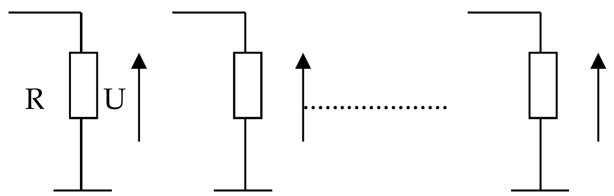
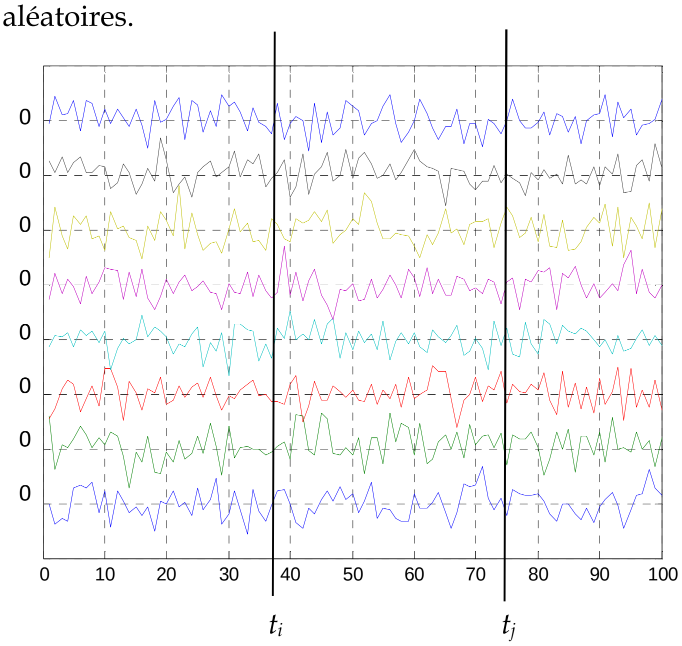
Chapitre II : Processus aléatoires

Les processus aléatoires (stochastiques) décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps (ou de l'espace). On peut définir un processus stochastique comme étant une famille de variables aléatoires indexées par le temps définies su un même espace de probabilités **Ω**. Un processus aléatoire ne possède pas de représentations temporelles analytiques. Chaque signal aléatoire observé représente une réalisation particulière de ce processus. Le signal de parole, le signal radar, l'électrocardiogramme, l'électro-encéphalogramme, les signaux sismiques en sont des exemples. Rappelons qu'un signal de réception -constitué d'un signal informatif (aléatoire ou déterministe), d'un signal aléatoire d'interférence et de bruit lié au canal de transmission- est aléatoire par nature.

Exemple 1 : Si l'on prend plusieurs résistances identiques (de même valeur) et que l'on mesure la tension. On trouvera une valeur non nulle due à l'agitation thermique des électrons libres dans la résistance. Les tensions mesurées au cours du temps sur l'ensemble des résistances fourniront plusieurs signaux aléatoires tous différents qui constituent le processus aléatoires.





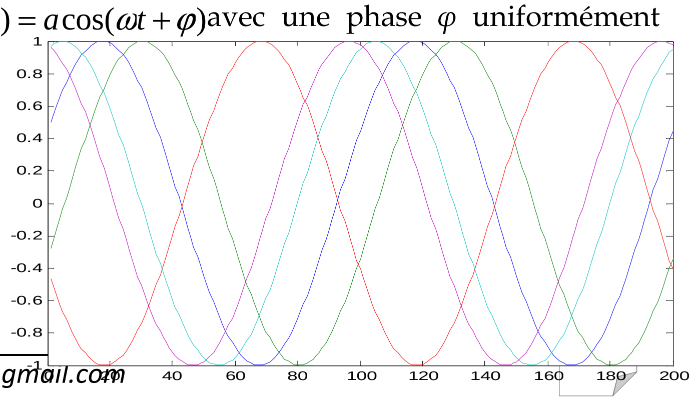
Signaux susceptibles d'être produits en mesurant la tension aux bornes de plusieurs résistances.

- Chaque tracé fournit un signal aléatoire

- à l'instant t_i , le processus se réduit à une v.a x_i dont la densité est $p(x;t_i) = p(x_i)$

- Deux instants t_i et t_j permettent de définir deux variables aléatoires x_i et x_j on peut définir des densités de probabilités conjointes par: $p(x;t_i,t_j) = p(x_i,x_j)$

Exemple 2 : Signal sinusoïdal à phase aléatoire $X(t,\varphi) = a\cos(\omega t + \varphi)$ avec une phase φ uniformément répartie entre 0 et 2π



- φ est à valeur réelle continue

- X(t,φ) est à valeur continue et réelle

- Un signal particulier X(t,φ_i) est déterministe

En pratique, il n'est pas aisé d'obtenir la densité de probabilité $p(x;t_i) = p(x_i)$, on se contente alors des moments d'ordre 1 et 2

1. *Espérances mathématiques*

Statistiques de 1^{er} ordre: Elles permettent de décrire le signal à un instant donné. Le processus aléatoire devient une simple variable aléatoire que l'on peut décrire à l'aide de moments à condition que sa probabilité soit connue $\forall$ t_i.

- *moyenne statistique*: $\mu_x(t_i) = E\{x(t_i)\} = E\{x_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_i) \cdot p(x,t_i)dx$

- *variance*: $\sigma_x^2(t_i) = E\{\ x(t_i) - \mu_x(t_i)^2\} = E\{x_i^2\} - \mu_x(t_i)^2$

Où $E\{x_i^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_i)^2 \cdot p(x,t_i)dx$ est la valeur quadratique moyenne (on parle aussi de puissance) et $\sigma_x(t_i)$ est dit écart-type

Exemple 1**:** Soit le processus stochastique x(t) défini par :*x(t) = a + b.t* où *a* et *b* sont des v.a. dont les probabilités sont connues, alors :

$$\mu_X(t) = E[a + b\,t_i)] = \mu_a + \mu_b\, t$$

Reprenons l'exemple 2 : Pour un instant donné t_k, on peut calculer des moments statistiques de la variable aléatoire $X(t_k,u)$

- Moyenne :

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_0^{2\pi} f_\varphi(\varphi) a\cos(\omega t + \varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi} a \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi)d\varphi = 0$$

-Variance :

$$\sigma_X^2(t) = E[X^2(t)] - \mu_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_0^{2\pi} f_\varphi(\varphi) a^2 \cos^2(\omega t + \varphi)d\varphi = \frac{a^2}{2}$$

Supposons, maintenant, que φ est déterministe et que a est aléatoire de densité p(a), de moyenne μ_a et variance σ_a^2, alors :

$$\mu_X(t) = E[a\cos(\omega t + \varphi)] = \mu_a .\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \sigma_X^2(t) = \sigma_a^2 .\cos^2(\omega t + \varphi)$$

Statistiques de $2^{ème}$ ordre: On dit que le processus est connu à 2 instants t_1 et t_2, si $\forall t_1, t_2$, la probabilité conjointe est connue. Dans la mesure où l'espérance fait intervenir le produit de deux variables aléatoires (2 instants), on parlera de statistiques d'ordre 2. on peut estimer les statistiques suivantes:

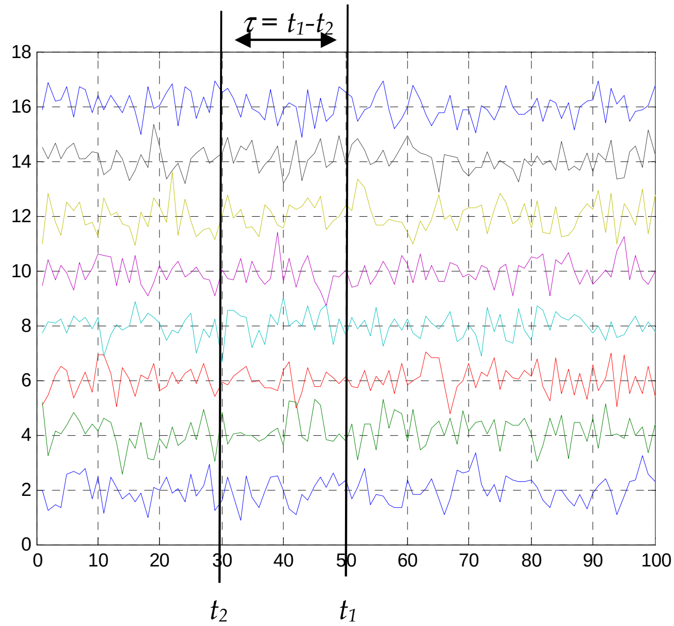
- Fonction *d'autocorrélation statistique* **:**

$$R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_1) \cdot x^*(t_2)\} = E\{x_1 \cdot x_2^*\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2^* \cdot p(x_1,x_2;t_1,t_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$$

- Fonction *d'autocovariance statistique :*

$$C_x(t_1,t_2) = E\left\{ \left[x(t_1) - \mu_x(t_1) \right] \cdot \left[x(t_2) - \mu_x(t_2) \right]^* \right\} = R_x(t_1,t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_x(t_2)^*$$

Elles illustrent la relation entre les statistiques prises à **deux** instants t_1 et t_2 différents. La fonction d'*autocorrélation* mesure la corrélation entre les signaux émis par un *même* processus à deux *instants différents*. Lorsqu'*il y a* corrélation on peut parler d'un "effet mémoire" du processus. On définit la mémoire du processus comme le temps t_c au delà duquel la corrélation est négligeable, t_c est aussi appelé temps de corrélation. Par contre, si elle est nulle, le signal est complètement aléatoire et le signal x(t) à l'instant t est complètement décorrélé de ce même signal à l'instant passé $t - \tau$.



Notons que pour des processus *centrés* ($\mu_x(t)=0$): $C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$

On peut étendre ces notions pour mesurer ce lien entre deux processus aléatoires par :

- Fonction *d'intercorrélation statistique:* $R_{xy}(t_1,t_2) = E\left\{ x(t_1) \cdot y^*(t_2) \right\} = E\left\{ x_1 \cdot y^*_2 \right\}$

- Fonction *d'intercovariance statistique :* $C_{xy}(t_1,t_2) = R_{xy}(t_1,t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_y^*(t_2)$

- Le *coefficient de corrélation* est définie par : $\rho_{xy}(t_1,t_2) = \dfrac{C_{xy}(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}$ $\quad -1 \le \rho_{xy}(t_1,t_2) \le 1$

Reprenons <u>l'exemple 2</u> et calculons l'auto-corrélation statistique :

$$R_{xx}(t_1,t_2) = E[a\cos(\omega t_1 + \varphi)a\cos(\omega t_2 + \varphi)] = E[\frac{a^2}{2}(\cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi) + \cos(\omega(t_1 - t_2)))] = \frac{a^2}{2}\cos(\omega(t_1 - t_2))$$

On remarque que c'est une fonction périodique, ne dépendant que de l'écart t_1-t_2. Pour $t_1=t_2$, on retrouve la variance du processus aléatoire soit $a^2/2$.

3. *Processus stationnaires*

Beaucoup de processus aléatoires observés en pratique ont des propriétés statistiques qui ne dépendent pas du temps ou l'observation est faite. On dit que ce sont des processus stationnaires.

On désigne par *stationnaire* les processus dont les *caractéristiques statistiques* sont *indépendantes de l'origine du temps*. Un processus aléatoire est dit stationnaire au *sens strict* lorsque toutes ces caractéristiques statistiques c'est à dire tous ses moments *à tout ordre* sont indépendants de l'origine du temps.

$$\Leftrightarrow p(x,t_i) = p(x);$$
$$\mu_x(t_i) = \mu_x$$
$$R_{xy}(t_1,t_2) = R_{xy}(\tau) \text{ avec } \tau = t_2 - t_1$$
$$\ldots$$

La stationnarité ne signifie pas pour autant que le processus est indépendant du temps mais plutôt que ses propriétés statistiques ne dépendent pas du moment auquel on commence à les estimer. Ainsi, la température est un processus non stationnaire alors que le lancé de dé est un processus stationnaire.

On peut considérer que de nombreux phénomènes sont approximativement stationnaires sur des durées d'observation finies. Comme nous n'avons pas toujours accès à $p(x,t_i)$, on se contentera de la *stationnarité au sens large*(SSL) lorsque *seul* μx *et* Rx sont indépendants de t.

Ainsi :

- Un processus stationnaire est dit stationnaire d'ordre 1 si sa moyenne et sa variance sont constantes et donc indépendantes de tout décalage temporelle :

$$\mu_x(t) = \mu_x = cste \quad \text{et} \quad \sigma_x^2(t_i) = \sigma_x^2$$

- Un processus stationnaire est dit stationnaire d'ordre 2 si ses statistiques d'ordre 2 ne dépendent que de l'écart temporel entre les deux instants t_1 et t_2:

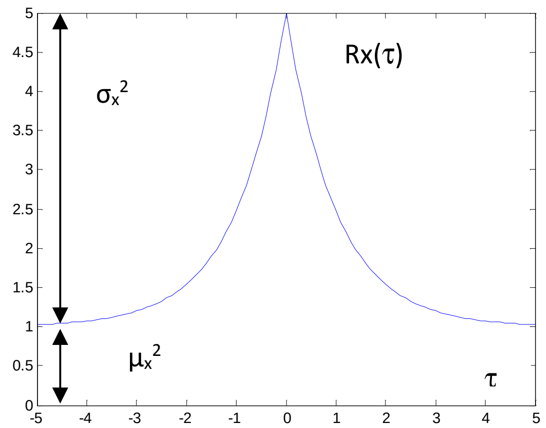
$$R_x(t_1,t_2) = R_x(\tau) \text{ avec } \tau = t_2 - t_1$$

Reprenons l'exemple précédent $X(t,u) = a\cos(\omega t + u)$et étudions sa stationnarité au sens large lorsque u est uniforme sur [0,2π] : la moyenne, la variance sont indépendantes de t et l'auto-corrélation statistique ne dépend que de t_1-t_2. Le processus est donc stationnaire au sens large.

<u>Exemple d'application:</u>

Montrer que le processus x(t) = a.cos(2πt) + b.sin(2πt) où a, b sont des v.a décorrélées de moyenne nulle et de variance unité est stationnaire au sens large.

<u>Propriétés de la fonction d'autocorrélation pour x aléatoire réel SSL</u>



-La fonction de corrélation est paire : $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ avec $\tau = t_2 - t_1$

- La fonction est maximum à l'origine $R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$

- Valeurs à l'origine et à l'infini : $R_x(0) = E(x(t)^2) = \mu_x{}^2 + \sigma_x{}^2$

et $\lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} E\{x(t)x(t+\tau)\} = \mu_x{}^2$

En effet,si *x(t)* ne contient ni composante périodique ni composante indépendante du temps, lorsque t→>∞, les variables *x(t)*et *x(t + τ)* deviennent statistiquement décorrélées.

*Cas discret :*On remplacera t pat n, un processus aléatoire X discret SSL possédera une moyenne constante et une autocorrélation statistique ne dépendant que de $k=n_2-n_1$ soient :

$$\mu_x(n)=\mu_x=cste \quad et \quad R_x(n_1,n_2)=R_x(k) \text{ avec } \quad \mathrm{k}=n_2-n_1$$

$$R_x(n_1,n_2)=\begin{bmatrix} R_x(1,1) & R_x(1,2) & \ldots\ldots & R_x(1,N) \\ R_x(2,1) & R_x(2,2) & \ldots\ldots & R_x(2,N) \\ & & \ldots\ldots & \\ R_x(N,1) & R_x(N,2) & \ldots\ldots & R_x(N,N) \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad R_x(n_1,n_2)=\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \ldots\ldots & R_x(N-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \ldots\ldots & R_x(N-2) \\ & & \ldots\ldots & \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & \ldots\ldots & R_x(0) \end{bmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de corrélation d'un processus stationnaire discret est une matrice Toeplitz carrée. Une matrice carrée est dite Toeplitz si tous les éléments d'une même diagonale ou sous-diagonale sont égaux. On voit directement que c'est le cas ici. Cette propriété est directement liée à la propriété de stationnarité(au sens large) du processus.

Puissance et DSP : Les personnes qui conversent (dans un café ou en cours) génèrent un signal aléatoire qui selon son volume global possèdera une puissance. Si X(t) est SSL, on peut calculer l'espérance de la puissance instantanée par:

$$P_X = E(x(t)^2) = R_x(0) = \mu_x^{\ 2} + \sigma_x^{\ 2}$$

L'énergie est alors donnée par : $E_X = \int P_X \, dt = \int E(x(t)^2) dt$

Quant au spectre pour un signal aléatoire, il faut noter que chaque réalisation fournira un spectre différent. Or, nous avons déjà un outil statistique qui contient une information unique lorsque le processus est considéré SSL: c'est la fonction de corrélation statistique dont la TF fournira une information sur la distribution fréquentielle de la puissance moyenne du signal.

On définit, alors, la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire X(t) stationnaire au sens large comme la fonction de la fréquence f donnée par la TF de la fonction de corrélation statistique du signal:

$$S_x(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} f \tau} d\tau$$

La puissance moyenne totale du processus est : $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df = R_x(0)$

Comme le spectre représente une moyenne sur l'ensemble des réalisations possibles du processus, une réalisation particulière peut toujours avoir un spectre de puissance différent de $S_x(f)$.

Bruit blanc : Un bruit blanc est un signal aléatoire stationnaire au second ordre dont la densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences.

$$R_x(\tau)=\sigma_x^2\delta(\tau)$$

Il est défini par : ce qui implique que sa moyenne sera nulle (μ_x=0) et qu'il est décorrélé.

La TF de la corrélations statistique est, alors, donnée par $S_x(f) = \sigma_x^2$.

Dans le cas discret, on aura $R_x(k) = \sigma_x^2 \delta(k) \Rightarrow R_x(k) = 0 \quad pour \quad k \neq 0$ et $\mu_x(k) = 0$

On dit alors que le bruit est décorrélé.

Par analogie avec la lumière blanche, on dénomme un tel signal bruit blanc. Il existe donc différents type de bruit blanc en fonction de la variable aléatoire décrivant le bruit. Les plus répandus sont le bruit blanc gaussien où la variable aléatoire suit une loi gaussienne et le bruit blanc uniforme où la variable aléatoire suit une loi uniforme.

4. Processus ergodiques

Il n'est pas toujours possible de réaliser un nombre suffisant de mesures pour établir les propriétés statistiques d'un processus aléatoire. Il est plus facile de lancer un dé 1000 fois que de réquisitionner 1000 personnes pour lancer l000 dés. Tout comme pour caractériser le bruit thermique, on réaliserait plusieurs mesures en usant de la même résistance au lieu d'en employer 1000. Cela signifie que l'on assimilera les résultats obtenus sur une réalisation à ceux obtenus pour un instant donné t_i pour différentes réalisations.

Un processus aléatoire stationnaire est dit *ergodique* lorsque *les valeurs moyennes statistiques et temporelles* sont identiques. $\mu_x = \bar{x}; \quad R_x(\tau) = \varphi_x(\tau) \cdots$

où $\bar{x} = \lim\limits_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot dt$ et $\varphi_{xy}(\tau) = \overline{x(t) \cdot y^*(t-\tau)}$

D'un point de vue pratique lorsqu'un phénomène aléatoire est ergodique et stationnaire, on peut mesurer avec un seul appareil fiable à partir de n'importe quel instant.

Reprenons, une énième fois l'exemple 2 et calculons les moyennes temporelles :

$$E[X(t,u_i)] = \overline{X}(u_i) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} a\cos(\omega t + u_i) dt = 0 \qquad E[X^2(t,u_i)] = \overline{X^2}(u_i) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} a^2 \cos^2(\omega t + u_i) dt = \frac{a^2}{2}$$

Il est donc ergodique d'ordre 1

Si le processus est ergodique $S_x(f)$ représente le spectre de puissance de n'importe qu'elle réalisation $x_i(t)$:

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)^2 \ dt$$

où $x_i(t)$ est une réalisation de $x(t)$.

Dans le cas où le signal x(t) est ergodique, stationnaire, on détermine Sx(f) par le calcul de la DSP temporel sur sur T:

$$S_x(f) = TF\{R_x(\tau)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

Où $X_T(f)$ est la TF de x(t) limité à l'intervalle [0 T]

TD n°2 : Processus aléatoires

1. Soit un processus aléatoire défini par : $X(t) = a\,t + b$; $t > 0$, b est une constante et a est une variable aléatoire qui a pour densité de probabilité : $f_a(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}$

Calculer la densité de probabilité, la moyenne et la variance de X(t).

2. On s'intéresse à la puissance W du bruit débité à l'instant t, pour une résistance R dont la tension V à ses bornes a un caractère aléatoire.

Déterminer la densité de probabilité de W dans chacun des cas.

a) V est une gaussienne centrée de variance σ^2

b) V est uniformément distribuée entre 5V et 10V

3. Soit le processus aléatoire X(t) défini par : $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Déterminer pour chacun des cas suivants les statistiques d'ordre 1 : $p_X(x,t)$, $\mu_x(t)$ et $\sigma_x^2(t)$

a) Si A est une v.a uniformément distribuée sur [-1,1]. X(t) est-il stationnaire d'ordre 1?

b) Si φ est une v.a uniformément distribuée sur [0, 2π].X(t) est-il stationnaire d'ordre 1 et 2?

4. Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux aléatoires réels stationnaires du second ordre.

$$E\{X_1(t)\,X_1(t-\tau)\} = R_{X1}(\tau) = A_1 e^{-|\tau|} + B_1 \quad \text{et} \quad E\{X_2(t)\,X_2(t-\tau)\} = R_{X2}(\tau) = A_2 e^{-|\tau|} + B_2$$

a) Interpréter A_i et B_i , i=1,2

On considère $X_c(t) = X_1(t) + X_2(t)$, étudier la stationnarité de $X_c(t)$ au SSL :

b) Lorsque $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont indépendants.

c) Lorsque $X_2(t) = K\,X_1(t)$.

d) Mêmes questions pour $Z(t) = X_1(t) \,.\, X_2(t)$,

5. Soit le processus aléatoire $Z(t) = X.\cos(2\pi f_0 t) - Y\sin(2\pi f_0 t)$, où X, Y sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes à moyennes nulles et de variances $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$; f_0 est une constante.

a) Calculer la valeur moyenne E[Z(t)] et la variance σ_z^2.

b) Calculer la fonction d'autocorrélation $R_z(t_1,t_2)$ et examiner si le processus est stationnaire au sens large.

6. Considérons les deux variables aléatoires suivantes : A est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance σ_A^2, et φ une variable aléatoire uniformément répartie entre -π et +π.

a) Déterminer $E[A^2]$. Donner la densité de probabilité de φ. Soit $B=e^{j\varphi}$ variable aléatoire complexe fonction de φ. Montrer que E[B] = 0 et calculer $E[B^2]$.

Considérons la variable aléatoire C = cos(φ+θ) où θ est une variable certaine.

b) Montrer que E[C] = 0, ∀θ.

c) Calculer E[cos(2φ+θ)].

d) En déduire $E[C^2]$.

On étudie maintenant le signal aléatoire $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

a) Donner trois trajectoires différentes du signal X(t)

b) Calculer la moyenne, la variance $\sigma_X^2(t)$ et la corrélation $R_X(t_1,t_2)$. X(t) est-il stationnaire d'ordre 1 ?

c) Déterminer et tracer la transformée de Fourier de X(t).

Est-elle unique?

d) Peut-on calculer la fonction de corrélation temporelle et la DSP correspondante.
e) Mêmes questions mais pour le signal aléatoire X(t) = cos(2πf₀t+φ).

7. Soit le signal z(t) résultant de la somme du signal x(t) = Acos(2πf₀t+φ) et du signal binaire aléatoire y(t) prenant la valeur 0 et V sur une durée T d'une façon équiprobable. x(t) et y(t) sont considérés décorrélés. φ : variable aléatoire uniforme entre [0, 2π].

a) Déterminer la fonction de répartition du signal x(t)
b) Sachant que la fonction d'autocorrélation de y(t) est $A\Lambda_T(\tau)$ + B

- Déterminer A et B
- Déterminer la fonction d'autocorrélation de z(t) en fonction de celles de x(t) et y(t)
- Déterminer et tracer la fonction d'autocorrélation et la D.S.P du signal z(t)
- Déterminer la puissance de z(t), sa variance et sa moyenne statistique Le processus z(t) est-il SSL ?

8. Un signal aléatoire z(t) est le résultat de la somme de deux signaux indépendants x(t) et y(t).
Le signal x(t) et binaire antipolaire et prend la valeur A avec une probabilité égale à 2/3 et la valeur –A avec une probabilité égale à 1/3.
Le signal y(t) est gaussien et possède une densité spectrale de puissance $S_y(f) = \sigma^2/2.\ tri(f/B)$.

a) Déterminer la densité de probabilité du signal z(t)
b) La valeur moyenne et la variance de z(t) ainsi que le coefficient de corrélation de x et y

Solutions

1. X(t) Gaussienne avec $\mu_x(t)$=b et $\sigma_x^2(t)$=t **2.** W=RI² a) $p(w)=\sqrt{\dfrac{R}{2\pi w\sigma^2}}e^{-\frac{wR}{2\sigma^2}}$ b) $p(w)=\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{R}{w}}$

3. $p(x;t)=\dfrac{1}{2|\cos(\omega t+\varphi)|}$ a) $\mu_x(t)=0$ $\sigma_x^2(t)=\dfrac{\cos^2(\omega t+\varphi)}{3}$ Non stat b) $p(x;t)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2(t)}}$

4. $A_1=\sigma_{x1}^2$ $B_1=\mu_{x1}^2$ de même $A_2=\sigma_{x2}^2$ $B_2=\mu_{x2}^2$ b) $\mu_{xc}(t)=\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2}$ $R_{xc}(\tau)=R_{x1}(\tau)+R_{x1}(\tau)+2\sqrt{B_1B_2}$ SSL

c) $\mu_{xc}(t)=(1+k)\sqrt{B_1}$ $R_{xc}(\tau)=R_{x1}(\tau)(1+2k+k^2)$ SSL d) $\mu_{xc}(t)=\sqrt{B_1B_2}$ $R_{xc}(\tau)=R_{x1}(\tau)R_{x2}(\tau)$ SSL

e) $\mu_{xc}(t)=k(A_1+B_1)$ pour $R_{xc}(t,\tau)$on ne peut conclure

5. $\mu_z(t)=0$ $\sigma_z^2(t)=\sigma^2$ $R_z(\tau)=\sigma^2\cos(2\pi f_0\tau)$ SSL

6.E[A²]=σ_A^2E[B²]=1 E[C²]=1

$\mu_x(t)=\mu_A\cos(2\pi f_0 t)$ $\sigma_x^2(t)=\sigma_A^2\cos(2\pi f_0 t)$ $R_z(\tau)=\sigma^2\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0(t-\tau))$

e) $X(f)=\dfrac{A}{2}(\delta(f-f_0)+\delta(f-f_0))$ $\overline{R_x(\tau)}=\dfrac{A}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$ $\overline{S_x(f)}=\dfrac{A}{4}(\delta(f-f_0)+\delta(f-f_0))$ d) SSL et ergodique

7. $p(x;t)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2(t)}}$ $F(x;t)=\dfrac{1}{\pi}arctg(x/A)$ B=0.5 V A=0.25V² $P=R_z(0)=\dfrac{A^2}{2}+A$

$R_z(\tau)=\dfrac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)+R_y(\tau)$ $S_z(f)=\dfrac{A^2}{2}(\delta(f-f_0)+\delta(f-f_0))+AT\sin c^2(fT)+B\delta(f)$

8. $\mu_x=A/3$ $\sigma_x^2=8A^2/9$ $R_y(\tau)=\dfrac{\sigma^2}{2B}\sin c^2(B\tau)$ $\mu_z=A/3$ $\sigma_z^2=8A^2/9+\sigma^2/2B$

$p(z)=\dfrac{2}{3\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{1}{2\sigma_y}(z-A)^2}+\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{1}{2\sigma_y}(z+A)^2}$

Exercices supplémentaires

1. On considère le processus aléatoire $Z(t) = X(t)Y(t)$ où $X(t)$ et $Y(t)$ sont deux processus aléatoires, statistiquement indépendantes qui ont respectivement pour fonction d'autocorrélation : $R_x(\tau) = e^{-a|\tau|}$ et $R_y(\tau) = e^{-a|\tau|}$. Calculer la moyenne et la variance de Z(t) puis l'autocorrélation de Z(t)

2. x(t) et y(t) sont deux signaux aléatoires supposés stationnaires individuellement et conjointement.
- Trouver la fonction d'autocovariance du signal $z(t) = x(t) + y(t)$
- Trouver la fonction d'autocovariance du signal z(t) lorsque x(t) et y(t) sont non corrélés.
- Trouver la fonction d'autocovaraince du signal z(t) lorsque x(t) et y(t) sont non corrélés et centrés.

3. Le signal aléatoire centré x(t) possède une fonction d'autocorrélation de la forme $R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\beta|\tau|}$. Un autre signal est lié à x(t) par l'équation déterministe suivante : $y(t) = ax(t) + b$, où a et b sont des constantes données.
- Quelle est la fonction d'autocorrélation de y(t) ?
- Quelle est la fonction d'intercorrélation de x(t) et y(t) ?

4. Soit un processus aléatoire dont chaque réalisation est un signal constant : $x(t) = a$ où a est une variable aléatoire (de moyenne μ_a et de variance σ_a^2) dont la densité de probabilité est indépendante du temps .
- Le processus est-il stationnaire ? Est-il ergodique ?

5. Soient x(t) et y(t) deux signaux aléatoires définis par :
$x(t) = \alpha$, où α est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle [0 ,1].
$y(t) = e^{\beta t}$, où β est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2.Les deux signaux sont définis pour t>=0 et α et β sont des v.a. supposées indépendantes.
- Tracer quelques trajectoires des processus x(t) et y(t) puis calculer E{x(t)} et E{y(t)}
  <u>Remarque :</u> Pour y(t) utiliser les fonctions génératrices des moments d'une variable aléatoire α gaussienne : $E\left\{e^{\alpha t}\right\} = e^{\mu_\alpha t + \frac{\sigma_\alpha^2 t^2}{2}}$
- Calculer les fonctions d'autocorrélation de x(t) et de y(t) . En déduire les variances de x(t) et y(t).
- Conclure sur la stationnarité de x(t) et y(t).
- Calculer la fonction d'intercorrélation de x(t) et y(t).
- En déduire la fonction d'autocorrélation du signal $z(t) = x(t) + y(t)$

6. Soit le signal aléatoire défini par :$x(t) = A_1 e^{j2\pi f_1 t} + A_2 e^{j2\pi f_2 t}$ où A_1 et A_2 sont deux v.a gaussiennes, décorrelées, centrées et de variance σ^2

- Donner la d.d.p conjointe $f_{A1,A2}(A1,A2)$
- Déterminer la moyenne statistique du signal x(t) ainsi que sa fonction d'autocorrélation et la D.S.P
- Déterminer la d.d.p de x(t)
- Le processus x(t) est-il stationnaire au 2éme ordre ?

7. Soit le signal R(t) reçu à partir d'un radar, composé d'un signal utile U(t) et d'un bruit B(t) :

$$R(t) = U(t) + B(t)$$

U(t) : signal aléatoire uniformément réparti sur $[-\pi,\pi]$ et B(t) : bruit gaussien centré de variance $\sigma^2 = 1$

- Calculer E{U} E{B} et E{R}
- Déterminer la fonction d'autocorrélation de R(t) en fonction de celle de U(t) et R(t)
- Trouver les deux cas pour lesquels R(t) est stationnaire au 2ième ordre (quelle hypothèses faut-il poser sur U(t) et B(t))
- Pour U(t) et B(t) indépendants, déterminer $S_R(f)$

8. Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux aléatoires stationnaires du second ordre. On considère $Z(t) = X_1(t) + X_2(t)$, a). Calculer $R_z(t,\tau)$. b). Si les deux signaux sont indépendants et qu'au moins l'un deux possède une moyenne nulle, donner l'expression de $S_z(f)$. c). Même question pour $Z(t) = X_1(t)\ .\ X_2(t)$

9. Soient X(t) et Y(t) deux signaux aléatoires stationnaires et conjointement stationnaires. On considère Z(t) = X(t) + Y(t),
   - Calculer $S_z(f)$.
   - Les deux signaux sont supposés indépendants avec $R_X(\tau) = e^{-a|\tau|}$ et $R_Y(\tau) = b\,\delta(\tau)$, calculer $S_z(f)$.

   Si $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ avec φ une v.a equirépartie sur $[0, 2\pi]$, calculer $S_z(f)$

10. Soient X(t) et Y(t) deux processus aléatoires décorrélés SSL de moyennes 1 et de variance 2 et soit Z(t)=X(t)+Y(t)

   - ✓ Z(t) est-il SSL ?
   - ✓ Quel est l'intérêt de supposer qu'un processus est ergodique ?

11. Le signal aléatoire x(t) possède une fonction d'autocorrélation de la forme $R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\beta|\tau|}$. Un autre signal est lié à x(t) par l'équation déterministe suivante : y(t) = ax(t) + b, où a et b sont des constantes données.

- Quelle est la fonction d'autocorrélation de y(t) ? En déduire μ_y et σ_y^2
- Quelle est la fonction d'intercorrélation et de covariance de x(t) et y(t) ?
- Calculer le coefficient de corrélation. Ce résultat était-il prévisible, pourquoi ?

12. Soit φ une v.a. supposée suivre une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ et soit X(t) un processus aléatoire défini comme suit : $X(t)=\cos(\varphi)\, e^{2\pi j f_0 t} + \sin(\varphi) e^{-2\pi j f_0 t}$
1. Etudier la stationnarité d'ordre 1 et 2 du processus X(t).
2. Peut-on calculer sa DSP? si oui calculer la.

13. Parmi les fonctions d'auto-corrélation satitistiques suivantes lesquelles peuvent être celles d'un processus aléatoire réel?

Rx1(τ)= $\Lambda_2(\tau) - 2$	Rx2(τ)= $-\Lambda_2(\tau) + 2$	Rx3(τ)= $e^{-2\|\tau\|}$	Rx4(τ)= $e^{-2\tau}U(\tau)$	Rx5(τ)=δ(τ-1)+δ(τ+1)

14. Soit le signal aléatoire x(t) SSL dont la DSP est donnée par Sx(f)= $\sigma^2 B \prod_B(f)$
   - Déterminer l'autocorrélation statistique de x(t)
   - En déduire la moyenne et la variance statistique de x(t).

Ce signal est transmis à travers un SLIT dont la fonction de transfert H(f) = $\prod_A(f)$ avec A <B

   - e signal de sortie est-il aléatoire? (Justifier) SSL? (Justifier)
   - b-Déterminer Sy(f) et en déduire Ry(τ) puis les moments statistiques d'ordre 1 de y(t).

Solutions

TP n° 2 : Processus aléatoires (Stationnarité et Ergodisme)

But :1. Manipuler des signaux aléatoires, les caractériser grâce à leurs moments d'ordre 1 (moyenne, variance) et d'ordre 2 (autocorrélation, covariance).

2. Aborder et acquérir les notions de stationnarité et d'ergodicité.
3. Comprendre le rôle d'une matrice variance covariance.

Exercice 1:

```
%% Processus Aléatoire
clc; clear all; close all;
N_realis=1000; N_va=1000; A=1; f0=0.0025;
phi=2*pi*rand(N_realis,1);
for i=1:N_realis
for j=1:N_va
X(i,j)=A*cos(2*pi*f0*j+phi(i));
end
end
t=(1:N_va);
figure (1);
plot(t,X(1,:),t,X(2,:),t,X(3,:),t,X(4,:),t,X(5,:),t,X(6,:))

%% Stationnarité d'ordre 1
moy=mean(X,1);
v=var(X,1,1);
figure (2); subplot (1,2,1); plot(moy);AXIS([1 N_va -1 1])
subplot (1,2,2); plot(v);
AXIS([1 N_va 0 1]);

%% Stationnarité d'ordre 2
RX=cov(X);
figure (3);
plot(t,RX(1,:),t,RX(4,:),t,RX(7,:),t,RX(10,:),t,RX(13,:),t,RX(16,:))

%% Ergodisme d'ordre 1 et 2

% d'ordre 1
moy_t=mean(X(1,:));
v_t=var(X(1,:));

% d'ordre 2
tt=(-N_va+1:N_va-1);
RXt=xcorr(X(1,:));
figure (4);
plot(tt,RXt);
```

1. Quelle est la différence entre les 6 réalisations affichées.
2. A partir d'une visualisation peut-on prévoir la stationnarité ou l'ergodicité?
3. Ce processus est-il stationnaire d'ordre 1 ? Justifier
4. Calculer l'auto-corrélation statistique théorique puis commenter la figure 3.
5. Utiliser le workspace pour visualiser RX, ce processus est-il stationnaire d'ordre2 ? Justifier.
6. Comparer les moments statistiques et temporaux et conclure. En déduire la DSP de X.

Exercice 2

On considère le processus aléatoire $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ considérant φ cste et A uniforme entre -1 et 1.

1. Simuler le processus pour `N_realis=100; N_va=1000`
2. Es-il stationnaire d'ordre 1 ? (Vérifier théoriquement puis avec matlab)
3. Est-il stationnaire d'ordre 2 ? (Visualiser RX(1,:), RX(20,:), RX(30,:)) et utiliser le workspace.
4. Peut-on calculer sa DSP statistique?

Exercice 3

On suppose le processus suivant b est ergodique d'ordre 2 et on se contente de déduire les propriétés statistiques des propriété temporelles en étudiant une réalisation unique bb.

```
clc; clear all; close all;
moy=0; var=1; N=1024; M =100;
b=moy+sqrt(var)*randn(M,N);
bb=b(1,:);
% Afficher la corrélation Sigmab et la dsp du bruit blanc Sbb(f)
RX=xcorr(bb)/N;t=(-N+1:N-1);
subplot(2,1,1); plot(t,RX);
legend('Autocor du bruit blanc'); xlabel('Temps(s)'); ylabel('Amplitude');
Fb=fft(bb);Sbb=abs(Fb).^2/N;f=(-1/2:1/N:1/2-1/N);
subplot(2,1,2);plot(f,abs(Sbb));AXIS([min(f) max(f) 0 20]);
legend('Densité du bruit blanc'); xlabel('Frequence (Hz)');ylabel('Amplitude');
```

1. Commenter les graphes obtenus.
2. Pourquoi n'obtient-on pas une DSP cste?
3. Prendre une moyenne de 2 et une variance de 4 et retrouver ces caractéristiques à partir de l'autocorrélation

Exercice 4

Télécharger le fichier 'vous avez du courrier en attente.wav' et le placer dans le même répertoire que votre programme commençant come suit :

```
clc; clear all; close all;
nom_fich = uigetfile('*.wav', 'Selectionner le fichier son');
% Lire, écouter et afficher le son complet
[x,fe]=wavread(nom_fich);sound(x,fe); t=(0:length(x)-1)/fe; subplot(2,1,1);plot(t,x);
legend('Son');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude');
% afficher une partie du son qui correspond à une voyelle
N1=21000;N2=21500;x=x(N1:N2)
N=length(y);t=(N1:N2)/fe; subplot(2,1,2);plot(t,x);
legend('Voyelle sur 25 ms');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude');
% Calculer et afficher la DSP
Sx= abs(fft(x).^2)/N; f=(0:fe/N:fe/21/N);
figure; plot(f,Sx));
legend('Spectre'); xlabel('Frequence (Hz)'); ylabel('Amplitude (dB)');
```

1. Le signal étudié est un processus aléatoire ou une réalisation d'un signal aléatoire?
2. La DSP calculée est-elle d'origine statistique ou temporelle?
3. Calculer et visualiser la DSP pour différentes parties du signal qui se chevauchent pour des durées de N=1000,500, 250, 125. Pour quelle valeur de N peut-on considérer le processus stationnaire?
4. Expliciter l'importance des notions de stationnarité et d'ergodisme.