Nom:.................................. Prénom:................................ Master ST et TRM

Exercice 1 (6)

$x(t) = s(t) + b(t)$ $\quad s(t) = \Pi_1(t)$ et $\begin{cases} b(t) \text{ bb centré de variance 1} \\ \Rightarrow R_b(\tau) = \delta(\tau) \Rightarrow S_b(f) = 1 \end{cases}$

1° b(t) Gaussien ⇒ x(t) Gaussien de moyenne s(t) et de variance 1 0.5

$\begin{cases} E\{x(t)\} = E\{s(t)\} + \cancel{E\{b(t)\}}^{0} = s(t) = \mu_x(t) \quad 0.5 \\ \sigma_x^2(t) = E\{x(t)^2\} - \mu_x(t)^2 = E\{s(t)^2\} + 2s(t)\cancel{E\{b(t)\}} + E\{b(t)^2\} - s(t)^2 \end{cases}$

$= \cancel{s(t)^2} + E\{b(t)^2\} - \cancel{s(t)^2} = \sigma_b^2 + \mu_{b_0}^2 = 1$ 0.5

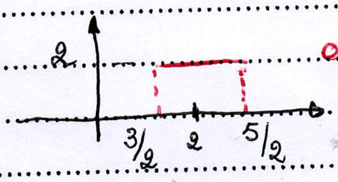
⇒ $p(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x(t)-s(t))^2}$ 0.5 puisque $\mu_x(t) = s(t)$ ⇒ non SSL 0.5

2° b(t) : aléatoire ⇒ $S_{b'}(f) = |H(f)|^2 S_b(f) = |H(f)|^2$ 0.5

s(t) : déterministe ⇒ $S_{s'}(f) = |S'(f)|^2 = |H(f) S(f)|^2 = |H^2(f)| \,\mathrm{sinc}\, f$ 0.5

3° filtrage adapté ⇒ $h(t) = k/\sigma_b^2 \; x^*(T_0 - t)$

$= 2\,\Pi(2 - t)$ 0.5



4° $SNR_{T_0} = E_s/\sigma_b^2 = \int_{-1/2}^{1/2} 1^2\, dt / 1 = 1/1 = 1$ 0.5

5° Le caractère Gaussien se conserve par passage par un SLIT ⇒ y(t) Gaussien 0.5 puisque x(t) est Gaussien (entrée Gaussienne ⇒ Sortie Gaussienne)

6° Radar ou Sonar pour détecter le signal reçu noyé dans du bruit 0.5

7° Un simple filtrage passe-bas $y(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt$ 0.5

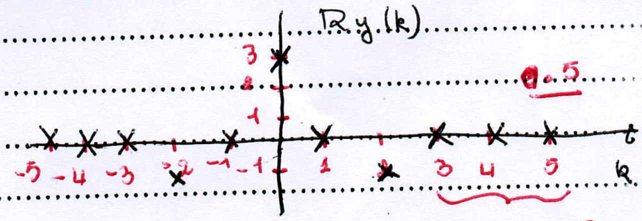
Exercice 2 (4)

1° x(n) v.a. centrées, indépendantes de variance σ^2 ⇒ $R_x(k) = \sigma^2 \delta(k)$ 0.5

⇒ $S_x(f) = 1$ 0.5

2° $R_y(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{2-k} b_{j+k}\, b_j$ puisque équation d'un modèle MA d'ordre 2 0.5

⇒ $\begin{cases} R_y(0) = 1 + b_1^2 + b_2^2 = 3 \quad 0.5 \\ R_y(1) = 1 \times b_1 + b_1 \cdot b_2 = 1 - 1 = 0 \\ R_y(2) = 1 \times b_2 = -1 \\ R_y(k) = 0 \quad k \geq 3 \end{cases}$



0.5

0.5

3° On se base sur la présence de minimas et maximas 1

minimas ⇒ MA ; maximas ⇒ AR ; minimas + maximas ⇒ ARMA

Nom:........................ Prénom:........................ Master ST et TRM

Exercice 3 (5)

$$\begin{cases} \text{observation } x(n) \\ \text{signal utile } s(n) \\ \text{modèle d'ordre 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & R_{xx}(2) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sx}(0) \\ R_{sx}(1) \\ R_{sx}(2) \end{bmatrix}$$ 0.5 0.5

1°- On utilise le filtre de Wiener pour estimer le signal utile stationnaire (estimer ou débruiter.) 0.5 0.5

2°- $R_{xx}(k) = E\{x(n)\,x(n-k)\} = E\{(s(n)+w(n))\,(s(n-k)+w(n-k))\}$

$= R_s(k) + R_w(k) + E\{\cancel{s(n)}\}\,E\{w(n-k)\} + E\{\cancel{s(n-k)}\}\,E\{\cancel{w(n)}\}$

$= R_s(k) + R_w(k)$ 0.5

$$\begin{cases} k=0 & R_{xx}(0) = R_s(0) + R_w(0) = 1+\sigma^2 \\ k\neq 0 & R_{xx}(k) = 0+0 \quad \text{puisque } s(n) \text{ indépendants et } w(n) \text{ bruit blanc} \end{cases}$$ 0.5

$R_{sx}(k) = E\{s(n)\,x(n-k)\} = E\{s(n)\,s(n-k)\} + E\{\cancel{s(n)}\}\,E\{\cancel{w(n-k)}\}$

$= R_{ss}(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases}$ 0.5

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+\sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow b_0 = \frac{1}{1+\sigma^2}, \quad b_1 = b_2 = 0$$ 0.5 0.5

3°- $H(z) = \sum b_i z^{-i} \Rightarrow \hat{s}(n) = \sum b_i\, x(n-i) \Rightarrow \hat{s}(n) = \frac{1}{1+\sigma^2}\, x(n)$ 0.5

Exercice 4 (5.0)

1°- C'est la différence entre la moyenne des valeurs estimées et la vraie valeur 0.5

- c'est la moyenne des écarts entre les valeurs estimées et la valeur estimée moyenne 0.5

2°- $$\begin{cases} E\{\hat{d}_1\} = E\left\{\frac{\sum x_i}{n}\right\} = \frac{1}{n}\sum E\{x_i\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1} d = d \Rightarrow b_{\hat{d}_1} = d-d = 0 \\ E\{\hat{d}_2\} = E\left\{\frac{x_1}{2} + \frac{x_n}{2}\right\} = \frac{1}{2}E\{x_1\} + \frac{1}{2}E\{x_n\} = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d = d \Rightarrow b_{\hat{d}_2} = 0 \end{cases}$$ 0.5 0.5

- $\sigma^2_{\hat{d}_1} = E\{(\hat{d}_1 - E\{\hat{d}_1\})^2\} = E\left\{\left(\frac{\sum x_i}{n} - \frac{1}{n}\sum d\right)^2\right\} = \frac{1}{n^2}E\left\{\left(\sum(x_i - d)\right)^2\right\}$

Sachant que les x_i sont indépendants et que $E\{x_i - d\} = 0$

$\Rightarrow \sigma^2_{d_1} = \frac{1}{n^2}\sum_1^n \underbrace{E\{(x_i-d)^2\}}_{\sigma^2} = \frac{1}{n^2}\, n\,\sigma^2 = \sigma^2/n$ 1 pt

- $\sigma^2_{\hat{d}_2} = E\{(\hat{d}_2 - E\{\hat{d}_2\})^2\} = E\left\{\left(\frac{x_1+x_n}{2} - d\right)^2\right\} = E\left\{\left(\frac{x_1-d}{2} + \frac{x_n-d}{2}\right)^2\right\}$

$= E\left\{\left(\frac{x_1-d}{2}\right)^2\right\} + E\left\{\left(\frac{x_n-d}{2}\right)^2\right\} = \frac{1}{4}\left(\underbrace{E\{(x_1-d)^2\}}_{\sigma^2} + \underbrace{E\{(x_n-d)^2\}}_{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^2}{2}$ 1.0

3°- $$\begin{cases} b_{\hat{d}_1} = b_{\hat{d}_2} = 0 \\ \sigma^2_{\hat{d}_1} < \sigma^2_{\hat{d}_2} \end{cases} \Rightarrow \text{Le premier est plus efficace}$$ 0.5

$\left(\sigma^2_{\hat{d}_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$ 0.5