

Exercice 1:

On considère le schéma suivant : $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

Où $x(t)=s(t)+b(t)$ avec $s(t) = \sum_1 \Pi(t)$ et $b(t)$ est un bruit blanc Gaussien centré de variance 1

1. Déterminer la densité de probabilité de $x(t)$ est-il SSL ?

On considère $b'(t)$ et $s'(t)$ les sortes correspondant respectivement à $b(t)$ et $s(t)$.

2. Calculer $S_{b'}(f)$ et $S_{s'}(f)$ en fonction de $H(f)$

On veut maximiser le rapport signal sur bruit (SNR):

3. Déterminer et tracer $h(t)$ pour $k=2$ et $T_0=2$.

4. Calculer alors le SNR.

5. Quelle loi de probabilité suit $y(t)$ (justifier).

6. Donner un exemple concret de l'utilisation de ce type de filtre

7. Si $s(t)$ est déterministe et inconnu, quel filtre utilise-t-on ?

Exercice 2:

On considère le filtre linéaire à temps discret défini par $y(n) = x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$.

où $X(n)$ et $Y(n)$ désignent respectivement les processus aléatoires réels d'entrée et de sortie du filtre où b_1 et b_2 sont 2 coefficients réels. On suppose que $x(n)$ est une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes et de variance σ^2 .

1. Donner l'expression de $R_x(k)$ et celle de $S_x(f)$

2. Déterminer l'expression de $R_y(k)$ et tracer la pour $b_1=1$ et $b_2=-1$.

3. Connaissant la DSP du signal $y(n)$, sur quo se base-t-on pour le choix du modèle ?

Exercice 3 :

On considère une observation $x(n)=s(n)+w(n)$ où $w(n)$ est un bruit blanc de variance σ^2 indépendant de $x(n)$. On suppose aussi que le signal utile $x(n)$ est centrée et réduit et que les $x(n)$ sont indépendants.

1. Dans quel cas, utilise-t-on le filtre de Wiener ?

2. Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 3 permettant de retrouver le signal utile $\hat{s}(n)$.

3. Donner l'expression de $\hat{s}(n)$ en fonction de $x(n)$.

Exercice 4 :

Soient $(X_1, X_2, \dots, X_N)$, N variables aléatoires indépendantes suivant des lois de poisson de paramètre λ . Soient les estimateurs suivants du paramètre λ suivant :

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{x_1 + x_N}{2}$$

1. Que signifient le biais et la variance pour un estimateur ?

2. Calculer biais et variance des 2 estimateurs.

2. Lequel est le plus efficace et pourquoi ?

On rappelle que: $p_x(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, $m = \lambda$, $\sigma^2 = \lambda$

✓ Pour un modèle AR, Si $k=0$, $R_{yy}(0) = \sigma^2 \cdot 1 - \sum_{i=1}^N a_i R_{yy}(i)$ - Si $k \neq 0$, $R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^N a_i R_{yy}(k-i)$

✓ Pour un modèle MA : $R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k} \cdot b_j$

✓ $SNR(T_0)_{\max} = \frac{E_x}{\sigma_b^2}$ $h(t) = k \cdot \sigma_b^2 x^*(T_0 - t)$

$$\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & \dots & R_{yy}(N-1) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & \dots & R_{yy}(N-2) \\ & & \dots & \\ R_{yy}(N-1) & R_{yy}(N-2) & \dots & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xy}(0) \\ R_{xy}(1) \\ \vdots \\ R_{xy}(N-1) \end{bmatrix}$$

Nom:..... Prénom:.....
