Examen Semestriel Processus aléatoire: Master ST 02 Juin 2014

Nom:............................. Prénom:.............................

Exercice 1 6.5

1°/ $x(t) = A + b(t)$ $Rb(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \Rightarrow Sb(f) = \sigma^2$, $E\{b(t)\} = 0$ 0.5

$Rx(t,\tau) = E\{x(t)\,x^*(t-\tau)\} = E\{A^2\} + E\{A\,b(t)\} + E\{A\,b^*(t-\tau)\} + Rb(\tau)$

$= A^2 + Rb(\tau) + A\,E\{\cancel{b(t)}_0\} + A\,E\{\cancel{b^*(t-\tau)}_0\} = A^2 + Rb(\tau)$ 1

2°/ $\mu x(t) = E\{A\} + E\{\cancel{b(t)}_0\} = A = cste$, $Rx(t,\tau) = Rx(\tau) \Rightarrow$ SSL 0.5

3°/ $\mu y(t)$ puisque $x(t)$ SSL $\Rightarrow y(t)$ SSL $\Rightarrow \mu y = \mu x\,H(0)$

or $H(f) = TF\{\frac{1}{T}\Pi_T(t - T/2)\} = sinc(fT)\,e^{-\pi j f T} \Rightarrow H(0) = 1 \Rightarrow \mu y = A$ 1

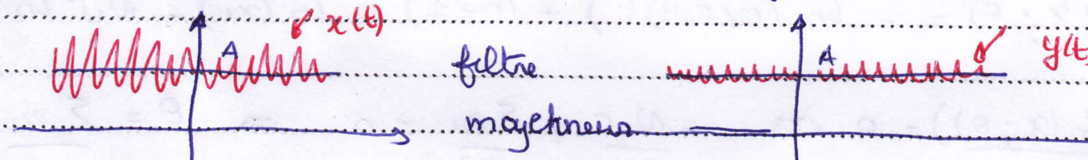
4°/ $Ryy(\tau) = TF^{-1}\{Sy(f)\} = TF^{-1}\{|H(f)|^2\,Sx(f)\} = TF^{-1}\{|sinc^2(fT)|\,Sx(f)\}$ 0.5

$\Rightarrow Ryy(\tau) = TF^{-1}\{sinc^2(fT)\,[A^2\delta(f) + \sigma^2]\}$

$= TF^{-1}\{A^2\delta(f) + \sigma^2 sinc^2(fT)\} = A^2 + \frac{\sigma^2}{T}\Lambda_T(t)$ 1

Sachant que $Ryy(0) = \mu y^2 + \sigma y^2$ $Ry(\infty) = \mu y^2 \Rightarrow \mu y = A$ et $\sigma y^2 = \sigma^2/T$ 1

5°



1

Exercice 2 4.5

1°/ $Ry(k) = \alpha^{|k|} = Ry(k)$ $k \to \infty$ $Ry(k) \to 0 \Rightarrow$ Modèle AR 1

2°/ $x(n)$ — $h(n)$ — $y(n)$ signal à modéliser avec $H(z) = \dfrac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$ 0.5

bb decorelé 0.5 0.5

paramètres du modèle 0.5

$Rx(k) = \sigma_x^2\,\delta(k)$

3°/ bb, Ergodisme 0.5

4°/ $\begin{bmatrix} Ryy(0) & Ryy(1) \\ Ryy(1) & Ryy(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\alpha \\ \sigma_x^2 = 1 - \alpha^2 \end{cases}$ 1

Exercice 3 4.5

1

$y(n) = z(n) + b(n)$ 0.5 $Rzz(\infty) = 0 \Rightarrow \mu z = 0$ $Rbb(\infty) = 0 \Rightarrow \mu b = 0$

1°/ Adapté et moyenneur pour filtre signal déterministe 0.5

2°/ $Ry(k) = E\{y(n)\,y(n-k)\} = Rz(k) + E\{\cancel{z(n)}_0\}\,E\{\cancel{b(n-k)}_0\} + E\{\cancel{z(n-k)}_0\} \times E\{\cancel{b(n)}_0\}$

$+ Rb(k)$

0.5 $Rzy(k) = E\{z(n)\,y(n-k)\} = Rz(k) + E\{\cancel{z(n)}_0\}\,E\{\cancel{b(n-k)}_0\}$

$= Rz(k)$

$$\begin{bmatrix} R_{zz}(0)+R_{bb}(0) & R_{zz}(1)+R_{bb}(1) \\ R_{zz}(1)+R_{bb}(1) & R_{zz}(0)+R_{bb}(1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{zz}(0) \\ R_{zz}(1) \end{bmatrix}$$ 0.5

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0.75 \\ 0.75 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b_0 = \quad \text{et} \quad b_1 =$$ 1

3% $H(z) = \quad + \quad z^{-1}$ 0.5

Exercice 4 (4.5)

1% Pour déterminer une variable déterministe à partir d'observations aléatoires indépendantes et identiquement distribuées 1

2% $L(x;\theta) = \prod_N p(x_i;\theta) = \dfrac{1}{N(r-1)!} \cdot \dfrac{\prod x_i^{r-1}}{\theta^{N.r}} \cdot e^{-\frac{\sum x_i}{\theta}}$

$\Rightarrow \ln(L(x;\theta)) = -\ln(N(r-1)!) + (r-1)\sum \ln(x_i) - N.r\ln(\theta) - \dfrac{\sum x_i}{\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{d\ln(L(x;\theta))}{d\theta} = 0 \Rightarrow -\dfrac{N.r}{\theta} + \dfrac{\sum x_i}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\sum x_i}{N.r}$ 1

3% $b_{\hat\theta} = E\{\hat\theta\} - \theta = E\left\{\dfrac{\sum x_i}{N.r}\right\} - \theta = \dfrac{1}{N.r}\sum E\{x_i\} - \theta = \dfrac{1}{N.r}\sum \theta r - \theta = \theta - \theta = 0$ 0.5

4% $\sigma^2_{\hat\theta} = E\{(\hat\theta - E\{\hat\theta\})^2\} = E\left\{\left(\dfrac{\sum x_i}{N.r} - \theta\right)^2\right\} = E\left\{\left(\dfrac{\sum x_i}{N.r} - \dfrac{\sum \theta r}{N.r}\right)^2\right\}$

$= \dfrac{1}{N^2 r^2} E\left\{\left(\sum (x_i - \theta r)\right)^2\right\}$

Sachant que les x_i sont indépendants et que $E\{x_i - \theta r\} = 0$ puisque $E\{x_i - \theta r\} = \underbrace{E\{x_i\}}_{moy} - \underbrace{\theta r}_{moy} = 0$

$\Rightarrow \sigma^2_{\hat\theta} = \dfrac{1}{N^2 r^2} \cdot E\{\sum (x_i - \theta r)^2\} = \dfrac{1}{N^2 r^2} \cdot \sum \underbrace{E\{(x_i - \theta r)^2\}}_{var}$

$\Rightarrow \sigma^2_{\hat\theta} = \dfrac{1}{N^2 r^2}\sum r\theta^2 = \dfrac{1}{N^2 r^2} \cdot N.r\,\theta^2 = \theta^2 / N.r$ 1.5

5° $b = 0 \quad \sigma_{\hat\theta} \to 0$ pour $N \to \infty \Rightarrow$ consistant 0.5