

**Chapitre I : Rappels sur les variables et vecteurs aléatoires**

**1. Variables aléatoires et probabilités**

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs  $p(x)$  ou  $prob(x_i)$

$p(A) \stackrel{def.}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_A}{N}$  Où  $A$  un résultat possible d'une expérience aléatoire,  $N$  le nombre de réalisation de l'expérience et  $n_A$  le nombre de fois que le résultat  $A$  est apparu

$p(A, B) \stackrel{def.}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_{AB}}{N}$  Où  $A$  et  $B$  deux événements distincts avec  $n_{AB}$  = nombre de fois que  $A$  et  $B$  sont apparus

$p(A, B) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{n_{AB}}{n_A} \frac{n_A}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{n_{AB}}{n_A} \right) \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{n_A}{N} \right) \stackrel{def.}{=} p(B/A) \cdot p(A)$

Où  $(B/A)$  une probabilité conditionnelle c'est la probabilité que  $B$  ait lieu sachant que  $A$  a eu déjà lieu.

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants  $p(A/B)=p(A)$  de même  $p(B/A)=p(B)$  d'où  $p(A, B)=p(A) \cdot p(B)$

VA discrète

$\sum_i prob(x_i) = 1$

- Fonction de répartition  $F_X(x_i) = Prob(X \leq x_i)$

$F_X(x_i) = \sum_{j=inf}^i Prob(x_j)$

VA continue

$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$

- Fonction de répartition  $F(X) = \int_{-\infty}^x p(x) dx$

$\Rightarrow p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

**2. Moments statistiques**  $E\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx$

o VA discrète:

$moy = \mu_x = E\{x\} = \sum_i x_i p(x_i)$

$Var = \sigma_x^2 = E\{(x - \mu_x)^2\} = \sum_i (x_i - \mu_x)^2 p(x_i)$

$Var = \sum_i x_i^2 p(x_i) - \mu_x^2$

o VA continue  $x \in [a, b]$

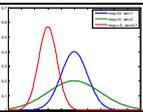
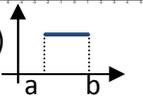
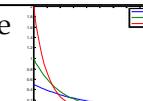
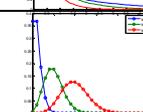
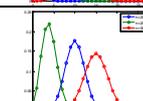
$moy = \mu_x = E\{x\} = \int_a^b x \cdot p(x) dx$

$Var = \sigma_x^2 = E\{(x - \mu_x)^2\} = \int_a^b (x - \mu_x)^2 p(x) dx$

$Var = \int_a^b x^2 p(x) dx - \mu_x^2$

Propriétés de l'espérance  $E\{X+Y\}=E\{X\}+E\{Y\}$   $E\{aX\}=aE\{X\}$   $\forall a \in \mathbb{R}$   $E\{a\}=a$   $\forall a \in \mathbb{R}$

**3. Lois de probabilité usuelles**

Loi Gaussienne 	$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2}\right)$	$\mu_x$	$\sigma_x^2$
Loi uniforme  $\frac{1}{(b-a)}$	$p_X(x) = \frac{1}{b-a}$ pour $a \leq x \leq b$	$\mu_x = \frac{a+b}{2}$	$\sigma_x^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$
Loi exponentielle 	$p_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$	$\mu_x = 1/\lambda$	$\sigma_x^2 = 1/\lambda^2$
Loi de poisson 	$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$\mu_x = \lambda$	$\sigma_x^2 = \lambda$
Loi Binomiale 	$p_X(x) = C_n^x p^x (1-p)^{(n-x)}$ $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\mu_x = np$	$\sigma_x^2 = np(1-p)$

*Théorème central limite et approximations* : Chaque fois qu'un phénomène peut être considéré comme la résultante d'un grand nombre de causes aléatoires, il suit une loi de distribution normale.

#### 4. Vecteurs Aléatoires

Une variable aléatoire à plusieurs dimensions (vecteur de VA) est le résultat dépendant de plusieurs caractères aléatoires. Elle est caractérisée par :

- fonction de répartition conjointe :  $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$

- densité de probabilité conjointe :  $p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  liée par:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

Loi de distribution marginale  $P_{X_1, X_2, \dots, X_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n) du_{m+1} \dots du_n$

*Changements de variables* : Soit X une VA continue caractérisée par sa densité de probabilité  $p_X(x)$  alors la VA continue  $Y=f(X)$  a une densité de probabilité donnée par :  $p_Y(y) = |J| [p_X(x)]_{x=f^{-1}(y)} = \left| \frac{\partial X}{\partial Y} \right| [p_X(x)]_{x=f^{-1}(y)}$

Généralisation pour n VA: Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un vecteur de VA continue caractérisée par sa densité de probabilité  $p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , alors le vecteur de VA continue  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$  a une densité de probabilité donnée par :

$$p_Y(y_1, \dots, y_n) = |J| [p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)]_{x_1, \dots, x_n = f^{-1}(y_1, \dots, y_n)} \quad \text{avec} \quad J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial Y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_n}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial Y_n} \end{bmatrix}$$

*Covariance et coefficient de corrélation*  $\rho_{x_1 x_2} = C_{x_1 x_2} / (\sigma_{x_1} \sigma_{x_2})$

$$C_{x_1 x_2} = \sigma_{x_1 x_2} = E\{(x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2})^*\} = E\{x_1 \cdot x_2^*\} - \mu_{x_1} \mu_{x_2}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \mu_{x_1} \cdot \mu_{x_2}^*$$

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendants  $\Rightarrow C_{x_1 x_2} = 0$ . On dit que les variables sont décorrélées.

Le coefficient de corrélation mesure le degré de dépendance linéaire entre  $X_1$  et  $X_2$ . Pour un vecteur aléatoire

$$C_X = E\{\underline{X}_C \cdot \underline{X}_C^T\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & \sigma_2^2 & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Cas d'un vecteur aléatoire Gaussien : Un vecteur aléatoire réel de dimension n  $(X_1, \dots, X_n)$  est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire de  $X_1, \dots, X_n$  est une variable aléatoire gaussienne réelle.

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_X)}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{X} - \underline{\mu}_X)^T C_X^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu}_X)}$$

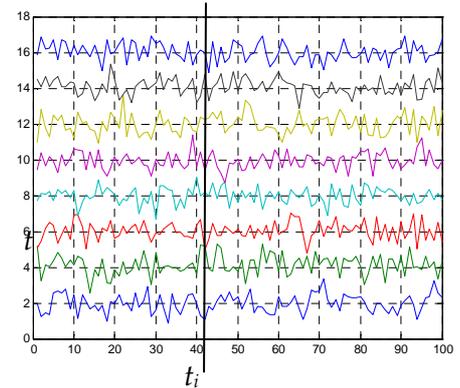
La variable aléatoire :  $Y = \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k = \alpha^T \underline{X}$  est une variable aléatoire réelle Gaussienne de moyenne et sa variance qui ont pour expressions respectives :

$$E\{y\} = \sum_{k=1}^n \alpha_k E\{X_k\} = \alpha^T \underline{\mu}_X$$

$$\sigma_y = \sum_{j,k=1}^n \alpha_j \alpha_k \text{cov}\{X_j, X_k\} = \alpha^T C_X \alpha$$

Chapitre II : Processus aléatoires

Un processus aléatoire ne possède pas de représentations temporelles analytiques. Chaque signal aléatoire observé représente une réalisation particulière de ce processus.



- Chaque tracé fournit un signal aléatoire

- à l'instant  $t_i$ , le processus se réduit à une v.a  $x_i$  dont la densité est  $p(x; t_i) = p(x_i)$

- Deux instants  $t_i$  et  $t_j$  permettent de définir deux variables aléatoires  $x_i$  et  $x_j$  on peut définir des  $p(x; t_i, t_j) = p(x_i, x_j)$

Statistiques de 1<sup>er</sup> ordre

- moyenne statistique:  $\mu_x(t_i) = E\{x(t_i)\} = E\{x_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x, t_i) dx$

- variance:  $\sigma_x^2(t_i) = E\{x_i - \mu_x(t_i)\}^2 = E\{x_i^2\} - \mu_x(t_i)^2$  où  $E\{x_i^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x, t_i) dx$  valeur quadratique moyenne

Statistiques de 2<sup>ème</sup> ordre: 2 instants  $t_1$  et  $t_2$  donc probabilité conjointe.

- Fonction d'autocorrélation statistique:  $C_x(t_1, t_2) = E\{ [x(t_1) - \mu_x(t_1)] \cdot [x(t_2) - \mu_x(t_2)] \} = R_x(t_1, t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_x(t_2)$

- Fonction d'autocovariance statistique:  $R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1) \cdot x^*(t_2)\} = E\{x_1 \cdot x_2^*\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2^* \cdot p(x_1, x_2; t_1, t_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$

Si processus centrés ( $\mu_x(t)=0$ ):  $C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$

- Fonction d'intercorrélation statistique:  $R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1) \cdot y^*(t_2)\} = E\{x_1 \cdot y_2^*\}$

- Fonction d'intercovariance statistique:  $C_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_y^*(t_2)$

- Le coefficient de corrélation est définie par:  $\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{C_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)} \quad -1 \leq \rho_{xy}(t_1, t_2) \leq 1$

**Processus stationnaires :** Un processus aléatoire est dit stationnaire au sens  $\Leftrightarrow p(x, t_i) = p(x)$ ;

strict lorsque toutes ces caractéristiques statistiques c'est à dire tous ses  $\mu_x(t_i) = \mu_x$

moments à tout ordre sont indépendants de l'origine du temps.

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(\tau) \text{ avec } \tau = t_2 - t_1$$

- Un processus stationnaire est stationnaire d'ordre 1  $\mu_x(t) = \mu_x = cste$  et  $\sigma_x^2(t_i) = \sigma_x^2$

- Un processus stationnaire est stationnaire d'ordre 2  $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$  avec  $\tau = t_2 - t_1$

Propriétés de la fonction d'autocorrélation pour x aléatoire réel SSL

-  $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$  avec  $\tau = t_2 - t_1$  et  $R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$

-  $R_x(0) = E(x(t)^2) = \mu_x^2 + \sigma_x^2$   $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E\{x(t)x(t+\tau)\} = \mu_x^2$

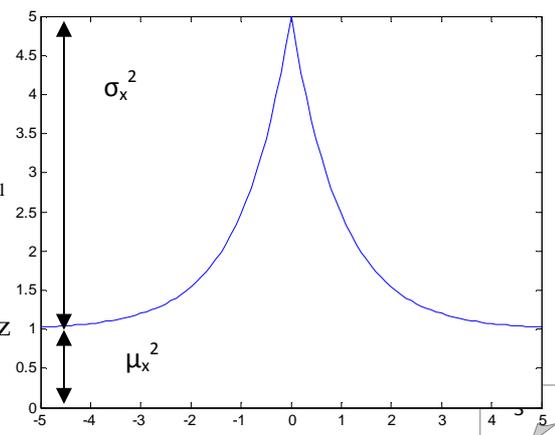
Cas discret :

$$\mu_x(n) = \mu_x = cste \quad \text{et} \quad R_x(n_1, n_2) = R_x(k) \text{ avec } k = n_2 - n_1$$

$$R_x(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(N-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(N-2) \\ & & \dots & \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix}$$

Matrice de Toeplitz

$R_x(\tau)$



Bruit blanc :  $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau)$  décorrélé et  $\mu_x=0$   $S_x(f) = \sigma_x^2$

Discret :  $R_x(k) = \sigma_x^2 \delta(k) \Rightarrow R_x(k) = 0$  pour  $k \neq 0$  et  $\mu_x(k) = 0$

Puissance et DSP :  $P_x = E(x(t)^2) = R_x(0) = \mu_x^2 + \sigma_x^2$   $E_x = \int P_x dt = \int E(x(t)^2) dt$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = R_x(0)$$

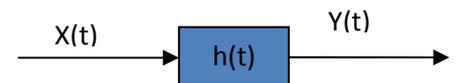
**Processus ergodiques** : Assimiler les résultats obtenus sur une réalisation à ceux obtenus pour un instant donné  $t_i$  pour différentes réalisations. Un processus aléatoire stationnaire est dit *ergodique* lorsque les valeurs moyennes statistiques et temporelles sont identiques.

$$\mu_x = \bar{x}; \quad R_x(\tau) = \varphi_x(\tau) \dots \quad P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)^2 dt \quad S_x(f) = TF\{R_x(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

### Chapitre III : Filtrage linéaire des signaux aléatoires

Si  $x(t)$  est un signal aléatoire SSL, le signal en sortie  $y(t)$  est forcément un signal aléatoire SSL avec :

avec  $\mu_y(t) = \mu_x H(0) \quad (f = 0)$



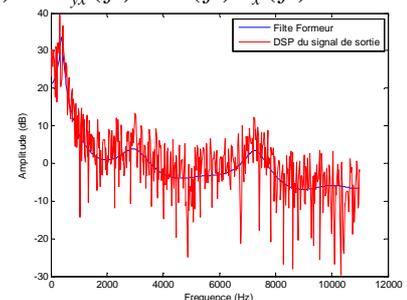
$$S_y(f) = TF(R_y(\tau)) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

La puissance moyenne du signal de sortie est :  $E\{y(t)^2\} = R_y(0) = \int |H(f)|^2 S_x(f) df$

#### Formule des interférences

$$S_{y_1 y_2}(f) = H_1(f) S_{x_1 x_2}(f) H_2^*(f) \quad S_{xy}(f) = S_x(f) H^*(f) \quad \text{et} \quad R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) \Rightarrow S_{yx}(f) = H(f) S_x(f)$$

Si le signal en entrée est un bruit blanc  $b(t)$  alors  $S_y(f) = \text{constante} |H(f)|^2$



#### Filtrage adapté et filtrage optimal

But : Rehausser le signal utile  $x(t)$  noyé dans le bruit  $b(t)$  SSL :  $s(t) = x(t) + b(t)$

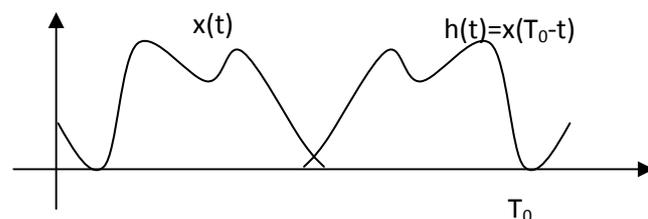
Recherche d'un filtre  $H(f)$  qui maximise le SNR à un instant  $T_0$ .

$$H(f)_{optimal} = k X^*(f) e^{-2\pi j f T_0} / S_b(f) \quad SNR(T_0)_{max} = \int \frac{|X(f)|^2}{S_b(f)} df$$

Si le bruit  $b(n)$  est blanc, filtre adapté:

$$H(f)_{adapté} = k / \sigma_b^2 X^*(f) e^{-2\pi j f T_0} \Rightarrow h(t)_{adapté} = k / \sigma_b^2 x^*(T_0 - t)$$

$$SNR(T_0)_{max} = E_x / \sigma_b^2$$



**Application** :  $x(t)$  signal émis signal reçu  $y(t)$  bruité atténué (de  $a$ ) et retardé de  $T_{AR}$   $y(t) = a.x(t - T_{AR}) + b(t)$ .

$h(t) = x^*(T_0 - t)$  alors :  $R_{yx}(t - T_0) = a.R_{xx}(t - T_0 - T_{AR}) + R_{bx}(t - T_0)$  maximum en  $T_0 + T_{AR}$

Chapitre IV : Processus générateurs AR, MA et ARMA

1. Modèle auto-régressif (AR)

Signaux obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre purement récuratif :  $H(z) = 1 / \left( 1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} \right)$

où  $x(n)$  est un bruit blanc  $R_x(k) = \sigma^2 \delta(k)$   $y(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$

L'obtention des paramètres  $a_i$  et  $\sigma^2$  par la résolution de ces équations :

$$\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & \dots & R_{yy}(N) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & \dots & R_{yy}(N-1) \\ & & \dots & \\ R_{yy}(N) & R_{yy}(N-1) & \dots & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdot \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Modèle à moyenne ajustée (MA)

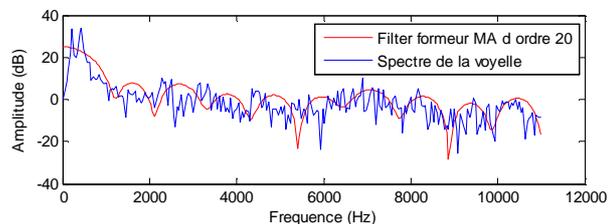
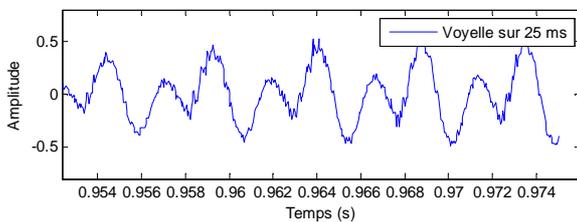
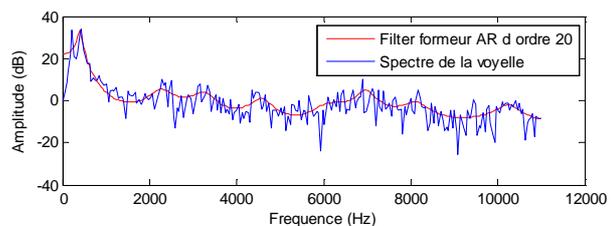
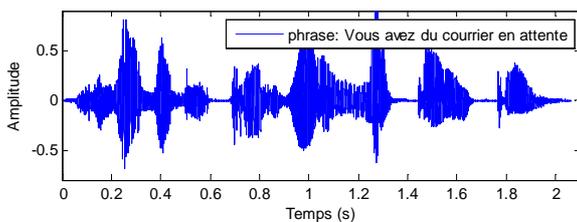
Les signaux à moyenne mobile sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre purement

transverse.  $H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$   $y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$   $\Rightarrow R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k} \cdot b_j$

Remarques :

-Equations non linéaires.

- Tout modèle MA peut être identifié à un modèle AR d'ordre infini:  $\sum_{i=0}^M b_i z^{-i} = 1 / \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}$



3. Modèle ARMA

Ces signaux sont une combinaison des signaux AR et MA Soit  $y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$

$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} / \left( 1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} \right) \quad R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^N a_i R_{yy}(k-i) + \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k} \cdot b_j$$

Applications: Modélisation, prédiction de série temporelle, estimation du spectre d'un signal aléatoire, etc.

Chapitre V et VI : Estimateurs

L'estimateur  $\hat{x}$  a pour biais  $b = E\{\hat{x} - x\}$  et pour variance:  $\sigma^2 = E\{(\hat{x} - E\{\hat{x}\})^2\} = E\{\hat{x}^2\} - E\{\hat{x}\}^2$   
 Le biais est la moyenne de l'écart et la variance est la puissance de l'écart (mesure les fluctuations de l'estimateur autour de la valeur souhaité). Un estimateur est *consistant* si  $\lim_{N \rightarrow +\infty} b_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma_N = 0$

1. Estimateurs des moyennes statistiques

Soit N échantillons  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  indépendants et identiquement distribués (même loi avec même paramètre) d'un signal aléatoire stationnaire

• Estimation de Moyenne  $\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k$  Estimateurs de variance :  $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - m)^2$   $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - \hat{m})^2$

• Estimateurs de la corrélation  $\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} x_n x_{n+k}$   $\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} x_n x_{n+k}$

• Estimateurs de la densité spectrale

- périodogramme  $\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{N} |Y(f)|^2$  avec  $Y(f) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi jfk}$

- corrélogramme  $\hat{S}_{xx}(k) = TF[\hat{R}_{xx}(k)]$

- périodogramme moyenné : Séparer le signal en K tranches (de longueur N/K), à calculer le périodogramme sur chaque tranche et à faire la moyenne.

2. Estimateur du maximum de vraisemblance :

On utilise cette estimateur lorsque que l'on cherche à déterminer une variable Y déterministe mais inconnue dépendant de mesures aléatoires (observations) X :  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Définition : On suppose que pour toute réalisation  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de l'échantillon X de densité  $p(x/y)$ , il existe une unique valeur y qui maximise la vraisemblance de la réalisation x. La vraisemblance s'écrit :

$$L(x|y) = \prod_{i=1}^n p(x_i|y)$$

Ainsi, le principe de la vraisemblance revient à déterminer la valeur du paramètre y et ce en fonction des observations  $(x_1, \dots, x_n)$ ; qui assure la plus grande probabilité d'apparition de ces observations  $(x_1, \dots, x_n)$ . Comme la fonction logarithme est strictement croissante, il revient au même de maximiser la vraisemblance  $Y \rightarrow L(x/y)$  que maximiser la log-vraisemblance  $Y \rightarrow \ln(L(x/y))$

3. Estimateurs Bayésiens :

On fait appel aux estimateurs Bayésiens pour estimer une variable aléatoire notée y aléatoire possédant une loi à priori et dépendant des observations x de dimension n :  $(x_1, \dots, x_n)$

Estimateur MAP L'estimateur du maximum a posteriori est obtenu en minimiser le risque de Bayes  $B(\hat{y}/x) = 1 - p(\hat{y}/x)$ .

$$p(y|x) = \frac{p(x|y)p(y)}{p(x)}$$

cela revient à maximiser  $\ln(p(x/y)) + \ln(p(y))$

4. Estimateur linéaire à variance minimale

Lorsque les probabilités précédentes  $p(y/x)$  et  $p(y)$  ne sont pas connues mais que l'on dispose des moments d'ordre 1 et 2 (moyennes supposées centrées des covariances  $R_{xy}$  et  $R_{xx}$ ), on utilise alors souvent l'estimateur linéaire non-biaisé à variance minimale. On recherche une estimée  $\hat{y}$  de  $y$  qui soit une fonction

linéaire des observations, c'est-à-dire  $\hat{y} = \sum_{i=1}^n h_i x_i = h^T x \Rightarrow h = \{y^T x\} / \{x^T x\} = R_{xy} / R_{xx}$

**Filtre de Wiener** : On cherche donc un filtre qui minimisera l'erreur quadratique moyenne  $\xi(n) = E(e^2(n))$ . Si on suppose que le filtre recherché H est un filtre RIF de longueur N, on peut en calculer les coefficients par résolution d'un système linéaire d'équations.  $h = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{N-1}]^T$

Le signal estimé  $\hat{y}(n)$  peut alors s'écrire :  $\hat{y}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)$

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \dots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(N-2) \\ & & \dots & \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \dots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{yx}(0) \\ R_{yx}(1) \\ \cdot \\ R_{yx}(N-1) \end{bmatrix}$$

Hypothèses supplémentaires : On suppose que l'observation  $x(n)=y(n)+bb(n)$  et que le bruit additif  $bb(n)$  est centré et non corrélé au signal. On peut alors simplifier les équations de Wiener-Hopf :

$$R_{yx}(k)=E\{y(n)(y(n-k)+bb(n-k))\}= R_{yy}(k) \quad R_{xx}(k)=E\{(y(n)+bb(n))(y(n-k)+bb(n-k))\}= R_{yy}(k)+R_{bb}(k)$$

Soit le système à résoudre suivant :

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \dots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(N-2) \\ & & \dots & \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \dots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) - R_{bb}(0) \\ R_{xx}(1) - R_{bb}(1) \\ \cdot \\ R_{xx}(N-1) - R_{bb}(N-1) \end{bmatrix}$$

5. Estimateurs au sens des moindres carrés

Le filtrage de Wiener requiert des statistique de second ordre des processus (moyennes et covariances). Une autre approche consiste à minimiser, non plus la moyenne stochastique, mais temporelle de cette erreur, c'est la méthode des moindre carrés qui se place en déterministe.

On suppose connues les données  $[x(0), x(1), \dots, x(N-1)]$  et en adoptant à nouveau un filtre FIR de longueur

M, on a  $e(n) = y(n) - \sum_{i=0}^{L-1} b_i x(n-i)$ , on cherche à minimiser  $\xi = \sum_{n=L}^N e^2(n) = \sum_{n=L}^N \left( y(n) - \sum_{i=0}^{L-1} b_i x(n-i) \right)^2$  n

donc un système d'équations 
$$\begin{bmatrix} \overline{R_{xx}(0)} & \overline{R_{xx}(1)} & \dots & \overline{R_{xx}(L-1)} \\ \overline{R_{xx}(1)} & \overline{R_{xx}(0)} & \dots & \overline{R_{xx}(L-2)} \\ & & \dots & \\ \overline{R_{xx}(L-1)} & \overline{R_{xx}(L-2)} & \dots & \overline{R_{xx}(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{R_{yx}(0)} \\ \overline{R_{yx}(-1)} \\ \cdot \\ \overline{R_{yx}(1-L)} \end{bmatrix}$$

Où  $R_{xx}$  et  $R_{yx}$  sont respectivement des autocorrélations et intercorrélations temporelles .