Exercice 1

On considère un signal aléatoire à temps continu x(t) que l'on suppose réel, centré et stationnaire au senslarge. On suppose qu'au cours d'une transmission, un récepteur reçoit le signal y(t) donné par :
$y(t) = x(t) + \alpha x(t - \theta)$
oùαet θsont des constantes réelles.

1. Montrer que y(t) est SSL.
2. Exprimer la puissance de y(t) en fonction de Rx(0) et Rx(θ)
3. Calculer Sy(f) la densité spectrale de y(t) en fonction de celle de x(t)
4. Justifier que y(t) est obtenu par filtrage de x(t).
5. Trouver alors la réponse en fréquence H(f) du filtre

Exercice 2:

Soit un processus AR défini par :
y(n)=-a1 y(n-1) – a2 y(n-2) + x(n) où x(n) bbdécorrélé de variance 1

1. Calculer $\mu_y(n)$
2. Sans calcul, expliquer pourquoi y(n) est SSL.
3. Montrer que pour k>0, Ry(k)=-a1 Ry(k-1)-a2 Ry(k-2)
4. Déterminer a1 et a2

Exercice 3 :

On considère un processus de la forme y(n)=x(n)+α x(n-1)+b(n) ou b(n) est un bbdécorréléde variance σ^2 . On suppose que x(n) est une variable aléatoire uniforme à valeurs 1 ou -1, indépendante de b(n). On suppose aussi que x(n) et x(j) sont indépendants pour n$\neq$j.

1. Montre queμx =0 et σx^2=1.
2. Montrer que Ry(k)= (1+α) Rx(k)+αRx(k+1) + αRx(k-1) +Rb(k)
3. Ecrire les équations de Wiener Hopf d'ordre 4 en fonction de α et σ^2

Exercice 4 :

Soient $(X_1, X_2, \ldots\ldots X_N)$, N variables aléatoires indépendantes suivant une loi de probabilité définie par :

$$p(x;a) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{(x-a)}{\theta}}. & si \;\; x \geq a \\ 0 & ailleurs \end{cases} \qquad où \qquad a > 0 \; et \;\; \theta > 0 \qquad E\{x\} = a + \theta \quad E\{x^2\} = (a+\theta)^2 + \theta^2$$

1. On suppose que a est connue et θ inconnue, déterminer $\hat{\theta}$ par la technique du maximum de vraisemblance
2. Est-il biaisé ?
3. Est-il consistant ?

On rappelle que:

- ✓ Pour un modèle AR,Si k=0, $R_{yy}(0) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$ - Si k$\neq$0, $R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$
- ✓ Pour un modèle MA : $R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$
- ✓ Equations de Wiener-Hopf $\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & \ldots\ldots & R_{yy}(N-1) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & \ldots\ldots & R_{yy}(N-2) \\ & & \ldots\ldots & \\ R_{yy}(N-1) & R_{yy}(N-2) & \ldots\ldots & R_{yy}(0) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xy}(0) \\ R_{xy}(1) \\ . \\ R_{xy}(N-1) \end{bmatrix}$

Nom:………………………… Prénom:……………………….