Examen Semestriel Processus aléatoire: Master ST et TRM 26 Mai 2012

Nom:............................ Prénom:..........................

Pas d'effaceur à emprunter, ni de téléphone portable

Exercice 1:

Q1. Que pouvez-vous dire sur la stationnarité des quatre processus a,b,c et d dont la moyenne ou la variance est donnée par la figure 1?

a)... b)...

c)... d)...

Q2. Un processus bruit blanc est défini par:

$$E[b_n]=0 \qquad \forall\ n;$$

$$E[b_n]=\sigma_b^{\ 2}<\infty \qquad \forall\ n;$$

$$E[b_n b_{n+k}]=0 \qquad \forall\ k>0.$$

Vrai ☐ **Faux** ☐

Q3. La fonction R(τ)=|sin(τ)| est une fonction d'autocorrélation valable d'un processus stationnaire au sens large.

Vrai ☐ **Faux** ☐

Q4.La fonction $S(w)=e^{-|2\pi f|}|\sin(2\pi f)$ est une densité spectrale de puissance pour un processus stationnaire au sens large.

Vrai ☐ **Faux** ☐

Q5. La densité de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par $p(x) = h\, x^2$, si $0<x<1$, et p(x) = 0 sinon. h est une constante à déterminer **(entourer la bonne réponse).**

h = 2 h = 3 E(X) = 0,5 E(X) = 0,75

Q6. Enoncer le théorème central limite (l'hypothèse et résultats (variance et moyenne)).

....
....
....
....
....
....
....

Q7. Déterminer la moyenne et la variance du processus x(t) dont l'autocorrélation est donnée à la figure 2.

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Q8: Quel est l'intérêt de l'hypothèse d'ergodicité pour un processus aléatoire?

……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………..

Q8: Pour estimer une variable θ, on propose deux estimateurs $\hat{\theta}_1$ *et* $\hat{\theta}_2$ de biais et variances respectives $b_1=0.5$ et $b_2=0.2$, $V_1=0.2$ et $V_2=0.45$. Lequel choisir et pourquoi?
……………………………………………………………………………………………

Q9: Soit la figure 3 représentant l'autocorrélation d'un processus discret à la sortie d'un filtre formeur. Déterminer la nature et l'ordre du modèle (AR, MA ou ARMA) en justifiant vos réponses.

……………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………….

Exercice 2:

On considère un filtre linéaire de fonction de transfert $H(f)=\dfrac{1}{a+j2\pi f}$ (avec a>0), attaqué par un signal $x(t)=s(t)+b(t)$, où $b(t)$ est un bruit blanc stationnaire de densité spectrale $S_b(f)=2a$ et $s(t)$ est un signal déterministe défini par:

$$s(t)=\Pi_T(t)=\begin{cases}1 & pour \ \dfrac{-T}{2}\leq t\leq \dfrac{T}{2}\\ 0 & \sin on\end{cases}$$

On notera $y(t)=y_s(t)+y_b(t)$, où $y_s(t)$ et $y_b(t)$ sont les sorties du filtre lorsque les entrées sont $s(t)$ et $b(t)$.

1) Donner l'ordre du filtre et expliquer la notion de stationnarité.
2) Déterminer la moyenne et la puissance de $y_b(t)$
3) Déterminer le rapport signal sur bruit à l'instant T/2.

Exercice 3:
Pour prédire un signal de parole, nous avons utilisé un système AR régi par l'équation aux différences $y(n)=0.5y(n-1)+x(n)$.

1) Déterminer la moyenne, la variance et l'autocorrélation de x(n)
2) Calculer la moyenne du signal de sortie.
3) Donner les équations de Yule-Walker et calculer les 3 premiers coefficients.
4) Tracer approximativement la fonction d'autocorrélation

Exercice 4 (3.5pts):

On considère la fonction de vraisemblance :

$$f_X(x;\theta) = \frac{2}{\theta} x \exp\left(-x^2/\theta\right) \qquad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

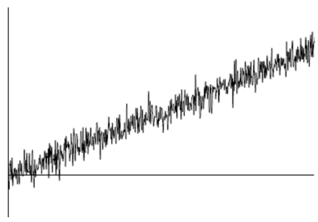
1) Montrer que $E\left[x^2\right] = \theta$.
2) Déterminer l'estimateur à vraisemblance maximum de θ. Cet estimateur est il sans biais? Justifier.
3) Calculer l'estimateur à vraisemblance maximum de θ si l'on a observé les valeurs suivantes de x:
   1.0, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.8, 2.0, 2.1, 2.2, 2.5

On rappelle que:

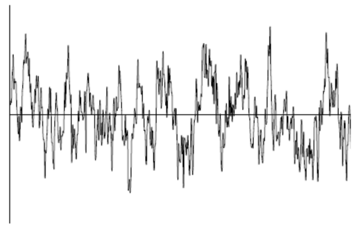
- ✓ $TF\left[e^{-at}u(t)\right] = \frac{1}{a + j2\pi f}$
- ✓ Pour un modèle AR,

Si k=0, $R_{yy}(0) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$ - Si k≠0, $R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$

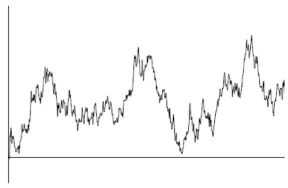
- ✓ $SNR(T_0)_{\max} = \frac{E_x}{\sigma_b{}^2}$ $SNR(T_0)_{\max} = \int \frac{\left|X(f)\right|^2}{S_b(f)} df$



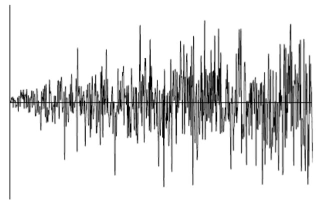
Moyenne (a)



Moyenne (b)



variance(c)



variance(d)

Figure 1

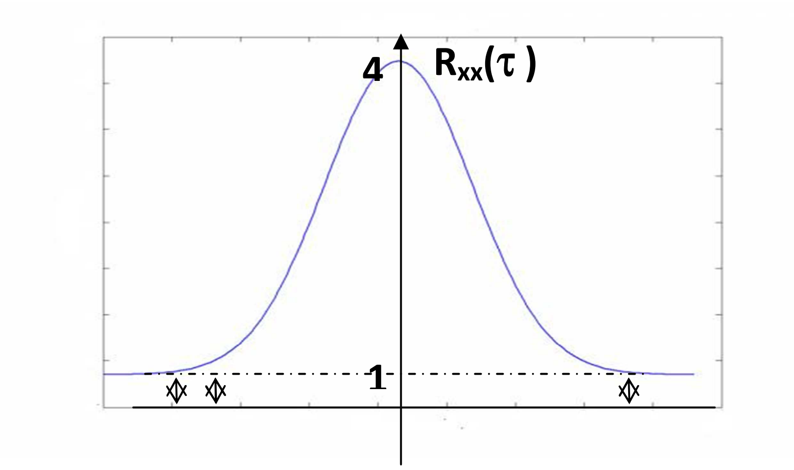


Figure 2

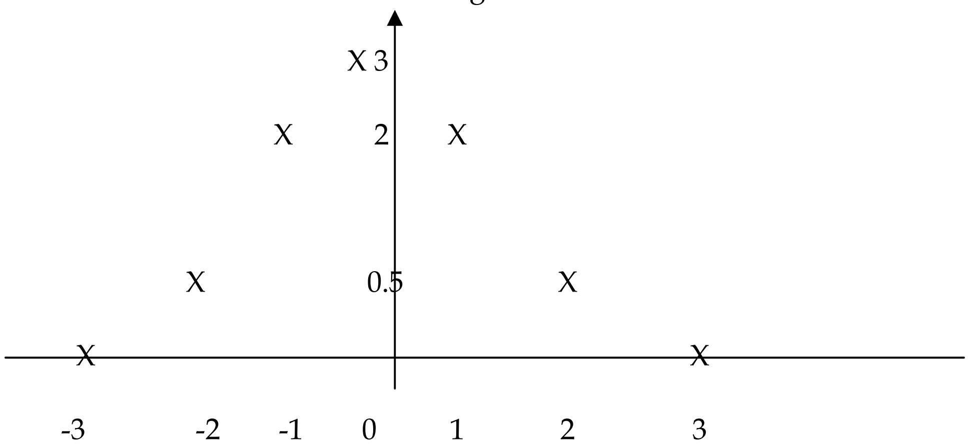


Figure 3

Nom:………………………… Prénom:……………………….