

Nom:..... Prénom:.....

Pas d'effaceur à emprunter, ni de téléphone portable

Exercice 1:

Q1. Rappeler le théorème de Wiener-Kintchine

.....

Q2. Démontrer que deux variables aléatoires indépendantes sont décorrélées

.....

Q3. La fonction $R(\tau) = |\sin(\tau)|$ n'est pas une fonction d'autocorrélation valable d'un processus stationnaire au sens large. Pourquoi ?

.....

Q4. La fonction $S(f) = e^{-|2\pi f|} \sin(2\pi f)$ ne peut représenter une densité spectrale de puissance pour un processus stationnaire au sens large. Pourquoi ?

.....

Q5. Dans quel cas, y'a-t-il équivalence entre l'estimateur MV et l'estimateur MAP

.....

Q6. Quelle est la différence entre le filtrage adapté et le filtrage optimal ?

.....

Q7. Quel est l'inconvénient d'un modèle MA ? Que fait-on dans ce cas ?

.....

Exercice 2:

A) Soit à transmettre un signal $x(t)$ stationnaire, ce signal est brouillé par un signal aléatoire $b(t)$, stationnaire centré de fonction d'autocorrélation $R_b(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $S_b(f)$ tel que $s(t) = x(t) + b(t)$. On supposera que $b(t)$ et $s(t)$ sont décorrélés. Le signal brouillé $s(t)$ est transmis à travers un canal de fonction de transfert $H(f)$ tel que la sortie $y(t)$ vaut :

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(\tau) d\tau$$

1. Déterminer la fonction de transfert $H(f)$. Ce filtre est-il causal ?
2. Comment agira ce canal de transmission sur le signal brouillé $x(t)$?

3. Déterminer la DSP du signal de sortie $y(t)$ en fonction de $S_b(f)$ et $S_x(f)$.

B) On suppose maintenant que l'on a reçu un signal brouillé $s(t)=x(t)+b(t)$ où $x(t)$ est un signal déterministe à énergie finie et $b(t)$ est le même signal que précédemment. On applique à $s(t)$ un filtrage optimal.

1. Quel est le but du filtrage optimal ?

Sachant que $x(t)=\Lambda_T(t-T)$ et que $b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale 1 :

2. Donner l'expression du filtre optimal

3. Calculer le rapport signal sur bruit à l'instant T_0 .

Exercice 3:

Pour modéliser un signal, nous avons utilisé un modèle régi par l'équation aux différences $y(n) = -0.5x(n-2) - 0.5x(n-1) + x(n)$ où $x(n)$ est un bruit blanc.

- 1) Quel est le type du modèle et l'ordre du modèle? Justifier.
- 2) $y(n)$ est-il centré ?
- 3) Calculer les 5 premiers coefficients de l'autocorrélation de $y(n)$.
- 4) Tracer la fonction d'autocorrélation de $y(n)$.
- 5) $y(n)$ est-il blanc ?

Exercice 4:

On a observé un échantillon indépendant de taille n : $x = (x_1, \dots, x_n)$ issu d'une même loi $p(x)$ de paramètre θ telle que :

$$p(x; \theta) = \frac{1}{2\theta^3} x^2 \exp(-x/\theta) \quad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

- 1) Montrer que $E\{x\} = 3\theta$ et en déduire que $E\{x^2\}$
- 2) Déterminer l'estimateur à vraisemblance maximum de θ . Cet estimateur $\hat{\theta}$ est-il sans biais? Justifier.
- 3) Calculer la variance de cet estimateur $\hat{\theta}$.
- 4) Quelle est approximativement la loi de $\hat{\theta}$ pour n suffisamment grand?

On rappelle que:

✓ Pour un modèle AR,

$$\text{Si } k=0, R_{yy}(0) = \sigma^2 \cdot 1 - \sum_{i=1}^N a_i R_{yy}(i)$$

$$\text{- Si } k \neq 0, R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^N a_i R_{yy}(k-i) \text{ Pour un}$$

$$\text{modèle MA : } R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k} \cdot b_j$$

✓ Filtrage optimal

$$SNR(T_0)_{\max} = \int \frac{|X(f)|^2}{S_b(f)} df$$

$$H(f)_{\text{optimal}} = k \cdot X^*(f) e^{-2\pi j f T_0} / S_b(f)$$

$$\checkmark \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4} dx = \pi/3$$

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features approximately 28 horizontal dotted lines spaced evenly down the page, providing a guide for handwriting practice. The paper is otherwise blank, with no margins, text, or other markings.