2A^2T \end{aligned}$$

Et l'on a donc :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right)$$

où $E_b = A^2T/2$ est l'énergie moyenne du signal par bit.

7.31. Un système de transmission binaire utilise les signaux suivants :

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \sin \frac{\pi t}{T} & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = 0 & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

On suppose que $A = 0,2 \text{ mV}$ et que $T = 2\mu\text{s}$. Un bruit gaussien de densité spectrale $\eta/2 = 10^{-15} \text{ W/Hz}$ s'ajoute au signal. Déterminer la probabilité d'erreur du système lorsque $P(s_1) = P(s_2) = 0,5$.

D'après la relation (7.92), on a :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right)$$

où E_d a pour expression :

$$\begin{aligned} E_d &= \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \\ &= \int_0^T A^2 \sin^2 \frac{\pi t}{T} dt = \frac{A^2 T}{2} \end{aligned}$$

d'où la valeur de $E_d/2\eta$:

$$\frac{E_d}{2\eta} = \frac{A^2 T}{4\eta} = \frac{(2 \times 10^{-4})^2 (2 \times 10^{-6})}{4(2 \times 10^{-15})} = 10$$

D'après la Table C-1, il vient :

$$P_e = Q(\sqrt{10}) = 7,83(10^{-4})$$

7.32. Une transmission utilise un signal binaire ayant pour expression :

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A_1 \sin \frac{\pi t}{T} & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = -s_1(t) & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Déterminer la probabilité d'erreur dans les mêmes conditions qu'au problème 7-31, sauf en ce qui concerne la valeur de A_1 choisie ici de façon que la liaison transmette la même puissance moyenne que le signal du problème 7.31.

Dans le problème 7.31, la puissance moyenne transmise a pour expression :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \left(\frac{A^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (0^2) = \frac{A^2}{4}$$

Dans le cas présent, la puissance moyenne transmise a pour valeur :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2} \left(\frac{A_1^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{A_1^2}{2} \right) = \frac{A_1^2}{2}$$

Pour obtenir la même puissance moyenne, il faut donc que l'amplitude du signal ait pour valeur :

$$A_1 = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{2(10^{-4})}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(10^{-4}) \text{ V} = 0,14 \text{ mV}$$

D'après la relation (7.92), on a :

$$P_e = Q \left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}} \right)$$

où

$$\begin{aligned} E_d &= \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \\ &= \int_0^T 4A_1^2 \sin^2 \frac{\pi t}{T} dt = 2A_1^2 T \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\frac{E_d}{2\eta} = \frac{A_1^2 T}{\eta} = \frac{(\sqrt{2} \times 10^{-4})^2 (2 \times 10^{-6})}{2 \times 10^{-15}} = 20$$

D'après le tableau C-1 :

$$P_e = Q(\sqrt{20}) = 3,88(10^{-6})$$

7.33. Démontrer la relation (7.102), c'est-à-dire :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$$

où $E_b = A^2 T/2$ est l'énergie moyenne par bit du signal.

D'après la relation (7.101), le signal a pour expression :

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_1 t & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = A \cos \omega_2 t & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

D'où l'on tire :

$$s_1(t) - s_2(t) = A \cos \omega_1 t - A \cos \omega_2 t$$

E_d a pour expression :

$$\begin{aligned} E_d &= \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \\ &= \int_0^T A^2 (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)^2 dt \\ &= A^2 \int_0^T (\cos^2 \omega_1 t + \cos^2 \omega_2 t - 2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t) dt \\ &= A^2 T \left[1 + \frac{\sin 2\omega_1 T}{4\omega_1 T} + \frac{\sin 2\omega_2 T}{4\omega_2 T} - \frac{\sin 2(\omega_1 - \omega_2)T}{2(\omega_1 - \omega_2)T} - \frac{\sin 2(\omega_1 + \omega_2)T}{2(\omega_1 + \omega_2)T} \right] \end{aligned}$$

Si l'on suppose que $\omega_1 T \gg 1$, $\omega_2 T \gg 1$ et $(\omega_1 - \omega_2)T \gg 1$, il vient :

$$E_d \approx A^2 T$$

et l'on obtient :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$$

Problèmes supplémentaires

7.34. Ecrire les relations (7.19) et (7.26) en fonction de $\gamma_p = S_p/(\eta B)$ où S_p est la puissance crête de l'enveloppe du signal BLD ou AM.

$$\text{Réponse : BLD : } \left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{1}{2} S_X \gamma_p; \quad \text{AM : } \left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{1}{8} S_X \gamma_p.$$

7.35. Un récepteur AM reçoit un signal sinusoïdal de fréquence fixe dont l'index de modulation a pour valeur $\mu = 0,3$. Ce signal a pour expression $20 \cos 1000\pi t$.

- (a) Calculer le rapport signal sur bruit en sortie en fonction du rapport signal sur bruit d'une transmission en bande de base.
 (b) Déterminer l'amélioration, en dB, du rapport signal sur bruit en sortie que l'on peut attendre si la valeur de μ passe de 0,3 à 0,7.

$$\text{Réponses : (a) } \left(\frac{S}{N}\right)_s = 0,043\gamma, \quad \text{(b) } 6,6 \text{ dB}$$

7.36. Un système AM avec détecteur d'enveloppe travaille au seuil théorique. Calculer le gain en puissance (en dB) nécessaire à la transmission pour obtenir un rapport $(S/N)_s = 30$ dB en modulation sinus avec $\mu = 1$.

Réponse : ≈ 22 dB

- 7.37. Un système AM avec détecteur d'enveloppe présente un rapport $(S/N)_s = 30$ dB; sa bande passante est de 8 kHz et l'index de modulation μ est égal à 1. Si l'on élargit l'ensemble des bandes passantes du système de façon homothétique, toutes choses égales par ailleurs, quelle est la plus grande valeur utilisable pour B ?

Réponse : 1,2 MHz

- 7.38. Quel est le gain α_d d'un détecteur en BLU?

Réponse : $\alpha_d = 1$

- 7.39. Calculer le rapport signal sur bruit en sortie, en modulation de phase (PM), pour une modulation à fréquence pure.

Réponse : $\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{1}{2}\beta^2\gamma$

- 7.40. Quel est le gain de détection α_d d'un système FM pour lequel $\beta = 2$?

Réponse : $\alpha_d = 36$

- 7.41. Montrer qu'en modulation de fréquence par une sinusoïde pure, la FM est supérieure à la PM d'un facteur 3 en ce qui concerne le rapport signal sur bruit en sortie.

Indication : Utiliser le résultat du problème 7.39 ainsi que la relation (7.123).

- 7.42. Soit un signal modulant $X(t) = \cos^3 \omega_m t$, montrer que le mode PM est supérieur au mode FM d'un facteur 2,25 du point de vue du rapport signal sur bruit en sortie.

Indication : Utiliser les relations (7.56) et (7.62).

- 7.43. On considère une transmission dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$S_X = E[X^2(t)] = \frac{1}{2} \quad B = 10 \text{ kHz} \quad \frac{\eta}{2} = 10^{-12} \text{ W/Hz}$$

Perte de transmission = 70 dB

Calculer la puissance nécessaire S_T à transmettre pour obtenir un rapport signal sur bruit en sortie $\left(\frac{S}{N}\right)_s = 40$ dB dans les cas de modulation suivants :

(a) : BLU, (b) : AM avec $\mu = 1$ et $\mu = 0,5$, (c) : PM avec $k_p = \pi$, (d) : FM avec $D = 1$ et $D = 5$.

Réponse : (a) : BLU; $S_T = 1$ kW, (b) : AM; $\mu = 1$, $S_T = 3$ kW, $\mu = 0,5$, $S_T = 9$ kW, (c) : PM; $S_T = 202,6$ W, (d) : FM; $D = 1$, $S_T = 667$ W, $D = 5$, $S_T = 26,7$ W.

- 7.44. Une liaison achemine un signal binaire $s_i(t)$, $i = 1, 2$ dont la valeur à l'entrée du détecteur a pour expression :

$$z(T) = a_i + n_s$$

où $a_1 = +1$, $a_2 = -1$ et n_s présente une répartition uniforme, avec des densités de probabilité conditionnelles du signal brut z d'expressions :

$$f(z|s_1) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -0,1 \leq z \leq 1,9 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$f(z|s_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1,9 \leq z \leq 0,1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Trouver la probabilité d'erreur en détection du système dans le cas où les signaux sont équiprobables et où l'on utilise un seuil de décision optimal.

Réponse : $P_e = 0,05$

- 7.45.** Une liaison binaire transmet des signaux équiprobables $s_i(t)$, $i = 1, 2$. Le signal à l'entrée du récepteur a pour expression :

$$z(T) = a_i(T) + n_s(T)$$

où $a_1(T) = +1$, $a_2(T) = -1$ et $n_s(T)$ est une variable aléatoire gaussienne à moyenne nulle de variance égale à 0,1.

- (a) Déterminer le critère de décision optimal pour le détecteur.
 (b) Calculer la probabilité d'erreur.

Réponse : (a) $\underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} 0$ (b) $P_e = 7,8(10^{-4})$

- 7.46.** Une liaison binaire transmet les signaux $s_i(t)$, $i = 1, 2$ avec les probabilités $P(s_1) = 0,75$ et $P(s_2) = 0,25$. Le signal brut avant détection a pour expression :

$$z(T) = a_i(T) + n_s(T)$$

où $a_1(T) = 1$, $a_2(T) = 0$ et $n_s(T)$ est une variable aléatoire gaussienne à moyenne nulle de variance égale à 0,1.

- (a) Déterminer le critère de décision optimal pour le détecteur.
 (b) Calculer la probabilité d'erreur.

Indication : Utiliser la relation (7.140) du problème 7.19 ainsi que la relation (7.69).

Réponse : (a) $\underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} 0,61$ (b) $P_e = 0,0883$

- 7.47.** Déterminer le signal en sortie du filtre adapté sur l'intervalle de temps $(0, T)$ de l'impulsion

$$s(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Réponse : $e^{-T} \sin t$

- 7.48.** Démontrer les relations (7.94) et (7.98).

Indication : Utiliser les relations (7.91) et (7.92).

- 7.49.** On veut transmettre 2,08 Mb/s avec une probabilité d'erreur $P_e \leq 10^{-6}$. Le spectre de puissance du bruit sur le canal a pour densité $\eta/2 = 10^{-11}$ W/Hz. Déterminer la puissance nécessaire à l'entrée du récepteur si l'on utilise un codage unipolaire ou bipolaire.

Réponse : 0,47 mW

- 7.50.** Dans un système PSK, les signaux reçus $s_1(t) = A \cos \omega_p t$ et $s_2(t) = -A \cos \omega_p t$ sont traités par détection cohérente au moyen d'un filtre adapté. La valeur de A est de 20 mV et le débit est de 1 Mb/s. On suppose que la densité spectrale de puissance du bruit a pour valeur $\eta/2 = 10^{-11}$ W/Hz. Calculer la probabilité d'erreur P_e .

Réponse : $P_e = 3,9(10^{-6})$

Information et codage

8.1 INTRODUCTION

Le but essentiel d'un système de communication est de transmettre des informations entre deux points avec le maximum d'efficacité et de fiabilité. Nous avons examiné dans les chapitres qui précèdent plusieurs méthodes pour atteindre ce résultat au moyen de signaux électriques.

La théorie de l'information permet d'évaluer quantitativement le contenu d'un signal porteur d'un message et de déterminer la capacité d'un système de communication à acheminer des informations entre le site de transmission et le site de réception. Grâce au codage, sujet essentiel de la théorie de l'information, on peut réduire les redondances du message utile de façon à exploiter au mieux les performances des canaux de transmission disponibles. En revanche, l'introduction de redondances systématiques dans le signal transmis (support du message) permet de fiabiliser les liaisons.

Nous allons passer brièvement en revue, au cours de ce chapitre, les quelques principes de base de la théorie de l'information et des techniques de codage.

8.2 MESURE DE L'INFORMATION

A. Sources d'information

Une source d'information est un objet qui produit un événement dont le résultat aléatoire dépend d'une loi de répartition probabiliste. En pratique, la source d'information d'un système de communication produit des messages de caractère analogique ou discret. Nous étudierons dans ce chapitre les sources discrètes, puisque les sources analogiques peuvent être discrétisées par échantillonnage et quantification, comme nous l'avons vu au chapitre 4. Une source d'information discrète ne peut délivrer qu'un ensemble fini de symboles. L'ensemble des symboles transmis par la source est appelé *alphabet source*; chaque élément est appelé *symbole* ou *lettre*.

Les sources d'information se classent en deux catégories, suivant qu'elles sont à mémoire ou sans mémoire. Une source avec mémoire émet des symboles dont chacun dépend du précédent. Une source sans mémoire émet des symboles dont chacun est indépendant du précédent.

Une *source discrète sans mémoire* (SDSM) se définit par sa liste de symboles, assortie des probabilités relatives à chaque symbole, et son débit.

B. Contenu informatif d'une source discrète sans mémoire

La quantité d'information contenue dans un événement est étroitement liée au degré de certitude que l'on attribue à cette information. Si un événement est certain (sa probabilité étant égale à 1), il faut reconnaître que sa réalisation n'apporte aucune information. Une mesure mathématique de l'information doit donc prendre en compte la probabilité d'occurrence des événements attendus et satisfaire aux axiomes suivants :

1. L'information est proportionnelle à l'incertitude du résultat attendu.
2. Les informations correspondant aux réalisations d'événements indépendants ont un caractère additif.

1. Contenu informatif d'un symbole

Considérons une SDSM, que nous appellerons X , transmettant un alphabet $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Le *contenu informatif* d'un symbole ou plus simplement l'*information* que contient un symbole x_i , notée $I(x_i)$, a pour définition :

$$I(x_i) = \log_b \frac{1}{P(x_i)} = -\log_b P(x_i) \quad (8.1)$$

où $P(x_i)$ est la probabilité d'occurrence du symbole x_i . On voit que $I(x_i)$ possède les propriétés suivantes :

$$I(x_i) = 0 \quad \text{pour } P(x_i) = 1 \quad (8.2)$$

$$I(x_i) \geq 0 \quad (8.3)$$

$$I(x_i) > I(x_j) \quad \text{si } P(x_i) < P(x_j) \quad (8.4)$$

$$I(x_i x_j) = I(x_i) + I(x_j) \quad \text{si } x_i \text{ et } x_j \text{ sont indépendants} \quad (8.5)$$

L'unité dans laquelle on mesure $I(x_i)$ est le bit (*binary unit*) lorsque $b = 2$, le hartley si $b = 10$ et le nat (*natural unit*) si $b = e$. On utilise de façon très générale le standard $b = 2$. L'unité binaire, abrégée en «b», est donc une mesure de l'information et ne doit pas être confondue avec le *bit* (*binary digit*) que nous avons pratiqué jusqu'ici. Les conversions entre ces unités s'effectuent au moyen de la formule suivante :

$$\log_2 a = \frac{\ln a}{\ln 2} = \frac{\log a}{\log 2} \quad (8.6)$$

2. Contenu informatif moyen ou entropie

On transmet habituellement sur un canal de communication des séquences de symboles de grande longueur émises par la source d'information. On s'intéresse donc plus au contenu moyen d'information produit par une source qu'au contenu informatif d'un seul symbole.

La valeur moyenne de $I(x_i)$ sur un alphabet de la source X composé de m symboles a pour expression :

$$\begin{aligned} H(X) &= E[I(x_i)] = \sum_{i=1}^m P(x_i) I(x_i) \\ &= - \sum_{i=1}^m P(x_i) \log_2 P(x_i) \quad \text{b/symbole} \end{aligned} \quad (8.7)$$

La quantité $H(X)$ est appelée *entropie* de la source X . Elle est une mesure de l'*information moyenne par symbole de la source*. L'entropie $H(X)$ de la source peut être considérée comme la part globale d'incertitude de la source X réduite au moyen de l'alphabet utilisé par la source.

On notera qu'une source binaire X qui produit des symboles 0 et 1 équiprobables a pour entropie :

$$H(X) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1 \text{ b/symbole} \quad (8.8)$$

L'entropie $H(X)$ de la source satisfait à la relation suivante :

$$0 \leq H(X) \leq \log_2 m \quad (8.9)$$

où m est la dimension (nombre de symboles) de l'alphabet utilisé par la source X (problème 8.4). La borne inférieure correspond à la certitude que l'on a lorsqu'un symbole a une probabilité d'occurrence $P(x_i) = 1$ tandis que $P(x_j) = 0$ pour $j \neq i$, ce qui veut dire que X transmet le même symbole x_i en permanence. La limite supérieure correspond à l'incertitude maximale que l'on a vis-à-vis de la source lorsque $P(x_i) = 1/m$ pour tout i , c'est-à-dire lorsque tous les symboles qu'est susceptible de transmettre X sont équiprobables.

3. Débit d'information

Si le débit de transmission des symboles de la source X a pour valeur r (symboles/seconde), le débit d'information R de la source X a pour expression :

$$R = r H(X) \quad \text{b/s} \quad (8.10)$$

8.3 CANAUX DISCRETS SANS MÉMOIRE

A. Représentation d'un canal de transmission

On appelle canal de transmission le support ou le milieu qui achemine le message entre émetteur et récepteur. Un *canal discret sans mémoire* (CDSM) peut être représenté par un modèle statistique d'entrée X et de sortie Y (figure 8-1). A chaque période d'échantillonnage, on fournit au canal un symbole appartenant à X et celui-ci délivre un symbole appartenant à Y . Le canal est dit « discret » lorsque les alphabets de X et de Y sont finis. Il est dit « sans mémoire » lorsque le symbole de sortie fourni par le canal ne dépend que du dernier symbole reçu en entrée, indépendamment de tous les symboles d'entrée précédents.

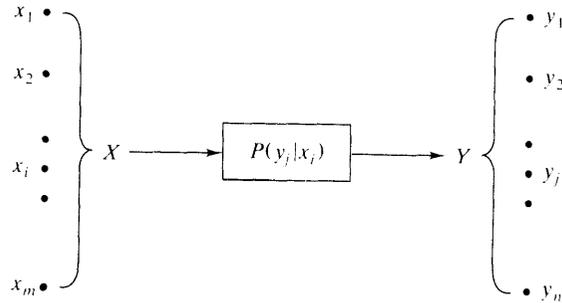


Fig. 8-1 Canal discret sans mémoire

La figure 8-1 représente un CDSM à m entrées et n sorties. L'entrée X se compose de m symboles x_1, x_2, \dots, x_m . Les probabilités *a priori* $P(x_i)$ de ces symboles sont supposées connues. La sortie se compose de n symboles y_1, y_2, \dots, y_n . Chaque correspondance possible entrée/sortie est définie par une probabilité conditionnelle $P(y_j|x_i)$ d'obtenir y_j en sortie de canal lorsque x_i a été transmis à l'entrée du canal. On l'appelle *probabilité de transition du canal*.

B. Matrice de transition d'un canal

On définit un canal de façon complète en spécifiant l'ensemble de ses probabilités de transition. Le canal représenté sur la figure 8-1 est donc totalement défini par la matrice des probabilités de transition $[P(Y|X)]$ qui a pour expression :

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & P(y_2|x_1) & \dots & P(y_n|x_1) \\ P(y_1|x_2) & P(y_2|x_2) & \dots & P(y_n|x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(y_1|x_m) & P(y_2|x_m) & \dots & P(y_n|x_m) \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

La matrice $[P(Y|X)]$ est appelée la *matrice du canal*. Comme chaque symbole appliqué à l'entrée de la voie produit un symbole en sortie, la somme des éléments d'une ligne de la matrice est égale à 1, soit :

$$\sum_{j=1}^n P(y_j|x_i) = 1 \quad \text{pour tout } i \quad (8.12)$$

Si maintenant on représente l'ensemble des probabilités d'entrée par une matrice ligne :

$$[P(X)] = [P(x_1) \quad P(x_2) \quad \dots \quad P(x_m)] \quad (8.13)$$

Et si l'on représente les probabilités de sortie par une autre matrice ligne :

$$[P(Y)] = [P(y_1) \quad P(y_2) \quad \dots \quad P(y_n)] \quad (8.14)$$

on obtient la relation matricielle :

$$[P(Y)] = [P(X)][P(Y|X)] \quad (8.15)$$

Si l'on représente $P(X)$ sous forme d'une matrice diagonale :

$$[P(X)]_d = \begin{bmatrix} P(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(x_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P(x_m) \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

On a alors la relation :

$$[P(X,Y)] = [P(X)]_d [P(Y|X)] \quad (8.17)$$

où l'élément (i, j) de la matrice $[P(X,Y)]$ est de la forme $P(x_i, y_j)$. La matrice $[P(X,Y)]$ est appelée *matrice des probabilités conjointes*, l'élément $P(x_i, y_i)$ étant la probabilité conjointe de transmettre x_i et de recevoir y_j .

C. Canaux remarquables

1. Canal sans perte

Si la matrice d'un canal ne possède qu'un élément non nul par colonne, on dit qu'il s'agit d'un *canal sans perte*. La figure 8-2 représente un canal sans perte. Sa matrice a pour expression :

$$[P(X|Y)] = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

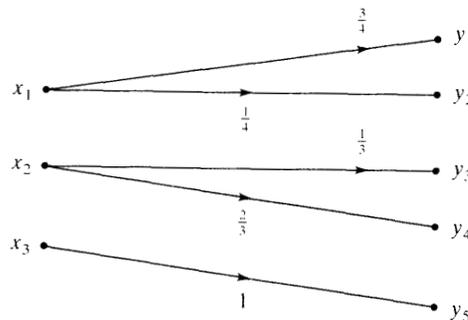


Fig. 8-2 Canal sans perte

On montre — relation (8.35) et problème 8.10 — qu'aucune information issue de la source n'est perdue lors de la transmission sur un canal sans perte.

2. Canal déterministe

Un canal dont la matrice ne comporte qu'un élément non nul par ligne est appelé *canal déterministe*. La figure 8-3 représente un canal déterministe, dont la matrice a pour expression :

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

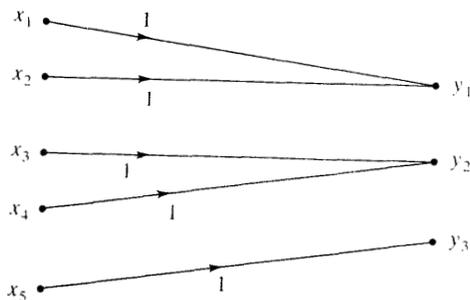


Fig. 8-3 Canal déterministe

Comme chaque ligne possède un seul élément non nul, on en conclut — relation (8.12) — que sa valeur est unitaire. Lorsqu'un symbole donné est fourni à l'entrée d'un canal déterministe, le symbole restitué en sortie lui est donc identique.

3. Canal sans bruit

On dit qu'un canal est *sans bruit* (figure 8-4), s'il est à la fois sans perte et déterministe. La matrice définissant le canal a dans ce cas un seul élément par ligne et par colonne et cet élément ne peut donc être qu'unitaire. Dans ce cas, les alphabets d'entrée et de sortie ont même dimension. Pour un canal sans bruit on a donc $m = n$.

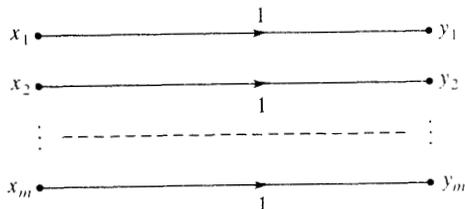


Fig. 8-4 Canal sans bruit

4. Canal binaire symétrique

Un canal binaire symétrique (CBS) a pour matrice :

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

La figure 8-5 représente un canal binaire symétrique.

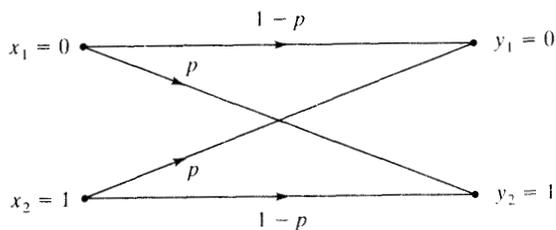


Fig. 8-5 Canal binaire symétrique

Ce canal est pourvu de deux entrées ($x_1 = 0, x_2 = 1$) et de deux sorties ($y_1 = 0, y_2 = 1$). Le canal est symétrique parce que la probabilité de recevoir un 1 si l'on a émis un 0 est identique à la probabilité de recevoir un 0 lorsqu'on a émis un 1. Cette probabilité de transition commune est notée p (voir problème 8.35).

8.4 INFORMATION MUTUELLE

A. Entropies conditionnelle et conjointe

Il est possible, en utilisant les probabilités en entrée $P(x_i)$, les probabilités en sortie $P(y_j)$ et les probabilités conjointes $P(x_i, y_j)$, de définir diverses fonctions d'entropie relatives à un canal à m entrées et n sorties :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^m P(x_i) \log_2 P(x_i) \quad (8.21)$$

$$H(Y) = - \sum_{j=1}^n P(y_j) \log_2 P(y_j) \quad (8.22)$$

$$H(X|Y) = - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i|y_j) \quad (8.23)$$

$$H(Y|X) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(y_j, x_i) \log_2 P(y_j|x_i) \quad (8.24)$$

$$H(X, Y) = - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i, y_j) \quad (8.25)$$

On peut interpréter ces entropies comme suit :

$H(X)$ est l'incertitude moyenne relative à l'entrée du canal. $H(Y)$ est l'incertitude moyenne relative à la sortie du canal. L'entropie conditionnelle $H(X|Y)$ est une mesure de l'incertitude moyenne sur l'entrée du canal une fois que l'on a observé sa sortie. $H(X|Y)$ est parfois appelée *ambiguïté* de X par rapport à Y . L'entropie conditionnelle $H(Y|X)$ est l'incertitude moyenne sur la sortie du canal sachant que X a été transmis. L'entropie conjointe $H(X, Y)$ mesure l'incertitude d'ensemble relative à l'ensemble du canal de communication. Il existe deux relations intéressantes entre ces diverses quantités :

$$H(X, Y) = H(X|Y) + H(Y) \quad (8.26)$$

$$H(X, Y) = H(Y|X) + H(X) \quad (8.27)$$

B. Information mutuelle

On définit l'*information mutuelle* $I(X; Y)$ de la façon suivante :

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \quad \text{b/symbole} \quad (8.28)$$

Comme $H(X)$ représente l'incertitude relative à l'entrée du canal avant que l'on ait observé sa sortie et puisque $H(X|Y)$ représente l'incertitude sur l'entrée après que la sortie a été observée, $I(X; Y)$ mesure le gain d'incertitude relatif au canal qui résulte de l'observation de sa sortie.

Propriétés de $I(X; Y)$

1. $I(X; Y) = I(Y; X)$ (8.29)

2. $I(X; Y) \geq 0$ (8.30)

$$3. \quad I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (8.31)$$

$$4. \quad I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (8.32)$$

8.5 CAPACITÉ D'UN CANAL

A. Capacité par symbole d'un canal

La *capacité par symbole* d'un canal discret sans mémoire a pour expression :

$$C_s = \max_{\{P(x_i)\}} I(X; Y) \quad \text{b/symbole} \quad (8.33)$$

où le maximum est recherché sur l'ensemble de toutes les répartitions $\{P(x_i)\}$ de X . On remarquera que la capacité du canal n'est fonction que des probabilités de transition qui le définissent.

B. Capacité par seconde d'un canal

Si r représente le débit du canal en symboles par seconde, le débit maximal d'information du canal a pour valeur rC_s . On appelle cette quantité la *capacité par seconde du canal*. Elle est notée C (b/s).

$$C = rC_s \quad \text{b/s} \quad (8.34)$$

C. Capacité de canaux remarquables

1. Canal sans perte

Pour un canal sans perte, on sait (problème 8.10) que $H(X|Y) = 0$ et que :

$$I(X; Y) = H(X) \quad (8.35)$$

Ainsi, l'information mutuelle (le transfert d'information) est égale à l'entropie de source et l'on ne perd aucune information pendant le transfert. En conséquence, la capacité par symbole du canal a pour expression :

$$C_s = \max_{\{P(x_i)\}} H(X) = \log_2 m \quad (8.36)$$

où m est le nombre de symboles de X .

2. Canal déterministe

Pour un canal déterministe, $H(Y|X) = 0$ pour toute distribution $P(x_i)$ et l'on a :

$$I(X; Y) = H(Y) \quad (8.37)$$

Le transfert d'information est égal à l'entropie de sortie. La capacité par symbole du canal a donc pour expression :

$$C_s = \max_{\{P(x_i)\}} H(Y) = \log_2 n \quad (8.38)$$

où n est le nombre de symboles de Y .

3. Canal sans bruit

Comme un canal sans bruit est sans perte et déterministe, on en déduit que :

$$I(X; Y) = H(X) = H(Y) \quad (8.39)$$

et la capacité par symbole du canal a pour valeur :

$$C_s = \log_2 m = \log_2 n \quad (8.40)$$

puisque pour un tel canal $n = m$.

4. Canal binaire symétrique

Dans le cas du CBS de la figure 8-5, l'information mutuelle a pour expression :

$$I(X; Y) = H(Y) + p \log_2 p + (1 - p) \log_2 (1 - p) \quad (8.41)$$

et la capacité par symbole du canal a pour expression :

$$C_s = 1 + p \log_2 p + (1 - p) \log_2(1 - p) \quad (8.42)$$

8.6 CANAL AVEC BRUIT BLANC GAUSSIEN ADDITIF

La source qui alimente un canal analogique produit un signal continu $x(t)$. On considère l'ensemble des messages susceptibles d'être transmis comme une famille de signaux engendrés par un processus aléatoire ergodique. On suppose de plus que $x(t)$ présente une bande passante finie ce qui permet de reconstruire $x(t)$ à partir de ses échantillons périodiques. A tout instant, la collection des échantillons susceptibles d'être observés constitue une variable aléatoire continue X que l'on peut décrire au moyen de sa densité de probabilité $f_X(x)$.

A. Entropie différentielle

La quantité moyenne d'information par échantillon de $x(t)$ a pour expression :

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 f_X(x) dx \quad \text{b/échantillon} \quad (8.43)$$

L'entropie définie par la relation (8.43) est appelée *entropie différentielle* de X .

L'information mutuelle moyennée d'un canal analogique a pour définition, par analogie avec un canal discret :

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$$

ou

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

où l'on a :

$$H(Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \log_2 f_Y(y) dy \quad (8.44)$$

$$H(X|Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \log_2 f_X(x|y) dx dy \quad (8.45a)$$

$$H(Y|X) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \log_2 f_Y(y|x) dx dy \quad (8.45b)$$

B. Canal avec bruit blanc gaussien additif

Dans le cas d'un canal affecté d'un bruit blanc gaussien additif (BBGA), la sortie Y du canal a pour expression :

$$Y = X + n \quad (8.46)$$

où X désigne l'entrée du canal et n est un bruit blanc gaussien additif à bande limitée de valeur moyenne nulle et de variance σ^2 .

La capacité C_s d'un canal affecté d'un bruit blanc gaussien additif a pour expression :

$$C_s = \max_{\{f_X(x)\}} I(X; Y) = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad \text{b/échantillon} \quad (8.47)$$

où S/N est le rapport signal sur bruit en sortie de canal. Si la bande passante B en Hz du canal est déterminée, le signal de sortie $y(t)$ a lui aussi une bande passante définie. Il peut être restitué en totalité à partir des ses échantillons périodiques prélevés à la fréquence de Nyquist : $2B$ échantillons par seconde. Ainsi, la capacité C en b/s d'un canal affecté par un BBGA a pour expression :

$$C = 2BC_s = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad \text{b/s} \quad (8.48)$$

La relation (8.48) est connue sous le nom de *règle de Shannon-Hartley*.

Cette règle souligne les rôles fondamentaux que jouent la bande passante et le rapport signal sur bruit en télécommunication. Elle montre aussi qu'à capacité de canal donnée, bande passante et puissance présentent des aspects complémentaires (problème 8.24) lorsqu'il faut trouver un compromis.

8.7 CODAGE DE SOURCE

La conversion du message de sortie d'une source discrète sans mémoire (SDSM) est appelée *codage de source*. Le dispositif qui effectue cette conversion est appelé *codeur de source* (figure 8-6).

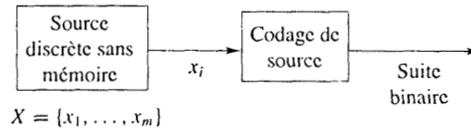


Fig. 8-6 Codage de source

L'objectif du codage de source est de modérer le débit d'information moyen du canal en réduisant la redondance des informations émises par la source.

A. Longueur et efficacité d'un code

Soit X une SDSM d'entropie finie $H(X)$ et un alphabet $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ dont les probabilités d'occurrence correspondantes sont $P(x_i)$ ($i = 1, \dots, m$). Soit n_i la longueur en bits du mot codé affecté au symbole x_i par le codeur. La longueur d'un mot codé est définie par le nombre de digits binaires du mot. La longueur moyenne L par symbole d'un mot codé a pour expression :

$$L = \sum_{i=1}^m P(x_i) n_i \quad (8.49)$$

Le paramètre L représente le nombre moyen de bits par symbole source utilisé dans le processus de codage.

On définit l'*efficacité d'un code* η de la façon suivante :

$$\eta = \frac{L_{\min}}{L} \quad (8.50)$$

où L_{\min} est la valeur minimale que peut prendre L . Lorsque η approche de la valeur 1, on dit que le code est *efficace*.

La redondance γ d'un code a pour expression :

$$\gamma = 1 - \eta \quad (8.51)$$

B. Théorème du codage de source

Le théorème du codage de source établit que, pour une source discrète sans mémoire (SDSM), la longueur moyenne L par symbole est bornée inférieurement :

$$L \geq H(X) \quad (8.52)$$

De plus, L peut être rendu aussi proche que l'on veut de cette limite à condition de bien choisir le codage.

Comme $L_{\min} = H(X)$, on peut donner une nouvelle expression de l'efficacité d'un code :

$$\eta = \frac{H(X)}{L} \quad (8.53)$$

C. Classification des codes

Il est intéressant d'utiliser un exemple pour expliquer la notion de classement d'un code. Soit le tableau 8-1 représentant le codage au moyen des symboles 0 et 1 d'une source de dimension 4.

Tableau 8-1 Codage binaire

x_i	Code 1	Code 2	Code 3	Code 4	Code 5	Code 6
x_1	00	00	0	0	0	1
x_2	01	01	1	10	01	01
x_3	00	10	00	110	011	001
x_4	11	11	11	111	0111	0001

1. Code de longueur fixe

Un *code de longueur fixe* est un code dont tous les mots ont même longueur. Exemple : les codes 1 et 2 du tableau 8-1 sont de longueur 2.

2. Code de longueur variable

Un *code de longueur variable* est un code dont les mots ne sont pas tous de même longueur. Exemple : les codes 3, 4, 5 et 6 du tableau 8-1.

3. Code univoque

Un *code univoque* est un code dont chaque mot est distinct de tous les autres mots. C'est le cas des codes 2 à 6 du tableau 8-1. Contre-exemple : le code 1 pour lequel les codages de x_1 et de x_3 sont identiques.

4. Code sans préfixe

Un *code sans préfixe* est un code pour lequel aucun mot ne peut être formé à partir d'un autre par addition de symboles. Exemple : les codes 2, 4 et 6 du tableau 8-1.

5. Code déchiffrable de façon unique

Un *code déchiffrable de façon unique* est un code qui permet de restituer dans son intégrité et sans ambiguïté une séquence de symboles d'entrée à partir de la séquence des codes binaires qui leur sont associés. On remarque que le code 3 du tableau 8-1 n'est pas un code déchiffrable de façon unique puisque la séquence binaire 1001 peut correspondre à une suite d'entrée $x_2x_3x_2$ aussi bien qu'à une suite $x_2x_1x_1x_2$. Une condition suffisante pour qu'un code possède cette qualité est qu'aucun de ses mots ne soit le préfixe d'un autre mot. C'est ainsi que les codes 2, 4 et 6 du tableau 8-1 sont des codes déchiffrables de façon unique. Cette condition n'est pourtant pas nécessaire à l'unicité de déchiffrement. Le code 5 du tableau 8-1 n'est pas un code sans préfixe, il est pourtant à déchiffrement unique; le code 0 est préfixe de chacun des autres mots du code.

6. Code instantané

Un code à déchiffrement unique est dit *code instantané* si la fin de tout mot de code est identifiable sans examen des symboles du mot de code qui suit. Les codes instantanés sont des codes sans préfixe. C'est pourquoi ces derniers sont parfois appelés codes instantanés.

7. Code optimal

Un code est dit *optimal* s'il est instantané et présente une longueur moyenne L minimale pour une source donnée avec des probabilités données d'occurrence des symboles que produit la source.

D. Inégalité de Kraft

Soit X une source discrète sans mémoire (SDSM) d'alphabet $\{x_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$). On désigne par n_i la longueur du code binaire correspondant à x_i .

Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un code binaire instantané a pour expression :

$$K = \sum_{i=1}^m 2^{-n_i} \leq 1 \tag{8.54}$$

relation connue sous le nom d'*inégalité de Kraft*.

On remarquera que l'inégalité de Kraft nous assure qu'il existe bien un code instantané déchiffrable dont la longueur des mots satisfait à l'inégalité en question. Elle ne nous dit rien sur la façon d'engendrer un tel code pas plus qu'elle ne nous garantit qu'un code satisfaisant à cette inégalité est *ipso facto* décodable de façon univoque (problème 8.27).

8.8 CODAGE ENTROPIQUE

On appelle *codage entropique* l'élaboration d'un codage dont la longueur moyenne des mots reflète l'entropie d'une source discrète sans mémoire. Nous allons étudier dans ce qui suit deux exemples de codage entropique.

A. Codage de Shannon-Fano

On obtient un codage efficace en appliquant la procédure suivante, connue sous le nom d'*algorithme de Shannon-Fano*.

1. Lister les symboles de la source par probabilités décroissantes.
2. Partager l'ensemble en deux sous-ensembles aussi équilibrés que possible au sens de la sommation des probabilités élémentaires des symboles.
3. Répéter le processus de partage en assurant au mieux l'équilibre jusqu'à ce que l'opération devienne impossible.

Le tableau 8-2 illustre un exemple de codage Shannon-Fano. On aura remarqué que ce type de codage peut induire des ambiguïtés lors des partitions successives en sous-ensembles globalement équiprobables (problème 8.33).

Tableau 8-2 Codage de Shannon-Fano

x_i	$P(x_i)$	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Code 5
x_1	0,30	0	0			00
x_2	0,25	0	1			01
x_3	0,20	1	0			10
x_4	0,12	1	1	0		110
x_5	0,08	1	1	1	0	1110
x_6	0,05	1	1	1	1	1111

$$H(X) = 2,36 \text{ b/symbole}$$

$$L = 2,38 \text{ b/symbole}$$

$$\eta = H(X)/L = 0,99$$

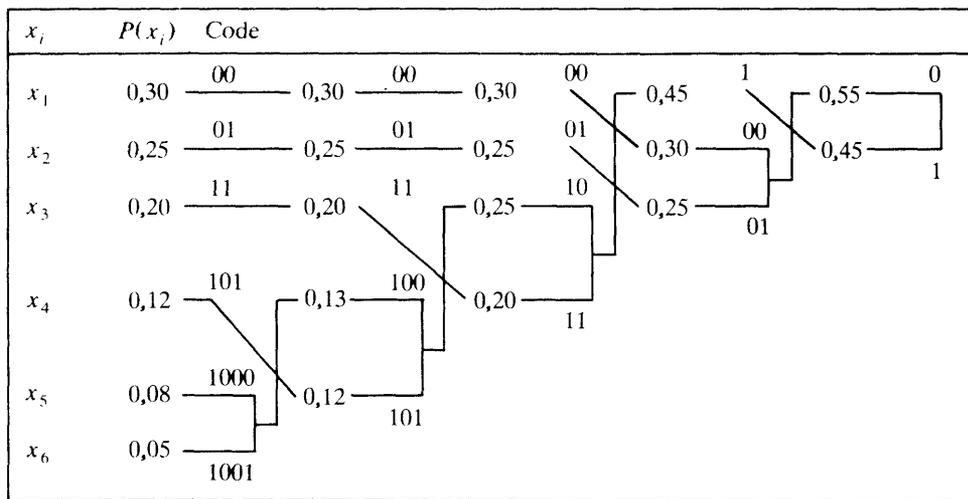
B. Codage de Huffman

Le codage de Huffman produit généralement un code optimal. C'est le plus efficace des codages (problème 8.34). La méthode est la suivante :

1. Lister les symboles de la source par probabilités d'occurrence décroissante.
2. Additionner les probabilités des deux éléments de probabilités les plus faibles et réordonner la liste. Cette étape est appelée réduction de niveau 1. Répéter cette procédure jusqu'au niveau où il ne reste dans le tableau que deux positions classées dans l'ordre de leurs probabilités.
3. Commencer le codage au dernier niveau de réduction sur le couple de probabilités obtenu. On attribue le bit 0 comme premier digit des mots codés de tous les symboles de source associés à la première probabilité et 1 comme premier digit des mots codés de tous les symboles associés à la seconde probabilité.
4. On descend d'un niveau et l'on attribue les bits 0 et 1 comme deuxième digit des mots codés associés aux deux éléments qui ont été combinés au niveau précédent, en maintenant les affectations obtenues à l'étape 3.
5. Opérer de façon régressive jusqu'à ce que l'on atteigne la première colonne.

Le tableau 8-3 donne un exemple de codage d'Huffman.

Tableau 8-3 Codage d'Huffman



$$\begin{aligned}
 H(X) &= 2,36 \text{ b/symbole} \\
 L &= 2,38 \text{ b/symbole} \\
 \eta &= 0,99
 \end{aligned}$$

8.9 CODAGE D'UN CANAL DE TRANSMISSION

Nous allons étudier, dans ce qui suit, les moyens de codage permettant d'acheminer avec fiabilité des informations numériques sur un canal bruité.

A. Codage d'un canal

La figure 8-7 représente un dispositif permettant de coder la transmission d'un message sur un canal. Ce canal peut recevoir directement la séquence binaire du message d'entrée ou son codage issu d'un codeur. Ce dernier introduit une redondance systématique dans le flux de données sous la forme de bits complémentaires qui permettent de détecter et/ou de corriger les bits erronés au niveau du récepteur.

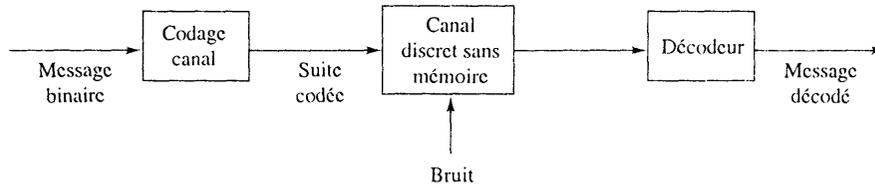


Fig. 8-7 Codage d'un canal

B. Théorème du codage pour un canal

Le théorème du codage pour un canal s'énonce comme suit :

Etant donné une source discrète sans mémoire (SDSM) X d'entropie $H(X)$ b/symbole et un canal discret sans mémoire (CDSM) de capacité C_s b/symbole, si $H(X) \leq C_s$, il existe un codage qui permet de transmettre le message de la source sur le canal avec une probabilité d'erreur aussi petite qu'on le désire.

En revanche, si $H(X) > C_s$, il est impossible de transmettre des informations sur le canal considéré avec une probabilité d'erreur arbitrairement réduite.

On retiendra que le théorème du codage affirme l'existence d'un codage sans donner les moyens de le construire.

C. Codage par blocs

Dans un codage par blocs, on code le message binaire ou la suite des données sous forme de blocs séquentiels longs de k b et chacun de ces k -b blocs est converti en un n -b bloc avec $n > k$. On appelle le bloc obtenu un (n, k) bloc. On peut ainsi représenter un mot codé sous forme d'un (n, k) bloc :

$$\underbrace{c_1 c_2 \dots c_k}_{\text{Bits données}} \quad \underbrace{c_{k+1} c_{k+2} \dots c_n}_{\text{Bits de parité}}$$

Les $n - k$ bits de la seconde partie du mot codé sont des bits de *contrôle de parité*.

Dans ce cas, le codeur effectue l'opération de conversion suivante :

$$T : U \rightarrow V \tag{8.55}$$

où U est un ensemble de mots binaires de longueur k et V est un ensemble de mots binaires de longueur n avec $n > k$. Chacun des 2^k mots de données est associé de façon biunivoque à un mot codé. Le rapport k/n est appelé *taux de remplissage du code*.

8.10 CODAGE AVEC CONTRÔLE D'ERREUR

Les codes utilisés en communication peuvent corriger ou simplement détecter les erreurs de transmission, suivant le taux de redondance des bits de contrôle de parité. Il existe donc des *codes correcteurs d'erreur* de types très divers, tels que les codes à contrôle de parité linéaire, les codes cycliques et les codes convolutifs. Nous allons parler ici des codes à contrôle de parité.

A. Codes à contrôle de parité linéaire

Il est commode de représenter le mot codé d'un codage par blocs (n, k) sous forme d'une matrice. Le mot codé est une ligne de la matrice dont les éléments sont les symboles du code. On peut représenter un vecteur code \mathbf{c} et un «vecteur données» \mathbf{d} de la façon suivante :

$$\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]$$

$$\mathbf{d} = [d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_k]$$

Si les k premiers bits d'un mot codé sont des bits de données, on dit que le code est *systematique*. Dans le cas d'un codage systematique à contrôle de parité, les k premiers bits sont des bits de données tandis que les $m = n - k$ suivants sont des bits de contrôle de parité formés par combinaison linéaire des bits de données :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= d_1 \\
 c_2 &= d_2 \\
 &\vdots \\
 c_{k+1} &= p_{11}d_1 \oplus p_{12}d_2 \oplus \cdots \oplus p_{1k}d_k \\
 c_{k+2} &= p_{21}d_1 \oplus p_{22}d_2 \oplus \cdots \oplus p_{2k}d_k \\
 &\vdots \\
 c_{k+m} &= p_{m1}d_1 \oplus p_{m2}d_2 \oplus \cdots \oplus p_{mk}d_k
 \end{aligned} \tag{8.56}$$

où \oplus indique l'addition modulo 2, dont les règles sont définies ci-après :

$$\begin{aligned}
 0 \oplus 0 &= 1 \oplus 1 = 0 \\
 0 \oplus 1 &= 1 \oplus 0 = 1
 \end{aligned}$$

La relation (8.56) peut s'écrire sous la forme matricielle qui suit :

$$\mathbf{c} = \mathbf{d}G = [d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_k] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{m1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{m2} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{1k} & p_{2k} & \cdots & p_{mk} \end{bmatrix} \tag{8.57}$$

où l'on a :

$$G = [I_k \quad P^T] \tag{8.58}$$

expression dans laquelle I_k est la matrice unité d'ordre k et P^T est la matrice transposée de la matrice des coefficients P ayant pour expression :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mk} \end{bmatrix} \tag{8.59}$$

La matrice G de dimensions $k \times n$ est appelée *matrice génératrice*. Le code (ensemble complet des mots codés) engendré par la relation (8.56) ou (8.57) est appelé *code à contrôle de parité linéaire*.

B. Matrice de contrôle de parité

Soit H la matrice de dimension $m \times n$ ayant pour définition :

$$H = [P \quad I_m] \tag{8.60}$$

où $m = n - k$. On a alors :

$$H^T = \begin{bmatrix} P^T \\ I_m \end{bmatrix} \tag{8.61}$$

ainsi que

$$GH^T = [I_k \ P^T] \begin{bmatrix} P^T \\ I_m \end{bmatrix} = P^T \oplus P^T = 0 \quad (8.62)$$

où l'on a reconnu dans 0 la matrice nulle de dimension $k \times m$. Une postmultiplication par H^T des deux membres de la relation (8.57) et l'utilisation de la relation (8.62) permet d'obtenir :

$$\mathbf{c}H^T = \mathbf{d}GH^T = \mathbf{0} \quad (8.63)$$

La matrice H est appelée *matrice de contrôle de parité* du code considéré et la relation (8.63) est appelée *relation de parité*.

C. Décodage syndromique

Soit \mathbf{r} le vecteur $1 \times n$ reçu à la suite de la transmission du vecteur code \mathbf{c} sur un canal bruité. Considérons tout d'abord le cas d'une seule erreur en position i . On a :

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} \oplus \mathbf{e} \quad (8.64)$$

où l'on a :

$$\mathbf{e} = [0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0] \quad (8.65)$$

↑
position i

Le vecteur \mathbf{e} est appelé *vecteur d'erreur*.

Notons au passage que la somme (modulo 2) de deux vecteurs codes, \mathbf{a} et \mathbf{b} a pour définition :

$$\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = [a_1 \oplus b_1 \ a_2 \oplus b_2 \ \cdots \ a_n \oplus b_n]$$

où l'on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \\ \mathbf{b} &= [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n] \end{aligned}$$

On évalue ensuite $\mathbf{r}H^T$ et l'on obtient :

$$\mathbf{r}H^T = (\mathbf{c} \oplus \mathbf{e})H^T = \mathbf{0} \oplus \mathbf{e}H^T = \mathbf{e}H^T = \mathbf{s} \quad (8.66)$$

Le vecteur $1 \times m$ obtenu, \mathbf{s} , est appelé *syndrome* de \mathbf{r} . Ainsi, connaissant \mathbf{s} et en remarquant que $\mathbf{e}H^T$ est la i ème ligne de H^T , on peut repérer la position d'une erreur en comparant \mathbf{s} aux lignes de H^T . On appelle *décodage syndromique* la méthode qui consiste à décoder un message en effectuant cette comparaison. Il faut aussi dire que l'on ne peut identifier la totalité des configurations erronées par décodage syndromique. Un syndrome «zéro» indique que \mathbf{r} est un vecteur code présumé valide.

Sous décodage syndromique, un (n, k) bloc de code linéaire peut corriger jusqu'à t erreurs par mot de code si n et k respectent la *limite de Hamming*.

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \quad (8.67)$$

où l'on a :

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)! i!}$$

Un codage par blocs qui satisfait à l'égalité de la relation (8.67) est appelé *code parfait*. Les codes parfaits capables de corriger une seule erreur sont appelés *codes de Hamming*.

On remarquera que le respect de la limite de Hamming est nécessaire mais non suffisant lors de la construction d'un code à contrôle de parité capable de corriger t erreurs.

8.11 DÉTECTION ET CORRECTION D'ERREUR EN CODAGE PAR BLOCS LINÉAIRE

A. Distance de Hamming

Étant donné deux vecteurs codes \mathbf{c}_i et \mathbf{c}_j de même dimension (nombre d'éléments), on définit une *distance de Hamming* $d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j)$ entre ces vecteurs égale au nombre de positions où leurs éléments sont différents.

On définit également le poids de Hamming $w(\mathbf{c}_i)$ d'un vecteur code \mathbf{c}_i égal au nombre de 1 de \mathbf{c}_i . On peut ainsi dire que le poids de Hamming de \mathbf{c}_i est sa distance de Hamming par rapport au vecteur $\mathbf{0}$, c'est-à-dire :

$$w(\mathbf{c}_i) = d(\mathbf{c}_i, \mathbf{0}) \quad (8.68)$$

où $\mathbf{0}$ est le vecteur code dont tous les éléments sont nuls. On peut aussi exprimer la distance de Hamming en fonction du poids de Hamming :

$$d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = w(\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{c}_j) \quad (8.69)$$

B Distance minimale

La distance minimale d'un code par blocs linéaire est la plus petite distance existant entre deux vecteurs du code.

D'après la propriété de fermeture des codes par blocs linéaires (la somme — ou la différence — modulo 2 de deux vecteurs codes est aussi un vecteur code), on peut déduire le théorème suivant :

THÉORÈME 8.1

La distance minimale d'un codage par blocs linéaire est le plus petit poids de Hamming du vecteur code non nul du codage.

D'après la relation (8.63), on peut définir un codage par blocs linéaire comme l'ensemble des vecteurs codes pour lesquels :

$$\mathbf{c}H^T = \mathbf{0} \quad (8.70)$$

où H^T est la transposée de la matrice H .

La distance minimale d_{\min} d'un codage par blocs linéaire est étroitement liée à la structure de la matrice de contrôle de parité H de ce code. C'est ce qu'énonce le théorème suivant :

THÉORÈME 8.2

La distance minimale d_{\min} d'un codage par blocs linéaire est égale au nombre de lignes de la matrice H^T dont la somme est égale à $\mathbf{0}$.

C. Détection et correction d'erreur

La distance minimale d'un codage par blocs linéaire est un paramètre important du code. Elle détermine les capacités de détection et de correction d'erreur du codage. C'est ce que confirme le théorème suivant :

THÉORÈME 8.3

Un codage linéaire par (n, k) blocs de distance minimale d_{\min} peut corriger jusqu'à t erreurs si et seulement si :

$$d_{\min} \geq 2t + 1 \quad (8.71)$$

On peut donner une représentation géométrique de la relation (8.71). La figure 8-8 représente deux sphères de Hamming, chacune de rayon t , centrées sur les points représentatifs de deux vecteurs \mathbf{c}_i et \mathbf{c}_j . Dans le cas 8-8(a) les deux sphères sont disjointes c'est-à-dire que $d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) > 2t + 1$. Si l'on transmet dans ces conditions le vecteur code \mathbf{c}_i , et si l'on reçoit un vecteur \mathbf{r} tel que $d(\mathbf{c}_i, \mathbf{r}) \leq t$, il est clair que le décodeur choisira \mathbf{c}_i puisqu'il s'agit du vecteur code le plus proche du vecteur \mathbf{r} . En revanche, dans le cas 8-8(b), les deux sphères sont sécantes, c'est-à-dire que $d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) < 2t$. On voit que si l'on transmet alors \mathbf{c}_i , il existe un (parmi d'autres) vecteur réception \mathbf{r} tel que $d(\mathbf{c}_i, \mathbf{r}) \leq t$ et $d(\mathbf{c}_j, \mathbf{r}) \leq t$, ce qui entraîne une ambiguïté de choix pour le récepteur.

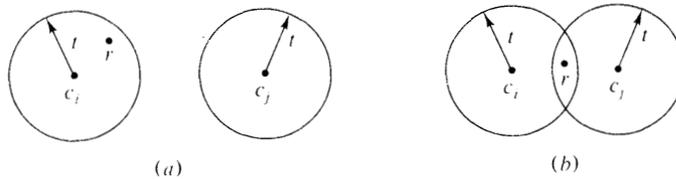


Fig. 8-8 Distance de Hamming

Problèmes résolus

MESURE DE L'INFORMATION

8.1. Démontrer la relation (8.5), à savoir que, si x_i et x_j sont indépendants

$$I(x_i, x_j) = I(x_i) + I(x_j)$$

Si x_i et x_j sont indépendants, on peut écrire, d'après la relation (5.25) :

$$P(x_i, x_j) = P(x_i)P(x_j)$$

D'après la relation (8.1), on a :

$$\begin{aligned} I(x_i, x_j) &= \log \frac{1}{P(x_i, x_j)} = \log \frac{1}{P(x_i)P(x_j)} \\ &= \log \frac{1}{P(x_i)} + \log \frac{1}{P(x_j)} \\ &= I(x_i) + I(x_j) \end{aligned}$$

8.2. Une SDSM (source discrète sans mémoire) émet quatre symboles x_1, x_2, x_3, x_4 avec les probabilités $P(x_1) = 0,4, P(x_2) = 0,3, P(x_3) = 0,2, P(x_4) = 0,1$.

- (a) Calculer $H(X)$.
- (b) Evaluer le contenu informatif des messages $x_1x_2x_1x_3$ et $x_4x_3x_3x_2$. Les comparer avec la valeur de $H(X)$ obtenue ci-dessus.

$$\begin{aligned} H(X) &= - \sum_{i=1}^4 P(x_i) \log_2 [P(x_i)] \\ &= -0,4 \log_2 0,4 - 0,3 \log_2 0,3 - 0,2 \log_2 0,2 - 0,1 \log_2 0,1 \\ &= 1,85 \text{ b/symbole} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(x_1x_2x_1x_3) &= (0,4)(0,3)(0,4)(0,2) = 0,0096 \\ I(x_1x_2x_1x_3) &= -\log_2 0,0096 = 6,70 \text{ b/symbole} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I(x_1x_2x_1x_3) &< 7,4 [= 4H(X)] \text{ b/symbole} \\ P(x_4x_3x_3x_2) &= (0,1)(0,2)(0,2)(0,3) = 0,0012 \\ I(x_4x_3x_3x_2) &= -\log_2 0,0012 = 9,70 \text{ b/symbole} \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$I(x_4x_3x_3x_2) > 7,4 [= 4H(X)] \text{ b/symbole}$$

- 8.3.** On considère une source binaire sans mémoire produisant deux symboles x_1 et x_2 . Montrer que $H(X)$ est maximal lorsque x_1 et x_2 sont équiprobables.

Posons $P(x_1) = \alpha$. Il en résulte que $P(x_2) = 1 - \alpha$.

$$H(X) = -\alpha \log_2 \alpha - (1 - \alpha) \log_2 (1 - \alpha) \quad (8.72)$$

En dérivant par rapport à α , il vient :

$$\frac{dH(X)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} [-\alpha \log_2 \alpha - (1 - \alpha) \log_2 (1 - \alpha)]$$

En utilisant l'identité :

$$\frac{d}{dx} \log_b y = \frac{1}{y} \log_b e \frac{dy}{dx}$$

On obtient :

$$\frac{dH(X)}{d\alpha} = -\log_2 \alpha + \log_2 (1 - \alpha) = \log_2 \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

Pour avoir un maximum de $H(X)$, il faut assurer la condition :

$$\frac{dH(X)}{d\alpha} = 0$$

ce qui conduit à l'équation :

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

On aura remarqué que $H(X) = 0$ lorsque $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Lorsque $P(x_1) = P(x_2) = \frac{1}{2}$, $H(X)$ est maximum et a pour expression :

$$H(X) = \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{2} \log_2 2 = 1 \text{ b/symbole} \quad (8.73)$$

- 8.4.** Vérifier la relation (8.9), c'est-à-dire

$$0 \leq H(X) \leq \log_2 m$$

où m est la dimension de l'alphabet de X .

Démonstration relative à la borne inférieure : comme $0 \leq P(x_i) \leq 1$, on a :

$$\frac{1}{P(x_i)} \geq 1 \quad \text{et} \quad \log_2 \frac{1}{P(x_i)} \geq 0$$

Il en résulte que :

$$P(x_i) \log_2 \frac{1}{P(x_i)} \geq 0$$

ainsi :

$$H(X) = \sum_{i=1}^m P(x_i) \log_2 \frac{1}{P(x_i)} \geq 0 \quad (8.74)$$

On remarque d'autre part que :

$$P(x_i) \log_2 \frac{1}{P(x_i)} = 0$$

si et seulement si $P(x_i) = 0$ ou 1 . Comme d'autre part :

$$\sum_{i=1}^m P(x_i) = 1$$

lorsque $P(x_i) = 1$, on en conclut que $P(x_j) = 0$ pour $j \neq i$. C'est seulement dans ce cas que $H(X) = 0$.

Démonstration relative à la borne supérieure : considérons deux répartitions de probabilité $\{P(x_i) = P_i\}$ et $\{Q(x_i) = Q_i\}$ portant sur l'alphabet $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, satisfaisant à la condition :

$$\sum_{i=1}^m P_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m Q_i = 1 \quad (8.75)$$

En faisant appel à la relation (8.6), on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^m \log_2 \frac{Q_i}{P_i} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^m P_i \ln \frac{Q_i}{P_i}$$

En utilisant alors l'inégalité ci-après :

$$\ln \alpha \leq \alpha - 1 \quad \alpha \geq 0 \quad (8.76)$$

et en remarquant que l'égalité n'a lieu que lorsque $\alpha = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m P_i \ln \frac{Q_i}{P_i} &\leq \sum_{i=1}^m P_i \left(\frac{Q_i}{P_i} - 1 \right) = \sum_{i=1}^m (Q_i - P_i) \\ &= \sum_{i=1}^m Q_i - \sum_{i=1}^m P_i = 0 \end{aligned} \quad (8.77)$$

en utilisant la relation (8.75). On a donc :

$$\sum_{i=1}^m P_i \log_2 \frac{Q_i}{P_i} \leq 0 \quad (8.78)$$

où l'égalité n'a lieu que lorsque $Q_i = P_i$ pour toute valeur de i . En posant :

$$Q_i = \frac{1}{m} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8.79)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m P_i \log_2 \frac{1}{P_i m} &= - \sum_{i=1}^m P_i \log_2 P_i - \sum_{i=1}^m P_i \log_2 m \\ &= H(X) - \log_2 m \sum_{i=1}^m P_i \\ &= H(X) - \log_2 m \leq 0 \end{aligned} \quad (8.80)$$

d'où l'on déduit :

$$H(X) \leq \log_2 m$$

Quant à l'égalité, elle se produit uniquement lorsque les symboles de X sont équiprobables, comme dans la relation (8.79).

- 8.5.** Une image TV haute résolution en noir et blanc comporte environ 2×10^6 pixels (éléments d'image) et seize niveaux de gris. La fréquence de renouvellement est de 32 images par seconde. On suppose que les pixels sont indépendants les uns des autres et que les niveaux de gris sont équiprobables. Evaluer le débit d'information R de ce canal de télévision.

$$H(X) = \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} = 4 \text{ b/pixel}$$

Le débit du canal en pixels par seconde a pour expression :

$$r = 2(10^6)(32) = 64(10^6) \text{ pixels/s}$$

On en déduit donc le débit d'information R du canal :

$$R = rH(X) = 64(10^6)4 = 256(10^6) \text{ b/s} = 256 \text{ Mb/s}$$

- 8.6.** On considère une source transmettant des signaux télégraphiques dont les symboles sont des traits et des points. La durée d'un point est 0,2 seconde tandis que la durée d'un trait est 0,6 seconde. La probabilité d'occurrence d'un point est deux fois celle d'un trait et l'intervalle entre symboles a une durée de 0,2 seconde. Calculer le débit d'information de cette source.

$$P(\text{point}) = 2P(\text{trait})$$

$$P(\text{point}) + P(\text{trait}) = 3P(\text{trait}) = 1$$

Ainsi :

$$P(\text{trait}) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(\text{point}) = \frac{2}{3}$$

D'après la relation (8.37) :

$$\begin{aligned} H(X) &= -P(\text{point}) \log_2 P(\text{point}) - P(\text{trait}) \log_2 P(\text{trait}) \\ &= 0,667(0,585) + 0,333(1,585) = 0,92 \text{ b/symbole} \\ t_{\text{point}} &= 0,2 \quad t_{\text{trait}} = 0,6 \quad t_{\text{espace}} = 0,2 \end{aligned}$$

On en déduit que la durée moyenne d'un symbole a pour valeur :

$$T_s = P(\text{point})t_{\text{point}} + P(\text{trait})t_{\text{trait}} + t_{\text{espace}} = 0,533 \text{ s/symbole}$$

Et le débit moyen en symboles par seconde a pour valeur :

$$r = \frac{1}{T_s} = 1,875 \text{ symbole/s}$$

On en déduit le débit moyen d'information de la source :

$$R = rH(X) = 1,875(0,92) = 1,725 \text{ b/s}$$

CANAUX DISCRETS SANS MÉMOIRE

8.7. On considère un canal binaire tel que représenté sur la figure 8-9 (voir problème 5.8).

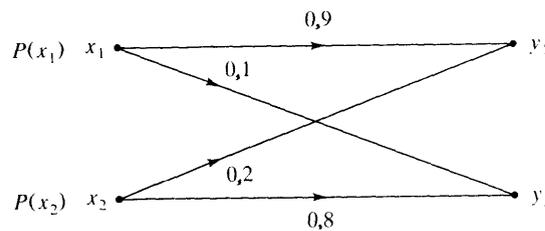


Fig. 8-9

- (a) Calculer la matrice de transition du canal de transmission.
 (b) Calculer $P(y_1)$ et $P(y_2)$ lorsque $P(x_1) = P(x_2) = 0,5$.
 (c) Calculer les probabilités conjointes $P(x_1, y_2)$ et $P(x_2, y_1)$ lorsque $P(x_1) = P(x_2) = 0,5$.
 (a) En appliquant la relation (8.11), on obtient la matrice de transition du canal :

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & P(y_2|x_1) \\ P(y_1|x_2) & P(y_2|x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$

- (b) En appliquant les relations (8.13), (8.14) et (8.15), on obtient :

$$\begin{aligned} [P(Y)] &= [P(X)][P(Y|X)] \\ &= [0,5 \quad 0,5] \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \\ &= [0,55 \quad 0,45] = [P(y_1) \quad P(y_2)] \end{aligned}$$

On en déduit que $P(y_1) = 0,55$ et que $P(y_2) = 0,45$.

- (c) En appliquant les relations (8.16) et (8.17), on obtient :

$$\begin{aligned} [P(X, Y)] &= [P(X)]_d [P(Y|X)] \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,45 & 0,05 \\ 0,1 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(x_1, y_1) & P(x_1, y_2) \\ P(x_2, y_1) & P(x_2, y_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'où l'on conclut que $P(x_1, y_2) = 0,05$ et $P(x_2, y_1) = 0,1$.

8.8. On connecte en série deux canaux binaires identiques à celui du problème 8.7, comme l'illustre la figure 8-10.

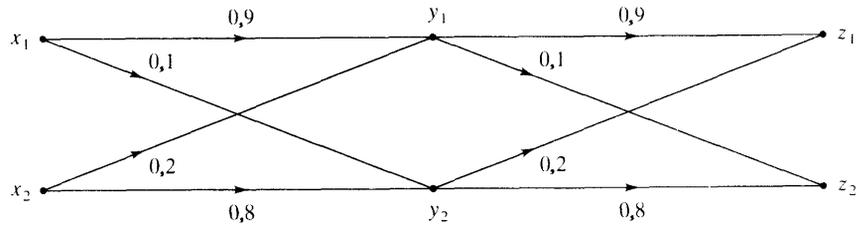


Fig. 8-10

- (a) Calculer la matrice de transition de cet assemblage et en tracer le schéma.
- (b) Calculer $P(z_1)$ et $P(z_2)$ lorsque $P(x_1) = P(x_2) = 0,5$.
- (a) D'après la relation (8.15), on sait que :

$$\begin{aligned}
 [P(Y)] &= [P(X)][P(Y|X)] \\
 [P(Z)] &= [P(Y)][P(Z|Y)] \\
 &= [P(X)][P(Y|X)][P(Z|Y)] \\
 &= [P(X)][P(Z|X)]
 \end{aligned}$$

Ainsi, en se reportant à la figure 8-10 :

$$\begin{aligned}
 [P(Z|X)] &= [P(Y|X)][P(Z|Y)] \\
 &= \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La figure 8-11 représente le schéma équivalent de ce canal.

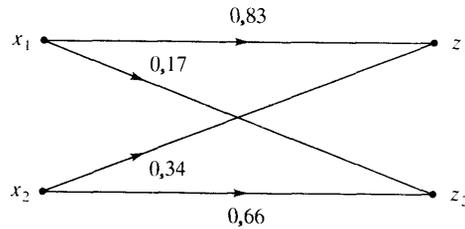


Fig. 8-11

- (b) On peut écrire que :

$$\begin{aligned}
 [P(Z)] &= [P(X)][P(Z|X)] \\
 &= [0,5 \quad 0,5] \begin{bmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{bmatrix} = [0,585 \quad 0,415]
 \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que $P(z_1) = 0,585$ et $P(z_2) = 0,415$.

8.9. Un canal est caractérisé par sa matrice de transition :

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix} \tag{8.81}$$

- (a) Dessiner le schéma représentatif de ce canal.
- (b) Si la source délivre des symboles équiprobables, calculer les probabilités associées aux symboles de sortie du canal pour la valeur $p = 0,2$.
- (a) La figure 8-12 représente le canal en question. Il s'agit d'un *canal binaire avec effacement*. Ce type de canal possède deux entrées, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$, et trois sorties $y_1 = 0$, $y_2 = e$ et $y_3 = 1$, où e signifie qu'il y a effacement de la valeur reçue, dont on ne peut dire si elle est égale à 0 ou à 1 et que l'on efface.

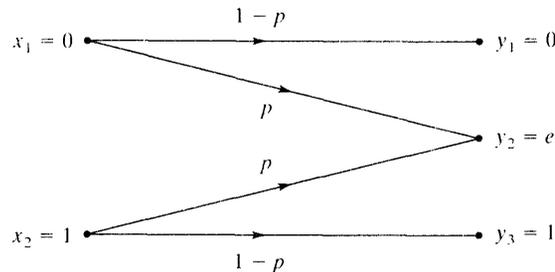


Fig. 8-12 Canal binaire avec effacement

- (b) D'après la relation (8.15), on a :

$$\begin{aligned}
 [P(Y)] &= [0,5 \quad 0,5] \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \\
 &= [0,4 \quad 0,2 \quad 0,4]
 \end{aligned}$$

D'où l'on conclut que $P(y_1) = 0,4$, $P(y_2) = 0,2$ et $P(y_3) = 0,4$.

INFORMATION MUTUELLE

- 8.10. Montrer que l'on a, pour un canal sans perte :

$$H(X|Y) = 0 \quad (8.82)$$

Lorsque l'on observe la sortie y_j d'un canal sans perte (figure 8-2), on sait toujours quel symbole a été transmis, ce qui s'exprime de la façon suivante :

$$P(x_i|y_j) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \quad (8.83)$$

Or, d'après la relation (8.23), on peut écrire que :

$$\begin{aligned}
 H(X|Y) &= - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i, y_j) \\
 &= - \sum_{j=1}^n P(y_j) \sum_{i=1}^m P(x_i|y_j) \log_2 P(x_i, y_j)
 \end{aligned} \quad (8.84)$$

On aura remarqué que tous les termes de la sommation sur i sont nuls car ils sont de la forme $1 \times \log_2 1$ ou $0 \times \log_2 0$. On en déduit donc que pour un canal sans perte :

$$H(X|Y) = 0$$

- 8.11. On considère un canal sans bruit avec m symboles d'entrée et m symboles de sortie. Montrer que

$$H(X) = H(Y) \quad (8.85)$$

et que :

$$H(Y|X) = 0 \quad (8.86)$$

La matrice de transition d'un canal sans bruit a pour expression :

$$P(y_j|x_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (8.87)$$

D'où il s'ensuit que :

$$P(x_i, y_j) = P(y_j|x_i)P(x_i) = \begin{cases} P(x_i) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (8.88)$$

ainsi que

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) = P(x_j) \quad (8.89)$$

On a donc, d'après les relations (8.7) et (8.89) :

$$\begin{aligned} H(Y) &= - \sum_{j=1}^m P(y_j) \log_2 P(y_j) \\ &= - \sum_{i=1}^m P(x_i) \log_2 P(x_i) = H(X) \end{aligned}$$

En tenant compte ensuite des relations (8.24), (8.87) et (8.88) :

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(y_j|x_i) \\ &= - \sum_{i=1}^m P(x_i) \sum_{j=1}^m \log_2 P(y_j, x_i) \\ &= - \sum_{i=1}^m P(x_i) \log_2 1 = 0 \end{aligned}$$

8.12. Démontrer la relation (8.26), à savoir :

$$H(X, Y) = H(X|Y) + H(Y)$$

D'après les relations (5.23) et (5.30), on a :

$$P(x_i, y_j) = P(x_i|y_j)P(y_j)$$

ainsi que :

$$\sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) = P(y_j)$$

Donc, selon la relation (8.25) et en appliquant les relations (8.22) et (8.23), on peut écrire que :

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) \log P(x_i, y_j) \\ &= - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) \log [P(x_i|y_j)P(y_j)] \\ &= - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) \log P(x_i|y_j) \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) \right] \log P(y_j) \\ &= H(X|Y) - \sum_{j=1}^n P(y_j) \log P(y_j) \\ &= H(X|Y) + H(Y) \end{aligned}$$

- 8.13.** Montrer que l'information mutuelle $I(X; Y)$ du canal dont la matrice de transition est explicitée par la relation (8.11), dont les probabilités d'occurrence des symboles d'entrée sont $P(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ et les probabilités d'occurrence des symboles de sortie sont $P(y_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ a pour expression :

$$I(X; Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(x_i, y_j) \log_2 \frac{P(x_i | y_j)}{P(x_i)} \quad (8.90)$$

D'après la relation (8.28), on a :

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$$

En appliquant les relations (8.28) et (8.23), il vient :

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \sum_{i=1}^m P(x_i) \log_2 \frac{1}{P(x_i)} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i | y_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n P(x_i, y_j) \right] \log_2 \frac{1}{P(x_i)} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i | y_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(x_i, y_j) \left[\log_2 \frac{1}{P(x_i)} + \log_2 P(x_i | y_j) \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(x_i, y_j) \log_2 \frac{P(x_i | y_j)}{P(x_i)} \end{aligned}$$

- 8.14.** Démontrer la relation (8.29), à savoir :

$$I(X; Y) = I(Y; X)$$

D'après la relation (8.90), on peut exprimer $I(Y; X)$ de la façon suivante :

$$I(Y; X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(y_j, x_i) \log_2 \frac{P(y_j, x_i)}{P(y_j)} \quad (8.91)$$

D'après les relations (5.8) et (5.24), on a :

$$P(y_j, x_i) = P(x_i, y_j)$$

et

$$\frac{P(y_j | x_i)}{P(y_j)} = \frac{P(x_i | y_j)}{P(x_i)}$$

En rapprochant les relations (8.91) et (8.90), on conclut que :

$$I(X; Y) = I(Y; X)$$

- 8.15.** Démontrer la relation (8.30), à savoir :

$$I(X; Y) \geq 0$$

D'après la relation (8.90) et en appliquant la formule $\log(a/b) = -\log(b/a)$, il vient :

$$-I(X; Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(x_i, y_j) \log_2 \frac{P(x_i)}{P(x_i | y_j)} \quad (8.92)$$

En appliquant la règle de Bayes (relation 5.24), on obtient :

$$\frac{P(x_i)}{P(x_i | y_j)} = \frac{P(x_i)P(y_j)}{P(x_i, y_j)}$$

que l'on peut écrire de façon différente en invoquant la relation (8.6) :

$$-I(X; Y) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(x_i, y_j) \ln \frac{P(x_i)P(y_j)}{P(x_i, y_j)} \tag{8.93}$$

En utilisant l'inégalité (8.76), à savoir :

$$\ln \alpha \leq \alpha - 1$$

Il vient :

$$-I(X; Y) \leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(x_i, y_j) \left[\frac{P(x_i)P(y_j)}{P(x_i, y_j)} - 1 \right]$$

soit

$$-I(X; Y) \leq \frac{1}{\ln 2} \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(x_i)P(y_j) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(x_i, y_j) \right] \tag{8.94}$$

Comme on a :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(x_i)P(y_j) = \sum_{i=1}^m P(x_i) \sum_{j=1}^n P(y_j) = (1)(1) = 1$$

ainsi que :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n P(x_i, y_j) \right] = \sum_{i=1}^m P(x_i) = 1$$

La relation (8.94) se réduit à :

$$-I(X; Y) \leq 0$$

c'est-à-dire :

$$I(X; Y) \geq 0$$

8.16. On considère un canal non bruité (figure 8-5) avec $P(x_1) = \alpha$.

(a) Montrer que l'information mutuelle $I(X; Y)$ a pour expression :

$$I(X; Y) = H(Y) + p \log_2 p + (1 - p) \log_2(1 - p) \tag{8.95}$$

(b) Calculer $I(X; Y)$ pour $\alpha = 0,5$ et $p = 0,1$.

(c) Reprendre (b) pour $\alpha = 0,5$ et $p = 0,5$. Interpréter le résultat obtenu.

La figure 8-13 donne le diagramme du canal binaire symétrique assorti de ses probabilités d'entrée.

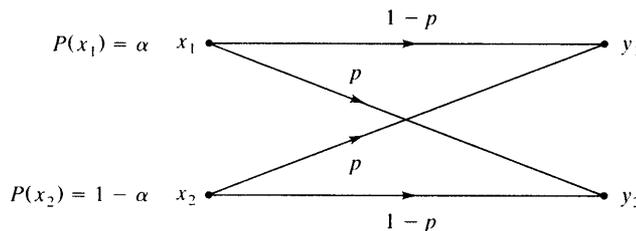


Fig. 8-13 Canal binaire symétrique

(a) En invoquant les relations (8.16), (8.17) et (8.20), on obtient :

$$\begin{aligned} [P(X, Y)] &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - p & p \\ p & 1 - p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(1 - p) & \alpha p \\ (1 - \alpha)p & (1 - \alpha)(1 - p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(x_1, y_1) & P(x_1, y_2) \\ P(x_2, y_1) & P(x_2, y_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En invoquant alors la relation (8.24), il vient :

$$\begin{aligned}
 H(Y|X) &= -P(x_1, y_1) \log_2 P(y_1|x_1) - P(x_1, y_2) \log_2 P(y_2|x_1) \\
 &\quad - P(x_2, y_1) \log_2 P(y_1|x_2) - P(x_2, y_2) \log_2 P(y_2|x_2) \\
 &= -\alpha(1-p) \log_2(1-p) - \alpha p \log_2 p \\
 &\quad - (1-\alpha)p \log_2 p - (1-\alpha)(1-p) \log_2(1-p) \\
 &= -p \log_2 p - (1-p) \log_2(1-p)
 \end{aligned} \tag{8.96}$$

D'où l'on tire, en invoquant la relation (8.31) :

$$\begin{aligned}
 I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
 &= H(Y) + p \log_2 p + (1-p) \log_2(1-p)
 \end{aligned}$$

(b) Lorsque $\alpha = 0,5$ et $p = 0,1$, on a, selon la relation (8.15) :

$$[P(Y)] = [0,5 \quad 0,5] \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix} = [0,5 \quad 0,5]$$

d'où $P(y_1) = P(y_2) = 0,5$.

D'après la relation (8.22), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 H(Y) &= -P(y_1) \log_2 P(y_1) - P(y_2) \log_2 P(y_2) \\
 &= -0,5 \log_2 0,5 - 0,5 \log_2 0,5 = 1 \\
 p \log_2 p + (1-p) \log_2(1-p) &= 0,1 \log_2 0,1 + 0,9 \log_2 0,9 = -0,469
 \end{aligned}$$

Donc :

$$I(X; Y) = 1 - 0,469 = 0,531$$

(c) Lorsque $\alpha = 0,5$ et $p = 0,5$,

$$[P(Y)] = [0,5 \quad 0,5] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} = [0,5 \quad 0,5]$$

$$H(Y) = 1$$

$$p \log_2 p + (1-p) \log_2(1-p) = 0,5 \log_2 0,5 + 0,5 \log_2 0,5 = -1$$

Donc :

$$I(X; Y) = 1 - 1 = 0$$

On remarquera que dans un tel cas ($p = 0,5$), il n'y a transmission d'aucune information. On aboutirait au même mode de fonctionnement en se débarrassant du canal et en remplaçant le récepteur par un tirage à pile ou face. Dans un tel cas, le canal est dit *sans utilité*.

CAPACITÉ D'UN CANAL

8.17. Démontrer la relation (8.36), à savoir que :

$$C_s = \log_2 m$$

où C_s est la capacité d'un canal sans perte et m le nombre de symboles de X .

Pour un canal sans perte — relation (8.82), problème 8.10 — on peut écrire que :

$$H(X|Y) = 0$$

D'où, selon la relation (8.28) :

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) \tag{8.97}$$

Il s'ensuit, d'après les relations (8.33) et (8.9), que :

$$C_s = \max_{\{P(X)\}} I(X; Y) = \max_{\{P(x_i)\}} H(X) = \log_2 m$$

8.18. Démontrer la relation (8.42), soit :

$$C_s = 1 + p \log_2 p + (1 - p) \log_2(1 - p)$$

où C_s est la capacité d'un CBS (figure 8-12).

Si l'on en croit la relation (8.95) — problème 8.16 — l'information mutuelle $I(X; Y)$ d'un CBS a pour expression :

$$I(X; Y) = H(Y) + p \log_2 p + (1 - p) \log_2(1 - p)$$

dont la valeur est maximale lorsque $H(Y)$ est maximal. Comme la sortie du canal délivre un signal binaire, $H(Y)$ est maximal lorsque les valeurs de sortie sont équiprobables — relation (8.9). Dans ce cas, $H(Y) = 1$, ce qui conduit à une valeur de la capacité cherchée qui a pour expression :

$$C_s = \max_{\{P(X)\}} I(X; Y) = 1 + p \log_2 p + (1 - p) \log_2(1 - p)$$

8.19. Quelle est la capacité du canal binaire à effacement de la figure 8-14 (problème 8.9)?

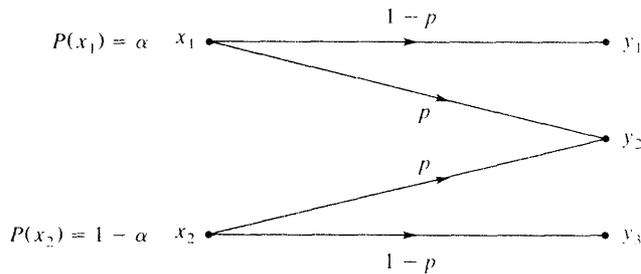


Fig. 8-14 Canal binaire à effacement

Soit $P(x_1) = \alpha$. Il s'ensuit que $P(x_2) = 1 - \alpha$. On a donc, selon la relation (8.81) :

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & P(y_2|x_1) & P(y_3|x_1) \\ P(y_1|x_2) & P(y_2|x_2) & P(y_3|x_2) \end{bmatrix}$$

D'après la relation (8.15), on a :

$$\begin{aligned} [P(Y)] &= [\alpha \quad 1-\alpha] \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix} \\ &= [\alpha(1-p) \quad p \quad (1-\alpha)(1-p)] \\ &= [P(y_1) \quad P(y_2) \quad P(y_3)] \end{aligned}$$

Selon la relation (8.17), on a :

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(1-p) & \alpha p & 0 \\ 0 & (1-\alpha)p & (1-\alpha)(1-p) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P(x_1, y_1) & P(x_1, y_2) & P(x_1, y_3) \\ P(x_2, y_1) & P(x_2, y_2) & P(x_2, y_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De plus, on peut obtenir des relations (8.22) et (8.24) les évaluations suivantes :

$$\begin{aligned}
 H(Y) &= - \sum_{j=1}^3 P(y_j) \log_2 P(y_j) \\
 &= -\alpha(1-p) \log_2 \alpha(1-p) - p \log_2 p - (1-\alpha)(1-p) \log_2 [(1-\alpha)(1-p)] \\
 &= (1-p)[- \alpha \log_2 \alpha - (1-\alpha) \log_2 (1-\alpha)] \\
 &\quad - p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)
 \end{aligned} \tag{8.98}$$

$$\begin{aligned}
 H(Y|X) &= - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 P(x_i, y_j) \log_2 P(y_j, x_i) \\
 &= -\alpha(1-p) \log_2 (1-p) - \alpha p \log_2 p \\
 &\quad - (1-\alpha)p \log_2 p - (1-\alpha)(1-p) \log_2 (1-p) \\
 &= -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)
 \end{aligned} \tag{8.99}$$

Ainsi, en invoquant les relations (8.31) et (8.72), il vient :

$$\begin{aligned}
 I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
 &= (1-p)[- \alpha \log_2 \alpha - (1-\alpha) \log_2 (1-\alpha)] \\
 &= (1-p)H(X)
 \end{aligned} \tag{8.100}$$

Puis en vertu des relations (8.33) et (8.73) :

$$C_s = \max_{\{P(X)\}} I(X; Y) = \max_{\{P(x_i)\}} (1-p)H(X) = (1-p) \max_{\{P(x_i)\}} H(X) = 1-p \tag{8.101}$$

CANAL AFFECTÉ D'UN BRUIT BLANC ADDITIF GAUSSIEN

8.20. Evaluer l'entropie différentielle $H(X)$ d'une variable aléatoire X uniformément distribuée dont la fonction de densité de probabilité a pour expression :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

pour (a) $a = 1$, (b) $a = 2$ et (c) $a = \frac{1}{2}$.

Si l'on en croit la relation (8.43), on a :

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 f_X(x) dx \\
 &= - \int_0^a \frac{1}{a} \log_2 \frac{1}{a} dx = \log_2 a
 \end{aligned} \tag{8.102}$$

- (a) $a = 1, H(X) = \log_2 1 = 0$
 (b) $a = 2, H(X) = \log_2 2 = 1$
 (c) $a = \frac{1}{2}, H(X) = \log_2 \frac{1}{2} = -\log_2 2 = -1$

Nota : l'entropie différentielle $H(X)$ n'est pas une mesure absolue de l'information.

8.21. La relation (8.43) définit l'entropie différentielle d'une variable aléatoire :

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log_2 f_X(x) dx$$

Trouver la fonction de densité de probabilité $f_X(x)$ qui maximise $H(X)$.

D'après les relations (5.34b) et (5.74), $f_X(x)$ doit satisfaire aux deux conditions suivantes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (8.103)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx = \sigma^2 \quad (8.104)$$

où μ est la moyenne de X et σ^2 sa variance. Il s'agit d'un problème de maximisation de $H(X)$ sous contrainte — relations (8.103) et (8.104). On applique donc la méthode des *multiplieurs de Lagrange*.

On forme tout d'abord la fonction :

$$\begin{aligned} G[f_X(x), \lambda_1, \lambda_2] &= H(X) + \lambda_1 \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx - 1 \right] + \lambda_2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx - \sigma^2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-f_X(x) \log_2 f_X(x) + \lambda_1 f_X(x) + \lambda_2 (x - \mu)^2 f_X(x) \right] dx - \lambda_1 - \lambda_2 \sigma^2 \end{aligned} \quad (8.105)$$

où λ_1 et λ_2 sont les multiplieurs de Lagrange. La maximisation de $H(X)$ exige donc que :

$$\frac{\partial G}{\partial f_X(x)} = -\log_2 f_X(x) - \log_2 e + \lambda_1 + \lambda_2 (x - \mu)^2 = 0 \quad (8.106)$$

Ce qui impose :

$$\log_2 f_X(x) = -\log_2 e + \lambda_1 + \lambda_2 (x - \mu)^2$$

soit

$$\ln f_X(x) = -1 + \frac{\lambda_1}{\log_2 e} + \frac{\lambda_2}{\log_2 e} (x - \mu)^2$$

On obtient donc :

$$f_X(x) = \exp \left[-1 + \frac{\lambda_1}{\log_2 e} + \frac{\lambda_2}{\log_2 e} (x - \mu)^2 \right] \quad (8.107)$$

En raison de contraintes imposées par les conditions (8.103) et (8.104), il faut que $\lambda_2 < 0$. En posant :

$$\exp \left(-1 + \frac{\lambda_1}{\log_2 e} \right) = a \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_2}{\log_2 e} = -b^2$$

on peut écrire la relation (8.107) comme suit :

$$f_X(x) = a e^{-b^2(x-\mu)^2} \quad (8.108)$$

En tenant compte de la relation (8.108) dans les relations (8.103) et (8.104), on obtient :

$$a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b^2(x-\mu)^2} dx = a \frac{\sqrt{\pi}}{b} = 1 \quad (8.109)$$

$$a \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 e^{-b^2(x-\mu)^2} dx = a \frac{\sqrt{\pi}}{2b^3} = \sigma^2 \quad (8.110)$$

Les valeurs de a et b^2 fournies par les relations (8.109) et (8.110) sont les suivantes :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad \text{et} \quad b^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$$

En portant ces valeurs dans la relation (8.108), on voit que la fonction $f_X(x)$ désirée a pour expression :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad (8.111)$$

Qui est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X de moyenne μ et de variance σ^2 . (voir relation 5.101).

- 8.22.** Montrer que la capacité d'un canal de largeur de bande infinie avec BBGA (bruit blanc gaussien additif) a pour expression :

$$C_{\infty} = \frac{1}{\ln 2} \frac{S}{\eta} \approx 1,44 \frac{S}{\eta} \quad \text{b/s} \quad (8.112)$$

où S est la puissance moyenne du signal et $\eta/2$ la puissance spectrale du bruit blanc gaussien.

D'après la relation (7.6), la puissance de bruit N a pour valeur $N = \eta B$. En invoquant la relation (8.48), on obtient :

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{\eta B} \right)$$

Posons $S/(\eta B) = \lambda$, il vient alors :

$$C = \frac{S}{\eta \lambda} \log_2(1 + \lambda) = \frac{1}{\ln 2} \frac{S}{\eta} \frac{\ln(1 + \lambda)}{\lambda} \quad (8.113)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} C_{\infty} &= \lim_{B \rightarrow \infty} B \log_2 \left(1 + \frac{S}{\eta B} \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \frac{S}{\eta} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \lambda)}{\lambda} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{\lambda \rightarrow 0} [\ln(1 + \lambda)]/\lambda = 1$, on obtient :

$$C_{\infty} = \frac{1}{\ln 2} \frac{S}{\eta} \approx 1,44 \frac{S}{\eta} \quad \text{b/s}$$

Remarquons que la relation (8.112) est utile pour évaluer la limite supérieure de performance d'un système de communication dont le canal de transmission peut être modélisé au moyen d'un canal avec BBGA.

- 8.23.** On considère un canal avec BBGA dont la bande passante est de 4 kHz et la densité spectrale de bruit $\eta/2 = 10^{-12}$ W/Hz. La puissance du signal nécessaire au récepteur a pour valeur 0,1 mW. Calculer la capacité de ce canal.

$$\begin{aligned} B &= 4000 \text{ Hz} \quad S = 0,1(10^{-3}) \text{ W} \\ N &= \eta B = 2(10^{-12})(4000) = 8(10^{-9}) \text{ W} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{S}{N} = \frac{0,1(10^{-3})}{8(10^{-9})} = 1,25(10^4)$$

Et d'après la relation (8.48) :

$$\begin{aligned} C &= B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \\ &= 4000 \log_2 [1 + 1,25(10^4)] = 54,44(10^3) \text{ b/s} \end{aligned}$$

- 8.24.** Un signal analogique de 4 kHz de largeur de bande est échantillonné à 1,25 fois la fréquence de Nyquist, chaque échantillon étant quantifié sur 256 niveaux équiprobables. On suppose que les échantillons sont statistiquement indépendants.

- Quel est le débit d'informations de la source?
- Peut-on transmettre sans erreur les signaux de cette source sur un canal avec BBGA de 10 kHz de bande passante et présentant un rapport signal sur bruit de 20 dB?
- Calculer le rapport S/N requis pour assurer une transmission sans erreur dans les conditions énoncées au (b).

- (d) Calculer la bande passante requise pour acheminer sans erreur les signaux de la source considérée sur un canal avec BBGA pour assurer un rapport S/N de 20 dB.

(a)

$$\begin{aligned} f_M &= 4(10^3) \text{ Hz} \\ \text{Fréquence de Nyquist} &= 2f_M = 8(10^3) \text{ éch/s} \\ r &= 8(10^3)(1,25) = 10^4 \text{ éch/s} \\ H(X) &= \log_2 256 = 8 \text{ b/éch} \end{aligned}$$

D'après la relation (8.10), le débit d'information R de la source a pour valeur :

$$R = rH(X) = 10^4(8) \text{ b/s} = 80 \text{ kb/s}$$

- (b) D'après la relation (8.48), on a :

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = 10^4 \log_2(1 + 10^2) = 66,6(10^3) \text{ b/s}$$

Comme $R > C$, on ne peut envisager une transmission sans erreur.

- (c) Le rapport signal sur bruit requis se déduit de la relation :

$$C = 10^4 \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \geq 8(10^4)$$

soit

$$\log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \geq 8$$

c'est-à-dire :

$$1 + \frac{S}{N} \geq 2^8 = 256 \rightarrow \frac{S}{N} \geq 255 = 24,1 \text{ dB}$$

Il faut un rapport signal sur bruit supérieur ou égal à 24,1 dB pour assurer une transmission sans erreur.

- (d) La bande passante nécessaire peut se déduire de la relation :

$$C = B \log_2(1 + 100) \geq 8(10^4)$$

soit

$$B \geq \frac{8(10^4)}{\log_2(1 + 100)} = 1,2(10^4) \text{ Hz} = 12 \text{ kHz}$$

La bande passante requise doit être supérieure ou égale à 12 kHz.

CODAGE DE SOURCE

- 8.25. On considère une source discrète sans mémoire X à deux symboles x_1 et x_2 , avec $P(x_1) = 0,9$ et $P(x_2) = 0,1$. Ces symboles sont codés comme l'indique le tableau ci-dessous :

Tableau 8-4

x_i	$P(x_i)$	Code
x_1	0,9	0
x_2	0,1	1

Calculer l'efficacité η et la redondance γ de ce code.

D'après la relation (8.49), la longueur moyenne L par symbole du code a pour valeur :

$$L = \sum_{i=1}^2 P(x_i)n_i = (0,9)(1) + (0,1)(1) = 1 \text{ b}$$

D'après la relation (8.7) :

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \sum_{i=1}^2 P(x_i) \log_2 P(x_i) \\
 &= -0,9 \log_2 0,9 - 0,1 \log_2 0,1 = 0,469 \text{ b/symbole}
 \end{aligned}$$

Ensuite, selon la relation (8.53), l'efficacité du codage η a pour expression :

$$\eta = \frac{H(X)}{L} = 0,469 = 46,9\%$$

Enfin, suivant la relation (8.51), la redondance γ du code a pour expression :

$$\gamma = 1 - \eta = 0,531 = 53,1\%$$

8.26. L'extension d'ordre deux de la source discrète sans mémoire X du problème 8.25, notée X^2 , consiste à traiter les symboles sources par paire. Le tableau 8-5 représente le codage correspondant. Calculer l'efficacité η et la redondance γ de ce codage étendu.

Tableau 8-5

a_i	$P(a_i)$	Code
$a_1 = x_1x_1$	0,81	0
$a_2 = x_1x_2$	0,09	10
$a_3 = x_2x_1$	0,09	110
$a_4 = x_2x_2$	0,01	111

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{i=1}^4 P(a_i)n_i = 0,81(1) + 0,09(2) + 0,09(3) + 0,01(3) \\
 &= 1,29 \text{ b/symbole}
 \end{aligned}$$

L'entropie de l'extension d'ordre deux de X , $H(X^2)$, a pour expression :

$$\begin{aligned}
 H(X^2) &= - \sum_{i=1}^4 P(a_i) \log_2 P(a_i) \\
 &= -0,81 \log_2 0,81 - 0,09 \log_2 0,09 - 0,09 \log_2 0,09 - 0,01 \log_2 0,01 \\
 &= 0,938 \text{ b/symbole}
 \end{aligned}$$

On en déduit l'efficacité η du code :

$$\eta = \frac{H(X^2)}{L} = \frac{0,938}{1,29} = 0,727 = 72,7\%$$

ainsi que la redondance γ du code :

$$\gamma = 1 - \eta = 0,273 = 27,3\%$$

On remarquera au passage que $H(X^2) = 2H(X)$.

8.27. On considère une source discrète sans mémoire X produisant les symboles x_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Le tableau 8-6 propose quatre codages binaires possibles.

Tableau 8-6

x_i	Code A	Code B	Code C	Code D
x_1	00	0	0	0
x_2	01	10	11	100
x_3	10	11	100	110
x_4	11	110	110	111

- (a) Montrer que les codes A, C et D satisfont à l'inégalité de Kraft, et que le code B ne la satisfait pas.
- (b) Montrer que les codes A et D sont déchiffrables de façon unique tandis que les codes B et C ne le sont pas.
- (a) En invoquant la relation (8.54), on obtient les résultats suivants :

Pour le code A :

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$$

$$K = \sum_{i=1}^4 2^{-n_i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Pour le code B :

$$n_1 = 1 \quad n_2 = n_3 = 2 \quad n_4 = 3$$

$$K = \sum_{i=1}^4 2^{-n_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8} > 1$$

Pour le code C :

$$n_1 = 1 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = n_4 = 3$$

$$K = \sum_{i=1}^4 2^{-n_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Pour le code D :

$$n_1 = 1 \quad n_2 = n_3 = n_4 = 3$$

$$K = \sum_{i=1}^4 2^{-n_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} < 1$$

Tous les codes sauf le code B satisfont à l'inégalité de Kraft.

- (b) Les codes A et D sont des codes sans préfixe. Ils sont par conséquent déchiffrables de façon unique. Le code B ne satisfait pas à l'inégalité de Kraft et n'est donc pas déchiffrable de façon unique. Bien que le code C satisfasse à l'inégalité de Kraft, il n'est pas déchiffrable de façon unique. Exemple : prenons la séquence binaire 0110110; une telle séquence peut correspondre aussi bien à la suite $x_1 x_2 x_1 x_4$ qu'à la suite $x_1 x_4 x_4$ des symboles émis par la source.

8.28. Démontrer la relation (8.52), c'est-à-dire :

$$L \geq H(X)$$

où L est la longueur moyenne par symbole des mots codés et $H(X)$ est l'entropie de la source.

D'après la relation (8.78) — problème 8.4 — on a :

$$\sum_{i=1}^m P_i \log_2 \frac{Q_i}{P_i} \leq 0$$

où l'égalité ne se produit que lorsque $Q_i = P_i$. Posons :

$$Q_i = \frac{2^{-n_i}}{K} \tag{8.114}$$

où (relation 8.54) :

$$K = \sum_{i=1}^m 2^{-n_i} \tag{8.115}$$

Il vient :

$$\sum_{i=1}^m Q_i = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^m 2^{-n_i} = 1 \tag{8.116}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m P_i \log_2 \frac{2^{-n_i}}{K P_i} &= \sum_{i=1}^m P_i \left(\log_2 \frac{1}{P_i} - n_i - \log_2 K \right) \\ &= - \sum_{i=1}^m P_i \log_2 P_i - \sum_{i=1}^m P_i n_i - (\log_2 K) \sum_{i=1}^m P_i \\ &= H(X) - L - \log_2 K \leq 0 \end{aligned} \tag{8.117}$$

L'inégalité de Kraft nous permet d'écrire que :

$$\log_2 K \leq 0 \quad (8.118)$$

Ce qui entraîne :

$$H(X) - L \leq \log_2 K \leq 0 \quad (8.119)$$

D'où

$$L \geq H(X)$$

L'égalité ayant lieu lorsque $K = 1$ et $P_i = Q_i$.

- 8.29.** Soit X une source discrète sans mémoire dont l'alphabet se compose de symboles x_i de probabilités associées $P(x_i) = P_i, i = 1, 2, \dots, m$. Montrer qu'un codage optimal de cette source impose la condition :

$$K = \sum_{i=1}^m 2^{-n_i} = 1 \quad (8.120)$$

ainsi que

$$n_i = \log_2 \frac{1}{P_i} = I_i \quad (8.121)$$

où n_i est la longueur du mot codé correspondant à x_i et I_i le contenu informatif de x_i .

D'après le résultat du problème 8.28, le codage optimal d'une source pour laquelle $L = H(X)$ impose $K = 1$ et $P_i = Q_i$. Ainsi, d'après les relations (8.115) et (8.114) :

$$K = \sum_{i=1}^m 2^{-n_i} = 1 \quad (8.122)$$

$$P_i = Q_i = 2^{-n_i} \quad (8.123)$$

Il s'ensuit que :

$$n_i = -\log_2 P_i = \log_2 \frac{1}{P_i} = I_i$$

On remarquera que la relation (8.121) est empreinte de bon sens : il faut affecter les codes les plus courts aux symboles les plus probables, ceux qui reviennent le plus souvent.

- 8.30.** On considère une source discrète sans mémoire dont l'alphabet se compose de symboles x_i , de probabilités associées $P(x_i) = P_i, i = 1, 2, \dots, m$. Soit n_i la longueur du mot codé correspondant au symbole x_i , satisfaisant à la condition :

$$\log_2 \frac{1}{P_i} \leq n_i \leq \log_2 \frac{1}{P_i} + 1 \quad (8.124)$$

Montrer que cette relation est compatible avec l'inégalité de Kraft et trouver l'encadrement de K défini par la relation (8.54).

La relation (8.124) peut être écrite comme suit :

$$-\log_2 P_i \leq n_i \leq -\log_2 P_i + 1 \quad (8.125)$$

soit

$$\log_2 P_i \geq -n_i \geq \log_2 P_i - 1$$

ou encore

$$2^{\log_2 P_i} \geq 2^{-n_i} \geq 2^{\log_2 P_i - 1}$$

Ce qui donne :

$$P_i \geq 2^{-n_i} \geq \frac{1}{2} P_i \quad (8.126)$$

On en déduit :

$$\sum_{i=1}^m P_i \geq \sum_{i=1}^m 2^{-n_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P_i \quad (8.127)$$

Soit en définitive :

$$1 \geq \sum_{i=1}^m 2^{-n_i} \geq \frac{1}{2} \quad (8.128)$$

ce qui indique que l'inégalité de Kraft (8.54) est satisfaite et que la valeur de K est encadrée de la façon suivante :

$$\frac{1}{2} \leq K \leq 1 \tag{8.129}$$

8.31. On considère une source discrète X d'alphabet x_i dont les symboles ont pour probabilités associées $P(x_i) = P_i, i = 1, 2, \dots, m$. Montrer qu'un codage construit en respectant la relation (8.124) satisfait à la condition :

$$H(X) \leq L \leq H(X) + 1 \tag{8.130}$$

où $H(X)$ désigne l'entropie de source et L est la longueur moyenne des mots du code.

En multipliant les termes de la relation (8.125) par P_i et en sommant sur i , on obtient :

$$-\sum_{i=1}^m P_i \log_2 P_i \leq \sum_{i=1}^m n_i P_i \leq \sum_{i=1}^m P_i (-\log_2 P_i + 1) \tag{8.131}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m P_i (-\log_2 P_i + 1) &= -\sum_{i=1}^m P_i \log_2 P_i + \sum_{i=1}^m P_i \\ &= H(X) + 1 \end{aligned}$$

La relation (8.131) se réduit donc à :

$$H(X) \leq L \leq H(X) + 1$$

CODAGE ENTROPIQUE

8.32. Une source discrète sans mémoire utilise quatre symboles x_1, x_2, x_3 et x_4 dont les probabilités associées sont $P(x_1) = \frac{1}{2}, P(x_2) = \frac{1}{4}$ et $P(x_3) = P(x_4) = \frac{1}{8}$. Construire un code de Shannon-Fano pour X . Montrer que ce code présente un caractère optimal, à savoir que $n_i = I(x_i)$ et que son efficacité est de 100%.

On construit le code de Shannon-Fano de la façon suivante (tableau 8-7) :

Tableau 8-7

x_i	$P(x_i)$	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Code
x_1	$\frac{1}{2}$	0			0
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0		10
x_3	$\frac{1}{8}$	1	1	0	110
x_4	$\frac{1}{8}$	1	1	1	111

On peut écrire que :

$$\begin{aligned} I(x_1) &= -\log_2 \frac{1}{2} = 1 = n_1 & I(x_2) &= -\log_2 \frac{1}{4} = 2 = n_2 \\ I(x_3) &= -\log_2 \frac{1}{8} = 3 = n_3 & I(x_4) &= -\log_2 \frac{1}{8} = 3 = n_4 \\ H(X) &= \sum_{i=1}^4 P(x_i) I(x_i) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{8}(3) + \frac{1}{8}(3) = 1,75 \\ L &= \sum_{i=1}^4 P(x_i) n_i = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{8}(3) + \frac{1}{8}(3) = 1,75 \\ \eta &= \frac{H(X)}{L} = 1 = 100\% \end{aligned}$$

8.33. Une source discrète sans mémoire X produit cinq symboles équiprobables.

- (a) Construire un code de Shannon-Fano relatif à cette source et en calculer l'efficacité.
 (b) Construire un autre code de Shannon-Fano et comparer les résultats obtenus.
 (c) Construire un code de Huffman relatif à cette source et comparer les résultats.
 (a) On construit un code de Shannon-Fano en choisissant deux sous-ensembles de départs approximativement équiprobables, 0,4 et 0,6, de la façon suivante (tableau 8-8) :

Tableau 8-8

x_i	$P(x_i)$	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Code
x_1	0,2	0	0		00
x_2	0,2	0	1		01
x_3	0,2	1	0		10
x_4	0,2	1	1	0	110
x_5	0,2	1	1	1	111

$$H(X) = \sum_{i=1}^5 P(x_i) \log_2 P(x_i) = 5(-0,2 \log_2 0,2) = 2,32$$

$$L = \sum_{i=1}^5 P(x_i) n_i = 0,2(2 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2,4$$

L'efficacité de ce code a pour valeur :

$$\eta = \frac{H(X)}{L} = \frac{2,32}{2,4} = 0,967 = 96,7\%$$

- (b) On obtient un autre code de Shannon-Fano en partant de deux autres sous-ensembles approximativement équiprobables, 0,6 et 0,4, de la façon suivante (tableau 8-9) :

Tableau 8-9

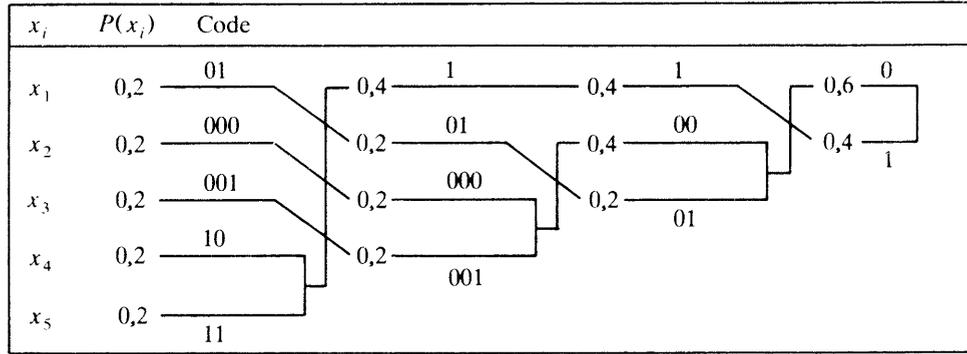
x_i	$P(x_i)$	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Code
x_1	0,2	0	0		00
x_2	0,2	0	1	0	010
x_3	0,2	0	1	1	011
x_4	0,2	1	0		10
x_5	0,2	1	1		11

$$L = \sum_{i=1}^5 P(x_i) n_i = 0,2(2 + 3 + 3 + 2 + 2) = 2,4$$

Comme la longueur moyenne des mots codés est la même qu'en (a), l'efficacité de ce deuxième code a la même valeur que pour le premier.

- (c) On obtient un code de Huffman de la façon suivante (tableau 8-10) :

Tableau 8-10



$$L = \sum_{i=1}^5 P(x_i)n_i = 0,2(2 + 3 + 3 + 2 + 2) = 2,4$$

Comme la longueur moyenne des mots codés a, ici encore, la même valeur, l'efficacité de ce dernier code est identique à celle des deux précédents.

8.34. Une source discrète sans mémoire utilise cinq symboles x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 , dont les probabilités associées sont $P(x_1) = 0,4$, $P(x_2) = 0,19$, $P(x_3) = 0,16$, $P(x_4) = 0,15$ et $P(x_5) = 0,1$.

- (a) Construire un code de Shannon-Fano pour X et en calculer l'efficacité.
- (b) Construire un code de Huffman et comparer avec le résultat précédent.
- (a) La construction d'un code de Shannon-Fano se fait de la façon suivante (tableau 8-11) :

Tableau 8-11

x_i	$P(x_i)$	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Code
x_1	0,4	0	0		00
x_2	0,19	0	1		01
x_3	0,16	1	0		10
x_4	0,15	1	1	0	110
x_5	0,1	1	1	1	111

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \sum_{i=1}^5 P(x_i) \log_2 P(x_i) \\
 &= -0,4 \log_2 0,4 - 0,19 \log_2 0,19 - 0,16 \log_2 0,16 \\
 &\quad - 0,15 \log_2 0,15 - 0,1 \log_2 0,1 \\
 &= 2,15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{i=1}^5 P(x_i)n_i \\
 &= 0,4(2) + 0,19(2) + 0,16(2) + 0,15(3) + 0,1(3) = 2,25
 \end{aligned}$$

$$\eta = \frac{H(X)}{L} = \frac{2,15}{2,25} = 0,956 = 95,6\%$$

- (b) Calculer P_e lorsque $p = 0,01$ pour $n = 3, 5$ et 7 .
 (a) La probabilité de recevoir erroné le $i^{\text{ième}}$ bit a pour valeur :

$$\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

D'où la probabilité cherchée :

$$P_e = \sum_{i=m+1}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

- (b) Pour $n = 3, m = 1$ et $p = 0,01$, on a :

$$P_e = \binom{3}{2} (0,01)^2 (0,99) + \binom{3}{3} (0,01)^3 \approx 3(10^{-4})$$

Pour $n = 5, m = 2$ et $p = 0,01$, on a :

$$\begin{aligned} P_e &= \binom{5}{3} (0,01)^3 (0,99)^2 + \binom{5}{4} (0,01)^4 (0,99) + \binom{5}{5} (0,01)^5 \approx 3(10^{-4}) \\ &= 9,85(10^{-6}) \approx 10^{-5} \end{aligned}$$

Pour $n = 7, m = 3$ et $p = 0,01$, on a :

$$\begin{aligned} P_e &= \binom{7}{4} (0,01)^4 (0,99)^3 + \binom{7}{5} (0,01)^5 (0,99)^2 \\ &\quad + \binom{7}{6} (0,01)^6 (0,99) + \binom{7}{7} (0,01)^7 \\ &= 3,416(10^{-7}) \end{aligned}$$

- 8.37.** On considère un codage utilisant un bit de contrôle de parité par bloc de k bits ($d_1 d_2 \dots d_k$) transmis. Ce bit c_1 est choisi de façon à satisfaire à la règle de parité suivante :

$$d_1 \oplus d_2 \oplus \dots \oplus d_k \oplus c_1 = 0$$

- (a) Pour $k = 3$, donner tous les mots codés possibles du (4,3) code.
 (b) Quels sont les mots erronés que peut détecter ce (4,3) code?
 (c) Calculer la probabilité de non-détection d'un symbole erroné en supposant que les erreurs de symbole sont indépendantes et que la probabilité d'une erreur de symbole est $p = 0,01$.
 (a) Il existe $2^k = 2^3 = 8$ mots codés possibles dont le tableau 8-13 donne la liste.

Tableau 8-13

Donnée codée	Bit de parité	Mot codé
000	0	0000
001	1	0011
010	1	0101
011	0	0110
100	1	1001
101	0	1010
110	0	1100
111	1	1111

- (b) Le (4,3) code est capable de détecter toutes les configurations à 1 bit ou à 3 bits erronés.
 (c) La probabilité de non-détection d'un symbole erroné P_{nde} est égale à la probabilité d'existence de 2 ou 4 erreurs réparties aléatoirement dans un mot codé, soit :

$$\begin{aligned} P_{nde} &= \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 + \binom{4}{4} p^4 \\ &= 6p^2(1-p)^2 + p^4 \\ &= 6(0,01)^2(0,99)^2 + 0,01^4 \approx 5,88(10^{-4}) \end{aligned}$$

CODAGE ET DÉTECTION D'ERREUR

- 8.38. On considère un (6,3) code linéaire dont les trois bits de contrôle de parité d'un bloc c_4, c_5 et c_6 sont obtenus de la façon suivante :

$$\begin{aligned} C_4 &= d_1 \oplus d_3 \\ C_5 &= d_1 \oplus d_2 \oplus d_3 \\ C_6 &= d_1 \oplus d_2 \end{aligned}$$

- (a) Ecrire la matrice génératrice de ce codage.
 (b) Donner tous les mots codés possibles de ce code.
 (c) On suppose que l'on a reçu le mot 010111. Décoder ce mot en identifiant les bits erronés et en les corrigeant.
 (a) Les équations ci-dessus permettent d'écrire — relations (8.56) et (8.59) :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

D'où, en vertu de la relation (8.56) :

$$G = [I_3 \quad P^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (b) Comme $k = 3$, on a $2^3 = 8$ mots codés possibles. Si donc $\mathbf{d} = [101]$, en invoquant la relation (8.59), il vient :

$$\mathbf{c} = \mathbf{d}G = [1 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$$

On construit de même les autres mots de ce code. Ils apparaissent sur le tableau 8-14.

Tableau 8-14

d	c	d	c
000	000000	100	100111
001	001110	101	101001
010	010011	110	110100
011	011101	111	111010

- (c) D'après la relation (8.61), on a :

$$H^T = \begin{bmatrix} P^T \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Or, on a :

$$\mathbf{r} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

D'après la relation (8.66), le syndrome \mathbf{s} de \mathbf{r} a pour expression :

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}H^T = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Puisque \mathbf{s} est identique à la quatrième ligne de H^T , le quatrième bit est erroné, le mot correct était 010011 et le mot de données correct a pour valeur 010.

8.39. La matrice de contrôle de parité d'un code est la suivante :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Déterminer la matrice génératrice du code.
 (b) Trouver le mot codé qui a pour début 101....
 (c) On a reçu le mot 110110. Déchiffrer ce mot.
 (a) Comme H est une matrice 6×3 , $n = 6$ et $k = 3$. En invoquant la relation (8.61), on obtient :

$$P^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc, d'après la relation (8.58), la matrice génératrice G est la suivante :

$$G = [I_3 \quad P^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) On a :

$$\mathbf{c} = \mathbf{d}G = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$$

- (c) On peut écrire que :

$$\mathbf{r} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

d'où l'on déduit :

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}H^T = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 1]$$

Comme \mathbf{s} est identique à la deuxième ligne de la matrice H^T , le deuxième bit est erroné, le codage correct est 100110, et le mot de données correct est 100.

8.40. Le codage répétitif étudié au problème 8.36 est un $(n, 1)$ code par blocs. Ce code ne comporte que deux mots codés : un mot dont tous les bits valent 0 et un mot dont tous les bits valent 1. Considérons un codage où $n = 5$.

- (a) Construire la matrice génératrice G de ce $(5, 1)$ codage par blocs.
 (b) Déterminer l'ensemble des mots de ce code au moyen de la matrice G .
 (c) Quelle est la matrice de contrôle de parité H de ce code?
 (d) Montrer que $GH^T = \mathbf{0}$.
 (a) Il y a 4 bits de parité identiques au bit de données. Pour $k = 1$, la matrice identité I_k se réduit à la valeur 1 et si l'on en croit les relations (8.56) et (8.57), la matrice P^T a pour expression :

$$P^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

La relation (8.58) nous permet de construire la matrice G :

$$G = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

- b) Lorsque $d_1 = 0$,

$$\mathbf{c}_1 = [0][1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Lorsque $d_1 = 1$,

$$\mathbf{c}_2 = [1][1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

- (c) D'après la relation (8.60), la matrice de contrôle de parité H a pour expression :

$$H = [P \ I_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (d) En effectuant le produit GH^T on obtient :

$$GH^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 0 \ 0] = \mathbf{0}$$

8.41. Revenons sur le $(5, 1)$ code à répétition du problème 8.40.

- (a) Calculer le syndrome \mathbf{s} des cinq configurations présentant un bit erroné.
 (b) Faire de même pour les dix configurations qui présentent deux bits erronés.
 (c) Montrer que le $(5, 1)$ code répétitif est capable de corriger jusqu'à deux erreurs.
 (a) D'après le problème 8.40, on a :

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si l'on applique la relation (8.66), le syndrome \mathbf{s} a pour expression :

$$\mathbf{s} = \mathbf{e}H^T$$

où \mathbf{e} est le vecteur d'erreur. Soit $\mathbf{e} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, il vient :

$$\mathbf{s} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

On calcule les autres syndromes de la même façon; le tableau 8-15 en donne la liste.

Tableau 8-15

e	s
10000	1111
01000	1000
00100	0100
00010	0010
00001	0001

- (b) Le vecteur d'erreur a pour expression [1 1 0 0 0], il vient donc :

$$s = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

On notera au passage que s est la somme modulo 2 de la première et de la deuxième ligne de la matrice H^T (problème 8.43).

On évalue de la même manière les autres syndromes dont le tableau 8-16 donne la liste.

Tableau 8-16

e	s
11000	0111
10100	1011
10010	1101
10001	1110
01100	1100
01010	1010
01001	1001
00110	0110
00101	0101
00011	0011

- (c) Comme les syndromes de toutes les configurations à une ou deux erreurs sont différents, le (5,1) code à répétition étudié est capable de corriger jusqu'à deux erreurs.

8.42. Montrer que tous les vecteurs d'erreurs dont la différence est un vecteur code ont même syndrome.

Si le code comporte k bits de données, il existe 2^k vecteurs-codes distinct, que l'on note c_i , $i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$. Pour tout vecteur d'erreur e , on peut définir 2^k vecteurs d'erreur distincts $f e_i$ tels que :

$$e_i = e \oplus c_i \quad i = 0, 1, \dots, 2^k - 1 \quad (8.134)$$

En postmultipliant les deux membres de la relation (8.134) par H^T et en invoquant la relation (8.62), il vient :

$$\begin{aligned} e_i H^T &= (e \oplus c_i) H^T = e H^T \oplus c_i H^T \\ &= e H^T \oplus 0 = e H^T = s \end{aligned} \quad (8.135)$$

- 8.43.** Montrer que le syndrome \mathbf{s} est la somme modulo 2 des lignes de la matrice H^T qui correspondent à la localisation des erreurs dans les mots erronés.

Exprimons la matrice H^T sous la forme suivante :

$$H^T = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_n \end{bmatrix} \quad (8.136)$$

En portant la relation (8.136) dans la relation (8.66), on peut exprimer le syndrome \mathbf{s} comme :

$$\mathbf{s} = \mathbf{e}H^T = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n e_i \mathbf{h}_i \quad (8.137)$$

où e_i est le $i^{\text{ième}}$ élément du vecteur d'erreur \mathbf{e} qui a pour expression :

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe une erreur en position } i \\ 0 & \text{s'il n'y a pas d'erreur en position } i \end{cases}$$

- 8.44.** Démontrer la relation (8.67), à savoir que le nombre de bits de contrôle de parité $n - k$ d'un (n, k) code par blocs linéaire capable de corriger jusqu'à t erreurs par mot codé doit respecter la limite de Hamming :

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$$

Il existe en tout 2^{n-k} syndromes y compris le syndrome dont tous les bits sont nuls. Chacun de ces syndromes correspond à une configuration erronée particulière. Le nombre de configurations à i erreurs d'un mot codé de n bits est égal au nombre de choix de i bits parmi n , c'est-à-dire $\binom{n}{i}$.

Il en résulte que le nombre total de configurations erronées est égal à :

$$\sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$$

où t est le nombre maximal d'erreurs d'une configuration erronée. Si donc un (n, k) code linéaire par blocs est capable de corriger jusqu'à t erreurs, le nombre total de syndromes ne doit pas être inférieur au nombre total de configurations erronées. On doit donc avoir :

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}$$

- 8.45.** On considère un code capable de corriger une erreur sur des mots codés à 11 bits de données.

- (a) Combien faut-il de bits de contrôle de parité à ce code ?
 (b) Quelle est la matrice de contrôle de parité H de ce code ?
 (a) D'après la relation (8.67)

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^1 \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n$$

Posons $n - k = m$. Soit $k = 11$, on a $n = m + 11$, il vient :

$$2^m \geq 12 + m \rightarrow m \geq 4$$

Il faut au moins 4 bits de contrôle de parité.

(b) D'après la relation (8.61), on a :

$$H^T = \begin{bmatrix} P^T \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^T \\ I_4 \end{bmatrix}$$

Pour que le code détecte une seule erreur, il faut que les 11 premières lignes de la matrice H^T soient uniques. Elles doivent aussi être différentes des 4 dernières lignes qui ne comportent qu'un 1 par ligne et ne peuvent être identiquement nulles.

Avec ces conditions, une matrice de contrôle de parité H (transposée de H^T) pour le (15,11) code étudié ici a pour expression :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CODAGE PAR BLOCS LINÉAIRE ET CORRECTION D'ERREUR

8.46. On considère les vecteurs-codes qui suivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \\ \mathbf{c}_2 &= [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1] \\ \mathbf{c}_3 &= [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1] \end{aligned}$$

- (a) Calculer $d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$, $d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3)$ et $d(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$.
- (b) Montrer que :

$$d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) + d(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) \geq d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3)$$

- (a) En invoquant la relation (8.69), on obtient :

$$\begin{aligned} d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) &= w(\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_2) = w[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] = 5 \\ d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3) &= w(\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_3) = w[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1] = 3 \\ d(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) &= w(\mathbf{c}_2 \oplus \mathbf{c}_3) = w[1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] = 2 \end{aligned}$$

- (b)

$$d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) + d(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) = 5 + 2 \geq 3 = d(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3)$$

8.47. Montrer que si \mathbf{c}_i et \mathbf{c}_j sont deux vecteurs-codes d'un (n, k) code par blocs linéaire alors leur somme est aussi un vecteur-code.

Comme tous les vecteurs-codes \mathbf{e} doivent satisfaire à la relation (8.70), on a :

$$\mathbf{c}_i H^T = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{c}_j H^T = \mathbf{0}$$

Donc :

$$(\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{c}_j) H^T = \mathbf{c}_i H^T \oplus \mathbf{c}_j H^T = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{8.138}$$

ce qui montre que $\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{c}_j$ est aussi un vecteur-code.

8.48. Démontrer le théorème 8.1, à savoir que la distance minimale sur un codage linéaire par blocs est égale au plus petit poids de Hamming des vecteurs non nuls du code.

D'après la relation (8.69) :

$$d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = w(\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{c}_j)$$

d'où l'on déduit que :

$$d_{\min} = \min_{\mathbf{c}_i \neq \mathbf{c}_j} d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = \min_{\mathbf{c}_i \neq \mathbf{c}_j} w(\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{c}_j) \tag{8.139}$$

En utilisant le résultat du problème 8.47, la relation (8.139) devient :

$$d_{\min} = \min_{\mathbf{c} \neq \mathbf{0}} w(\mathbf{c}) \tag{8.140}$$

8.49. Démontrer le théorème 8.2, à savoir que la distance minimale d'un code linéaire par blocs est égale au nombre minimal de lignes de H^T dont la somme est égale au vecteur $\mathbf{0}$.

D'après la relation (8.70), on a :

$$\mathbf{c}H^T = \mathbf{0}$$

Le produit $\mathbf{c}H^T$ est une combinaison linéaire des lignes de H^T (voir problème 8.43), le nombre minimal des lignes de H^T dont la somme est égale à $\mathbf{0}$ a pour valeur :

$$\min_{\mathbf{c} \neq \mathbf{0}} w(\mathbf{c})$$

qui est égal à d_{\min} d'après la relation (8.140).

8.50. On considère à nouveau le (6,3) code du problème 8.38.

- (a) Montrer que $d_{\min} = 3$ et que ce code est capable de détecter une seule erreur.
 (b) En appliquant la règle de la distance minimale relative au déchiffrement, reprendre le (c) du problème 8.38.
 (a) D'après le (b) du problème 8.38, les vecteurs-codes et leurs poids de Hamming ont les valeurs listées dans le tableau 8-17.

Tableau 8-17

\mathbf{c}_i	Poids de Hamming
$\mathbf{c}_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$	0
$\mathbf{c}_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]$	3
$\mathbf{c}_3 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$	3
$\mathbf{c}_4 = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$	4
$\mathbf{c}_5 = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$	4
$\mathbf{c}_6 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$	3
$\mathbf{c}_7 = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$	3
$\mathbf{c}_8 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]$	4

Comme d_{\min} est le plus petit poids de Hamming des vecteurs non nuls du code, $d_{\min} = 3$. On a donc, selon la relation (8.71) :

$$d_{\min} = 3 \geq 2t + 1$$

relation satisfaite pour $t = 1$. On en déduit que ce code ne sait corriger qu'une seule erreur.

- (b) Le vecteur reçu \mathbf{r} a pour valeur : $[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$. Selon la relation (8.69), il vient :

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{c}_1) = 4 \quad d(\mathbf{r}, \mathbf{c}_5) = 2$$

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{c}_2) = 3 \quad d(\mathbf{r}, \mathbf{c}_6) = 5$$

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{c}_3) = 1 \quad d(\mathbf{r}, \mathbf{c}_7) = 3$$

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{c}_4) = 2 \quad d(\mathbf{r}, \mathbf{c}_8) = 4$$

La distance minimale entre les vecteurs du code et le vecteur reçu a pour valeur :

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{c}_3) = 1$$

On en conclut donc que le vecteur $\mathbf{c}_3 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$ a été émis et que les bits de données étaient «010», ce résultat étant identique au (c) du problème 8.38.

8.51 On considère un (7,4) code linéaire par blocs dont la matrice de contrôle de parité a pour expression :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Construire les mots de ce (7,4) code.
 (b) Montrer qu'il s'agit d'un code de Hamming.
 (c) Illustrer la relation entre distance minimale et structure de la matrice de contrôle de parité H en étudiant le cas du mot codé 0101100.
 (a) D'après les relations (8.60) et (8.58), la matrice génératrice G de ce code a pour expression :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Puisque $k = 4$, il existe $2^k = 16$ mots distincts dans ce code. A chaque valeur de donnée correspond un mot codé, que l'on obtient au moyen de la relation (8.57); le tableau 8-18 en donne la liste.

Tableau 8-18

Donnée codée	Mot codé	Poids de Hamming
0000	0000000	0
0001	0001111	4
0010	0010101	3
0011	0011010	3
0100	0100011	3
0101	0101100	3
0110	0110110	4
0111	0111001	4
1000	1000110	3
1001	1001001	3
1010	1010011	4
1011	1011100	4
1100	1100101	4
1101	1101010	4
1110	1110000	3
1111	1111111	7

- (b) Le tableau 8-18 donne aussi la liste des poids de Hamming de l'ensemble des mots du code. Comme le poids minimal des mots non nuls a pour valeur 3, on en déduit que $d_{\min} = 3$. La relation (8.71) nous permet donc de dire que ce code est capable de corriger une seule erreur de transmission.

Comme nous avons $n = 7$ et $k = 4$, on a :

$$2^{n-k} = 2^3 = 8$$

$$\sum_{i=0}^1 \binom{7}{i} = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} = 1 + 7 = 8$$

L'égalité se produit à la limite de Hamming — relation (8.67) — et il s'agit donc bien d'un code de Hamming.

- (c) Pour le vecteur $\mathbf{c} = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$, la multiplication matricielle de la relation (8.70) nous conduit à remarquer que la somme modulo 2 de la deuxième, la quatrième et la cinquième ligne de H^T est égale au vecteur nul :

$$[0 \ 1 \ 1] \oplus [1 \ 1 \ 1] \oplus [1 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 0]$$

Un calcul identique portant sur les 14 autres vecteurs non nuls indique que le plus petit nombre de lignes de H^T dont la somme est égale à $\mathbf{0}$ a pour valeur 3, qui est égal à d_{\min} (théorème 8.2).

Problèmes supplémentaires

- 8.52. On considère une source X qui produit cinq symboles avec des probabilités $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ et $\frac{1}{16}$. Déterminer l'entropie de source $H(X)$.

Réponse : 1,875 b/symbole

- 8.53. Calculer l'information moyenne contenue dans la langue française, en supposant que les 26 lettres de l'alphabet ont des probabilités d'occurrence identiques.

Réponse : 4,7 b/caractère

- 8.54. Deux canaux binaires symétriques (CBS) sont connectés en série, comme le représente la figure 8-15.

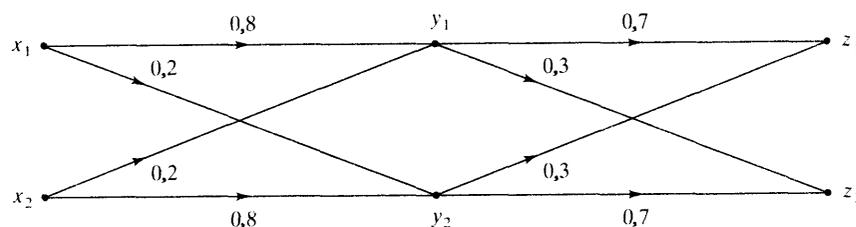


Fig. 8-15

- (a) Trouver la matrice définissant le canal obtenu.
 (b) Calculer $P(z_1)$ et $P(z_2)$ dans le cas où $P(x_1) = 0,6$ et $P(x_2) = 0,4$.

Réponse :

(a) $\begin{bmatrix} 0,62 & 0,38 \\ 0,38 & 0,62 \end{bmatrix}$

(b) $P(z_1) = 0,524$ $P(z_2) = 0,476$

- 8.55. On considère le canal discret sans mémoire représenté sur la figure 8-16.

- (a) Calculer les probabilités en sortie lorsque $P(x_1) = \frac{1}{2}$ et $P(x_2) = \frac{1}{4}$.
 (b) Calculer l'entropie de sortie $H(Y)$.

Réponses : (a) $P(y_1) = 7/24$, $P(y_2) = 17/48$ et $P(y_3) = 17/48$

(b) 1,58 b/symbole

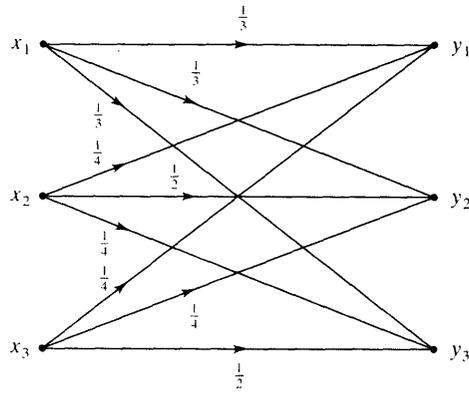


Fig. 8-16

8.56. Démontrer la relation (8.32), c'est-à-dire :

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

Indication : Utiliser les relations (8.28) et (8.26).

8.57. Montrer que $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$, l'égalité n'ayant lieu que si, et seulement si, X et Y sont indépendants.

Indication : Utiliser les relations (8.30) et (8.32).

8.58. Montrer que, pour un canal déterministe :

$$H(Y|X) = 0$$

Indication : Utiliser la relation (8.24) en remarquant que, dans le cas d'un canal déterministe, $P(y_i|x_j)$ ne prend que deux valeurs, 1 ou 0.

8.59. On considère un canal dont le signal d'entrée est X et le signal de sortie Y . Montrer que si X et Y sont statistiquement indépendants, alors $H(X|Y) = H(X)$ et $I(X; Y) = 0$.

Indication : Tenir compte des relations (5.48) et (5.49) dans les relations (8.24) et (8.28).

8.60. On définit un canal de transmission au moyen de la matrice ci-après.

- (a) Donner un schéma de ce canal.
- (b) Calculer la capacité de ce canal.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Réponse : (a) voir figure 8-17.

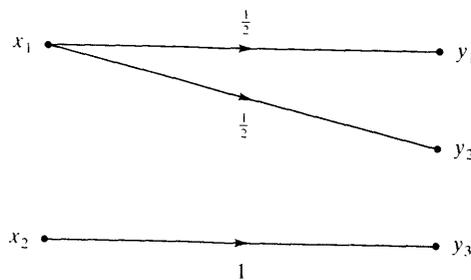


Fig. 8-17

(b) 1 b/symbole

- 8.61.** Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité $f_X(x)$ et soit $Y = aX + b$, a et b étant des constantes. Calculer $H(Y)$ en fonction de $H(X)$.

Réponse : $H(Y) = H(X) + \log_2 a$

- 8.62.** Trouver l'entropie différentielle $H(X)$ d'une variable aléatoire gaussienne X de moyenne nulle et de variance σ_X^2 .

Réponse : $H(X) = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e\sigma_X^2)$.

- 8.63.** On considère un canal de transmission affecté d'un BBGA (bruit blanc gaussien additif) tel que défini par la relation (8.46), à savoir :

$$Y = X + n$$

où X et Y sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie du canal, n étant un BBGA de moyenne nulle et de variance σ_n^2 . Evaluer l'information mutuelle moyenne $I(X; Y)$ lorsque le signal d'entrée est lui aussi gaussien, à moyenne nulle et de variance σ_X^2 .

Réponse : $I(X; Y) = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\sigma_n^2} \right)$

- 8.64.** Calculer la capacité d'un canal affecté d'un BBGA, dont la bande passante est de 1MHz et dont le rapport signal sur bruit vaut 40 dB.

Réponse : 13,29 Mb/s

- 8.65.** On considère une source discrète produisant m symboles équiprobables $x_i, i = 1, 2, \dots, m$.

- (a) Montrer que l'utilisation d'un code de longueur fixe est la solution la plus efficace pour représenter l'ensemble $\{x_i\}$.
 (b) Soit n_o la longueur des mots de ce code. Montrer que si $n_o = \log_2 m$, l'efficacité du code est de 100%.

Indication : Utiliser les relations (8.49) et (8.52).

- 8.66.** Construire un code de Huffman pour la source discrète sans mémoire du problème 8.32 et montrer qu'il est optimal.

Réponse :

Symboles :	x_1	x_2	x_3	x_4
Code :	0	10	110	111

- 8.67.** Une source discrète sans mémoire produit cinq symboles x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 avec les probabilités respectives 0,2, 0,15, 0,05, 0,1 et 0,5.

- (a) Construire un code de Shannon-Fano pour X et calculer l'efficacité de ce code.
 (b) Reprendre la question (a) avec un code de Huffman.

Réponse :

(a)

Symboles :	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Code :	10	110	1111	1110	0

Efficacité du code : $\eta = 98,6\%$.

(b)

Symboles :	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Code :	11	100	1011	1010	0

Efficacité du code : $\eta = 98,6\%$.

- 8.68.** Montrer que les codes du problème 8.33 satisfont à l'inégalité de Kraft.

Indication : Appliquer la relation (8.54).

8.69. On considère un (6,3) code linéaire par blocs dont la matrice de contrôle de parité H a pour expression :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Quelle est la matrice génératrice G de ce code?
 (b) Quel est le mot codé dont le groupe données est 101?

Réponse :

(a)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) 101010

8.70. En se plaçant dans le contexte du codage de Hamming étudié au problème 8.51, déchiffrer le mot 0111100.

Réponse : 0101

8.71. On considère un (n, k) code par blocs linéaire de matrice génératrice G et de matrice de contrôle de parité H . Le $(n, n - k)$ code engendré par H est appelé *code dual* du (n, k) code. Montrer que la matrice G est la matrice de contrôle de parité du code dual.

Indication : Transposer matriciellement la relation (8.62).

8.72. Montrer que tous les vecteurs codes d'un (n, k) codage linéaire par blocs sont orthogonaux aux vecteurs de son code dual (le vecteur \mathbf{x} est orthogonal au vecteur \mathbf{c} si $\mathbf{x}\mathbf{c}^T = 0$, où \mathbf{c}^T est le transposé du vecteur ligne \mathbf{c}).

Indication : Utiliser la relation (8.62).

8.73. Quel est le code dual du (7,4) code de Hamming étudié dans le problème 8.51? Trouver la distance minimale d_{\min} de ce code dual.

Réponse :

$$\begin{array}{cccc} 0000000 & 0111001 & 1101010 & 1010011 \\ 1011100 & 1100101 & 0110110 & 0001111 \\ d_{\min} = 4 \end{array}$$

8.74. Un code comporte les mots 1101000, 0111001, 0011010, 1001011, 1011100 et 0001101. Si l'on reçoit 1101011, quel est le code qui a été émis?

Réponse : 1001011

8.75. Montrer que pour tout (n, k) code linéaire par blocs on a la relation :

$$d_{\min} \leq n - k + 1$$

Indication : Appliquer le théorème 8.2 pour montrer que le rang de la matrice H est $d_{\min} - 1$.

Transformée de Fourier

DÉFINITION

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Théorèmes de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Tableau A-1 Propriétés de la transformée de Fourier

Propriété	$x(t)$	$X(\omega)$
Linéarité	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$
Décalage temporel	$x(t - t_0)$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Homothétie	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Inversion	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Dualité	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Translation	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega - \omega_0)$
Modulation	$x(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$
Dérivation en temps	$x'(t)$	$j\omega X(\omega)$
Dérivation en fréquence	$-jtx(t)$	$X'(\omega)$
Intégration	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Multiplication	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

Tableau A-2 Paires de transformées de Fourier

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\frac{1}{\pi t}$	$-j\text{sgn}(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$e^{-at}u(t) \quad a > 0$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$te^{-at}u(t) \quad a > 0$	$\frac{1}{(j\omega + a)^2}$
$e^{-a t } \quad a > 0$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
$p_a(t) = \begin{cases} 1 & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$	$2a \frac{\sin \omega a}{\omega a}$
$\frac{\sin at}{\pi t}$	$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega < a \\ 0 & \omega > a \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{a} & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$	$a \left[\frac{\sin(\omega a/2)}{\omega a/2} \right]^2$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$	$-j\text{sgn}(\omega)X(\omega)$

Fonction complémentaire $Q(z)$ de la fonction d'erreur $\text{erf}(z)$

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda$$

$$Q(0) = \frac{1}{2} \quad Q(-z) = 1 - Q(z) \quad z \geq 0$$

$$Q(z) = \frac{1}{2} - \text{erf}(z)$$

$$\text{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\lambda^2/2} d\lambda$$

$$Q(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} e^{-z^2/2} \quad z \gg 1 \quad (z > 4)$$

Tableau C-1 $Q(z)$

z	$Q(z)$	z	$Q(z)$	z	$Q(z)$	z	$Q(z)$
0,00	0,500 0	1,00	0,158 7	2,00	0,022 8	3,00	0,001 35
0,05	0,480 1	1,05	0,146 9	2,05	0,020 2	3,05	0,001 14
0,10	0,460 2	1,10	0,135 7	2,10	0,017 9	3,10	0,000 97
0,15	0,440 4	1,15	0,125 1	2,15	0,015 8	3,15	0,000 82
0,20	0,420 7	1,20	0,115 1	2,20	0,013 9	3,20	0,000 69
0,25	0,401 3	1,25	0,105 6	2,25	0,012 2	3,25	0,000 58
0,30	0,382 1	1,30	0,096 8	2,30	0,010 7	3,30	0,000 48
0,35	0,363 2	1,35	0,088 5	2,35	0,009 4	3,35	0,000 40
0,40	0,344 6	1,40	0,080 8	2,40	0,008 2	3,40	0,000 34
0,45	0,326 4	1,45	0,073 5	2,45	0,007 1	3,45	0,000 28
0,50	0,308 5	1,50	0,066 8	2,50	0,006 2	3,50	0,000 23
0,55	0,291 2	1,55	0,060 6	2,55	0,005 4	3,55	0,000 19
0,60	0,274 3	1,60	0,054 8	2,60	0,004 7	3,60	0,000 16
0,65	0,257 8	1,65	0,049 5	2,65	0,004 0	3,65	0,000 13
0,70	0,242 0	1,70	0,044 6	2,70	0,003 5	3,70	0,000 11
0,75	0,226 6	1,75	0,040 1	2,75	0,003 0	3,75	0,000 09
0,80	0,216 9	1,80	0,035 9	2,80	0,002 6	3,80	0,000 07
0,85	0,197 7	1,85	0,032 2	2,85	0,002 2	3,85	0,000 06
0,90	0,184 1	1,90	0,028 7	2,90	0,001 9	3,90	0,000 05
0,95	0,171 1	1,95	0,025 6	2,95	0,001 6	3,95	0,000 04
4,00	0,000 03						
4,25	10^{-5}						
4,75	10^{-6}						
5,20	10^{-7}						
5,60	10^{-8}						

Formules mathématiques usuelles

D.1 IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$$

$$a \cos x + b \sin x = C \cos(x + \theta) \quad \text{où } C = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \theta = -\arctan \frac{b}{a}$$

D.2 DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ET APPROXIMATIONS

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{1}{2!} n(n-1)x^2 + \dots$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{1}{2!} (x \ln a)^2 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

lorsque $|x| \ll 1$,

$$(1+x)^n \approx 1+nx$$

$$e^x \approx 1+x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\sin x \approx x$$

$$a^x \approx 1+x \ln a$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

D.3 INTÉGRALES

Intégrales indéfinies

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = -\left[\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \right] \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \arctan \frac{bx}{a}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{x}{b^2} - \frac{a}{b^3} \arctan \frac{bx}{a}$$

Intégrales définies

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} x^{2k} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \times 3 \times \cdots (2k-1)}{2^{k+1} a^k} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-b^2/(4a^2)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{b^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2b} e^{-ab} \quad a > 0, b > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{b^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab} \quad a > 0, b > 0$$

Intégration par parties

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Symboles mathématiques et abréviations

E.1 SYMBOLES

Symbole	Signification
\approx	peu différent de
\leftrightarrow	indique une paire de transformées de Fourier
\oplus	addition modulo 2
\cup	union de deux événements
\cap	intersection de deux événements
\subset	sous-ensemble de
\emptyset	événement nul
\sum	sommation
\prod	produit
\mathcal{F}	transformée de Fourier de
\mathcal{F}^{-1}	transformée de Fourier inverse de
\mathcal{P}	opérateur d'application linéaire
$\langle \cdot \rangle$	moyenne temporelle
\bar{x}	moyenne temporelle de $x(t)$
$ a $	valeur absolue de a
$E[\cdot]$	espérance mathématique de
max	maximum
min	minimum
\bar{A}	événement complémentaire de A
A^T (\mathbf{x}^T)	transposition de la matrice A (du vecteur \mathbf{x})
A^{-1}	inverse de la matrice A
det A	déterminant de la matrice A
$H^*(\omega)$	complexe conjugué de $H(\omega)$
$\{x(n)\}$ ($x[n]$)	suite
$x'(\cdot)$	dérivée première de
$x(t) * y(t)$	convolution de $x(t)$ et de $y(t)$
$\hat{m}(t)$	transformée de Hilbert de $m(t)$
$\tilde{m}(t)$	approximation en escalier de $m(t)$
$m_+(\cdot)$	l'indice + indique un signal analytique
sgn(\cdot)	fonction signe de
$N(\mu; \sigma^2)$	VA normale de moyenne μ et de variance σ^2

E.2 ABBREVIATIONS

Abréviation	Signification
ac	<i>alternating current</i> , courant alternatif
AM	<i>amplitude modulation</i> , modulation d'amplitude
AMI	<i>alternate mark inversion</i> , inversion d'impulsion alternée
ASK	<i>amplitude-shift keying</i> , modulation par saut (ou commutation) d'amplitude
b/s	bit par seconde
BBGA	bruit blanc gaussien additif
BLD	à bande latérale double
BLI	bande latérale inférieure
BLR	à bande latérale résiduelle
BLS	bande latérale supérieure
BLU	à bande latérale unique
CAD	convertisseur analogique-digital
CBS	canal binaire symétrique
CD	<i>compact disk</i> , disque compact
CDA	convertisseur digital-analogique
CDSM	canal discret sans mémoire
CW	<i>continuous wave</i> , onde entretenue pure, graphie
dB	décibel
dc	<i>direct current</i> , courant continu
dét	déterminant
DM	<i>delta modulation</i> , modulation delta
DSB	<i>double-sideband</i> , à bande latérale double
DSB-SC	<i>double-sideband suppressed carrier</i> , bande latérale double à suppression de porteuse
exp	fonction exponentielle
FDM	<i>frequency division multiplexing</i> , multiplex à division de fréquence
fdp	fonction de densité de probabilité
FI	fréquence intermédiaire
FM	<i>frequency modulation</i> , modulation de fréquence
FSK	<i>frequency-shift keying</i> , modulation par saut de phase
Gb	gigabit
Hz	hertz
IF	<i>intermediate frequency</i> , fréquence intermédiaire (FI)
ISI	<i>intersymbol interference</i> , confusion intersymbole, diaphonie
kb/s	kilobits par seconde
kHz	kilohertz
ln	logarithme naturel (ou népérien)

Abréviation	Signification
LSB	lower sideband, bande latérale inférieure (BLI)
MAP	maximum <i>a posteriori</i>
Mb	mégabit
Mb/s	mégabit par seconde
MDF	multiplex à division de fréquence
MHz	mégahertz
ms	milliseconde
mV	millivolt
μs	microseconde
NB	<i>narrow band</i> , bande étroite
NBFM	<i>narrow band frequency modulation</i> , FM à bande étroite
NBPM	<i>narrow band phase modulation</i> , modulation de phase à bande étroite
NRZ	non-retour à zéro
PAM	<i>pulse amplitude modulation</i> , modulation d'impulsions en amplitude
PCM	<i>pulse code modulation</i> , modulation d'impulsions codées
PM	<i>phase modulation</i> , modulation de phase
PSK	<i>phase-shift keying</i> , modulation par sauts de phase
RF	<i>radio frequency</i> , radiofréquence
rms	<i>root mean square</i> , valeur efficace (ou quadratique)
RZ	retour à zéro
s	seconde
S/B	rapport signal sur bruit
SDSM	source discrète sans mémoire
sgn	fonction signe
SLIT	système linéaire invariant dans le temps
$(S/N)_e$	rapport S/N (ou S/B) en entrée
$(S/N)_q$	rapport signal sur bruit de quantification
$(S/N)_s$	rapport S/N en sortie
SNR ou S/N	<i>signal to noise ratio S/N</i> , rapport signal sur bruit S/B
SSB	<i>single-sideband</i> , à bande latérale unique
SSL	stationnaire au sens large
SSS	stationnaire au sens strict
USB	<i>upper sideband</i> , bande latérale supérieure (BLS)
V	volt
var	variance
VCO	<i>voltage controlled oscillator</i> , oscillateur commandé en tension
VSF	<i>vestigial sideband</i> , à bande latérale résiduelle
WB	<i>wide band</i> , à large bande
WBFM	modulation de fréquence à large bande
WBPM	modulation de phase à large bande

Index

A

Addition modulo 2, 276
Alphabet source, 263
Ambiguïté, 268
Armstrong, modulateur FM, 91
ASCII, code, 136
Autocorrélation, 7, 8, 185-187
Autocovariance, 185, 188

B

Bande
de base, 49
de bruit équivalente, 216
étroite (NB, *narrow band*)
 filtre, 15
 modulation d'argument, 77, 80-81
 processus aléatoire, 93
large, modulation d'argument, 80
latérale,
 double (BLD), modulation, 48, 59, 84, 222
 double à suppression de porteuse (DSB-SC), 49
 inférieure (BLI), 49
 supérieure (BLS), 49
 unique (BLU), modulation, 48, 52, 64
passante
 à 3 dB, 15, 41
 d'un filtre, 15
 d'un système, 15
 en puissance, 16
BBGA, bruit blanc gaussien additif, 230, 270
Biphase, signal, 108
Bit, définition, 264
Brouilleur, 70
Bruit
 additif, 220
 en AM, 222, 238
 en bande de base, 221, 237
 BBGA, 230, 270
 blanc, 192
 blanc à bande limitée, 192
 coloré, 256
 en modulation d'argument, 226, 244
 de quantification, 102
 thermique, 219
équivalent, 216

gaussien, 232
additif, 230, 270

C

Canal
 binaire à effacement, 284, 289
 binaire symétrique (CBS), 267
 déterministe, 266, 269
 discret sans mémoire (CDSM), 265, 282
 sans bruit, 267, 269
 sans perte, 266
Capacité d'un canal, 269, 288
 binaire à effacement, 289
 binaire symétrique, 269, 289
 bruité par un BBGA, 270, 292
 déterministe, 269
 sans bruit, 269
 sans perte, 269
Codage, 263
 d'un canal, 274, 300
 contrôle d'erreur, 275, 302
 entropique, 273, 297
 de Huffman, 274
 de Shannon-Fano, 273
 de source, 271, 293
Code,
 à contrôle de parité linéaire, 275-276
 ASCII, 136
 par blocs, 275
 linéaire, 307
 déchiffable de façon unique, 272
 détecteur d'erreur, 302
 dual, 313
 efficacité, 271
 longueur, 271
 de longueur variable, 272
 Manchester, 108
 parfait, 277
 redondance, 271
 remplissage, 275
 répétitif, 300, 304
 systématique
 vecteur, 276
Codes,
 correcteurs d'erreur, 275
 cycliques, 275
 de Hamming, 277
 de ligne, 107
 de longueur fixe, 272

instantanés, 272
 optimaux, 272
 sans préfixes, 272
 Coefficients de Fourier, 4
 Comander
 (compression-expansion de dynamique), 104
 Contrôle de parité
 bits, 275
 équation, 277
 matrice, 276
 Conversion de fréquence, 57
 Convertisseur analogique-digital (CAD), 98
 Convolution, 6, 10, 30
 théorèmes, 7, 30-31
 Correction d'erreur, 277, 307
 Corrélateur, 234, 253
 Corrélation, 7-8, 32, 187, 198, 234
 autocorrélation, 7
 coefficient de, 147
 inter -, 7
 Covariance, 147
 matrice de, 191
 stationnaire, 197
 Critère,
 d'erreur minimale, 232
 de Nyquist, forme d'impulsion, 133

D

Décalage de fréquence, 57
 Démodulation, 49
 synchrone, 50
 en AM, 50
 en BLR, 56
 en BLU, 54, 68
 en DM, 107
 en DSB, 49
 en FM, 81
 en modulation d'argument, 81
 en PM, 82
 Densité,
 interspectrale, 189
 spectrale de puissance, 8, 31, 188, 190
 spectrale énergétique, 7
 Déphasage, 39, 53
 Désaccentuation, filtre de, 246-247
 Descrambler, 74
 Détecteur,
 à maximum de vraisemblance, 231-232, 249
 d'enveloppe, 51, 63
 quadratique, 62, 242
 Détection,
 cohérente, 50

d'enveloppe, 50, 224
 d'erreur, 277, 307
 erreur de, 277-278, 307
 optimale, 233, 235
 synchrone, 66, 222
 Détection-intégration, 251
 Déviation standard, 146
 Diagramme
 de Venn, 139, 153-154
 vectoriel,
 en AM, 87
 en NBFM, 87
 Différentiateur, 44, 209
 Discrimination de fréquence, 53, 81-82
 Distance
 de Hamming, 277
 minimum, 278
 Distorsion
 d'amplitude, 12
 de phase, 12
 Distribution
 binomiale, 148
 conditionnelle, 143
 conjointe, 142
 gaussienne, 150
 marginale, 143
 normale, 150
 de Poisson, 150

E

Echantillonnage, 98, 99
 fréquence, 99
 idéal, 100
 instantané, 99
 intervalle, 1
 naturel, 100
 non idéal, 100
 période, 99
 rectangulaire, 100
 Echantillonneur-bloqueur, 100
 Echelon unitaire, 2
 Effet
 d'ouverture, 122
 de seuil, 224
 en AM, 226
 en modulation d'argument, 229
 Efficacité d'un codage, 271
 Egaliseur, filtre, 42
 Energie, 1
 moyenne, 1
 Entropie, 264
 conditionnelle, 268
 conjointe, 268
 différentielle, 270

Enveloppe, détection d', 50, 224
 Equivalence, propriété, d', 19
 Ergodicité, 186, 197
 en autocorrélation, 187
 en moyenne, 187
 Espace des événements, 138
 Espérance mathématique, 146
 conditionnelle, 177
 Événement(s), 138-141
 nul, 138
 Excursion
 maximum de fréquence, 75
 de phase instantanée, 75

F

Famille de fonctions, 184
 Filtrage, 11-12
 Filtre
 adapté, 233-234, 253
 et bruit coloré, 256
 causal, 15
 gaussien, 47
 de préaccentuation, 246
 de prédétection, 222
 à pente cosinus raidi, 111
 passe-bande, 14
 passe-bas Butterworth, 47
 passe-haut, 13
 transverse, 42
 Fonction
 de Bessel, 78, 85, 316
 caractéristique
 conjointe, 148
 marginale, 148
 complémentaire de la fonction d'erreur, 151, 317
 de densité de probabilité, 142, 157
 conditionnelle, 143
 conjointe, 142
 marginale, 143
 de densité gaussienne, 191
 à deux variables, 213
 à plusieurs variables, 191, 221
 de Dirac, 2
 élémentaire, 184
 généralisée, 2
 propres, 38
 Q, 151, 233, 317
 signe, 27
 singulières, 2-3, 19
 de transfert (réponse en fréquence), 10
 unitaire, 2

Formule
 de Parseval, 24
 de Wiener-Khinchin, 186
 Fréquence
 fondamentale, 2
 image, 57
 instantanée, 75, 83
 excursion, 75
 de Nyquist, 99
 pure, modulation, 78

G-H

Gain de détection, 223
 Génération des signaux
 AM, 50
 BLD, 48
 BLR, 55
 BLU, 53-54, 64
 à modulation d'argument, 80, 90
 Hétérodyne, 57

I

Identité d'Euler, 26
 Index de modulation, 51
 en modulation d'amplitude, 51
 en modulation d'argument, 78
 Inégalité
 de Cauchy-Schwarz, 176
 de Kraft, 273, 295
 de Markov, 175
 de Schwartz, 253
 de Tchebychev, 176
 Information,
 contenu, 263
 débit, 263-264
 mesure, 263, 279
 moyenne, 264
 mutuelle, 268, 284
 source, 263
 Intercorrélation, 7, 33, 188
 Intercovariance, 188
 Interférence intersymbole (ISI), 110, 133
 Intervalle de Nyquist, 99
 Inversion d'impulsions alternée (AMI), 108

J-L

Jacobien, 145
 Largeur de bande
 équivalente, 47
 d'un signal AM, 52
 des signaux à modulation d'argument, 79, 88

- Ligne
 à retard, 93
 à retard à prises, 42
- Limite de Hamming, 277
- Limiteur, 97
- Loi
 binomiale, 148
 de compression A, 104, 136
 de compression μ , 104, 206
 de Morgan, 139
 de Poisson, 150
 de Shannon-Hartley, 270
- M**
- Masquage d'un bruit, 229
- Matrice
 génératrice, 276
 de transition d'un canal, 265-267, 283
- Maximum *a posteriori* (MAP), critère, 249
- Mélange de fréquence, 57, 70
- Mise en forme d'impulsions, 110, 133
- Modulateur équilibré, 36
- Modulation
 d'amplitude (AM), 36, 48-74
 d'amplitude à quadrature (QAM), 72
 d'argument, 75-97
 à bande latérale double (BLD), 48, 59, 84, 222
 à bande latérale résiduelle (BLR), 48, 59, 84, 222
 à bande latérale résiduelle (BLR), 48, 55, 68
 en bande latérale unique (BLU), 48, 52, 64
 delta (DM), 98, 106, 128
 exponentielle, 77
 de fréquence (FM), 48, 75, 84
 à fréquence pure, 78
 d'impulsions, 48
 en amplitude (PAM), 101
 codées (PCM), 98
 numériques, 98
 en quadrature (QAM), 72
 de phase (PM), 48, 75, 84
 linéaire, 48, 84
 non linéaire, 84
 numérique d'une porteuse, 112
 récepteur, 97
 par sauts d'amplitude (ASK), 112-113, 236
 par sauts de fréquence (FSK), 112-113, 236
 par sauts de phase (PSK), 112, 113, 236
 par tout ou rien, 112-113, 236
 sinusoïdale, 78
- Moments,
 centré d'ordre n , 146
 centré d'ordre deux, 146
- conjoint, 147
 conjoint d'ordre n , 185
 fonction génératrice, 147, 178
 ordre, 147
 d'ordre n , 146
- Mot codé, 271
- Moyenne
 d'ensemble, 185
 temporelle, 186
 vectorielle, 191
 statistiques, 145, 169, 185
- Multiplexage,
 en fréquence 58, 70,
 en quadrature, 72
 temporel, 58, 109, 131
- Multiplicateur(s)
 de fréquence, 80
 de Lagrange, 291
- N-O**
- Non retour à zéro (NRZ), 107
- Opérateur linéaire, 9
 fonctions propres, 38
 valeurs propres, 38
- P**
- Passage à zéro, 94, 200
- Période, 2
- Poids de Hamming, 278
- Point élémentaire, 138
- Porteuse, 48
- Probabilité
 a priori, 232
 a posteriori, 249
 en ASK, 236
 en bipolaire / bande de base, 236
 en bruit gaussien, 232-233
 conditionnelle, 140
 densité, 143
 répartition, 143
 conjointe,
 définition axiomatique, 140
 d'erreur, 220, 231-232, 249
 fonction de densité, 143
 fonction de répartition, 142
 fréquence relative, 140
 en FSK, 236
 marginale, fonction de densité, 143
 matrice, 266
 mesure, 138
 en monopolaire / bande de base, 235-236
 en PSK, 236
 répartition, 143

totale, 141
 de transition d'un canal, 265
 Processus aléatoire 184, 194
 à bande étroite, 193
 définition, 184
 ergodique, 187
 gaussien, 191, 212
 non corrélé, 188
 orthogonal, 188
 périodique, 195
 représentation cartésienne, 193
 stationnaire
 en covariance, 197
 au sens large (SSL), 186
 au sens strict (SSS), 186
 statistique, 185, 194
 Processus stochastiques (aléatoires), 184
 Puissance, 4
 moyenne, 1

Q

Quantification, 98, 101, 123
 bruit de, 102
 erreur, 102, 107
 non uniforme, 103
 uniforme, 101

R

Raideur d'un filtre, 111
 Rapport
 de vraisemblance, 232
 porteuse sur bruit, 226
 signal sur bruit (S/N, S/B), 220
 en AM, 223
 en BLD, 222-223
 en BLU, 223
 en FM, 228
 en PM, 228
 en sortie, 220
 signal sur bruit de quantification, 124
 Rayleigh, variable aléatoire, 169
 Recouvrement (ou aliasing), 114
 Règle
 de Bayes, 140
 de Carson, 80, 90
 de parité, 301
 majoritaire, 300
 Rendement (transmission AM), 61
 Répartition normale, 150
 Réponse
 en fréquence, 10, 37

impulsionnelle, 10, 37
 indicielle, 37
 Représentation cartésienne d'un processus aléatoire,
 193
 composante en phase, 193
 composante en quadrature, 193
 Retour à zéro, 107

S

Série
 de Fourier, 3, 22
 de Fourier complexe, 3
 de Fourier exponentielle, 3, 22
 Seuil
 niveau, 240
 optimal, 232
 Signal
 aléatoire, 1, 184
 analogique, 1
 analytique, 73
 apériodique, 2
 à bande limitée, 36
 binaire aléatoire, 201
 bipolaire, 107-108
 causal, 10
 complexe, 1
 des télégraphistes, 218
 déterministe, 1
 numérique, 1
 périodique, 2, 19
 à puissance finie, 1
 réel, 1
 à temps continu, 1
 à temps discrétisé, 1
 Source discrète sans mémoire (SDSM), 263
 Sous-porteuse, 58
 Spectre
 d'amplitude, 4-5
 de Fourier, 5
 de Fourier d'un signal modulé en argument, 77, 86
 de fréquence, 4, 11
 de fréquence discret, 4
 de phase, 5
 de puissance, 188, 198
 de raies, 4
 Stationnarité
 au sens large (SSL), 186
 au sens strict (SSS), 186
 Statistique des processus aléatoires, 185, 194
 Superhétérodyne, récepteur AM, 70
 Symbole de Kronecker, 117
 Syndrome, 277
 décodage, 277
 Système(s)
 à temps continu, 9

- bande passante, 15
 - causal, 10
 - discret, 9
 - filtrage, 11
 - linéaires, définition, 9, 37
 - caractéristiques fréquentielles, 40
 - invariant dans le temps (SLIT), 9, 189
 - et processus aléatoire, 189-190, 206-212
 - réponse en fréquence, 10, 37
 - réponse impulsionnelle, 10
 - réponse, 189
- T**
- T1, système, 110
 - Télégraphistes, signal des -, 200, 218
 - Test d'hypothèse, 230
 - Théorème
 - du codage, 275
 - de l'échantillonnage, 98, 114
 - dans le domaine des fréquences, 135
 - passé-bande, 119
 - passé-bas, 99, 114
 - uniforme, 99
 - de la convolution en fréquence, 7, 31
 - de la limite centrée, 151
 - de la modulation, 26
 - de Parseval
 - pour la transformation de Fourier, 8, 32
 - pour les séries de Fourier, 4
 - Thermique, bruit, 219
 - Tirage aléatoire, 138
 - Train d'impulsions unitaires, 22, 29
 - Traînage, 106-107
 - Transformées
 - de Fourier, 4, 25
 - définition, 4, 314
 - inverse, 5
 - paire de -, 5, 315
 - propriétés, 5, 314
 - de Hilbert, 39, 46, 73, 207, 219
 - Transmission
 - en bande de base d'un signal bipolaire, 235
 - sans distorsion, 11
- U-V**
- Unipolaire, signal, 107, 235-236
 - Valeurs propres, 38
 - Variable aléatoire, 14, 157
 - de Cauchy, 182
 - conjointement normale, 162
 - continue, 142
 - déviations standard, 146
 - discrète, 141
 - espérance, 145
 - exponentielle, 160
 - fonctions, 144, 163
 - gaussienne, 150
 - gaussienne normalisée, 151
 - indépendante, 144
 - moment centré d'ordre n , 146
 - moment d'ordre n , 146
 - moyenne, 145
 - non corrélée, 147
 - normale, 151
 - de Poisson, 150, 171
 - de Rayleigh, 169
 - orthogonales, 147
 - uniforme, 159, 169
 - variance, 146
 - Variance, 146
 - VCO, oscillateur commandé en tension, 81
 - Vecteur
 - aléatoire, 191
 - code, 276
 - données, 276
 - d'erreur, 277
 - Vraisemblance, 232

L O U I S - J E A N
avenue d'Embrun, 05003 GAP cedex
Tél. : 92.53.17.00
Dépôt légal : 635 — Septembre 1994
Imprimé en France

Série Schaum

Le bon réflexe pour comprendre les éléments fondamentaux du cours et pour réussir aux examens

- une série unique, de renommée mondiale, disponible en 15 langues
- plus de 45 000 exercices résolus introduits par de nombreux rappels de cours
- des ouvrages spécialement conçus pour l'étudiant

BIOLOGIE

Anatomie et physiologie humaines
Génétique 2^e éd.

CHIMIE

Biochimie, 2 vol.
Chimie analytique
Chimie générale 7^e éd.
Chimie organique
Chimie physique, 2 vol.

ÉCONOMIE

Macroéconomie 2^e éd.
Mathématiques pour l'économiste
Microéconomie 2^e éd.
Principes d'économie

ÉLECTRICITÉ, ÉLECTRONIQUE

Circuits électriques
Communications analogiques
et numériques
Électronique, 2 vol.
Microprocesseurs, 2 vol.
Systèmes asservis 2^e éd.
Techniques numériques

GESTION, COMPTABILITÉ

Gestion de la production
et des opérations
Statistiques de la gestion

Technique comptable approfondie
Technique comptable de base

INFORMATIQUE

Infographie
Introduction à l'informatique
Mathématiques pour informaticiens
Programmation Basic
Programmation en assembleur
Programmation en C
Programmation en Cobol structuré
Programmation Fortran
Programmation Pascal
Structures de données
Traitement de l'information

MATHÉMATIQUES

Algèbre linéaire 2^e éd.
Algèbre moderne
Analyse
Analyse de Fourier
Analyse numérique
Analyse vectorielle
Calcul différentiel et intégral 2^e éd.
Calcul matriciel
Équations différentielles
Équations différentielles - Méthodes
et applications
Formules et tables de mathématiques
Géométrie analytique

Introduction au calcul différentiel
et intégral
Mathématiques de base 2^e éd.
Mathématiques discrètes
Matrices
Probabilités
Probabilités et statistique
Statistique 2^e éd.
Topologie
Transformées de Laplace
Trigonométrie
Variables complexes

PHYSIQUE

Électromagnétisme
Mécanique générale
Optique
Physique appliquée
Physique générale
Physique générale
et appliquée
Physique de l'ingénieur
Physique moderne
Thermodynamique

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

Mécaniques des fluides
et hydraulique
Résistance des matériaux, 2 vol.



Pour tous renseignements concernant
les ouvrages de la série Schaum en français,
s'adresser à :
Ediscience international,
28, rue Beaunier, 75014 Paris
McGraw-Hill, Éditeurs, Montréal, Canada

COMM ANALOG
95-06-15 Rea
Rayon 3130
978270421283
Px 210,00

ISBN : 2-7042-1283-X
ISSN : 0768-2727

