Exercice 1: Soit $x(t) = 1 - t/T$ avec t $0 \leq t \leq T$
On utilise ce signal pour déterminer la distance d'un objet. Le signal reçu par le recepteur après réflexion sur l'objet est : $y(t) = \alpha\, x(t - T_D) + b(t)$ où α est une constante réelle positive et $b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance σ^2. On veut maximiser le rapport signal sur bruit

1. Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre $h(t)$ telle que $\int h(t)^2 dt = 1$ (prendre $T_0 = T$).
2. Donner le rapport signal sur bruit après filtrage.
3. Exprimer l'inter-corrélation temporelle $R_{yx}(t - T_0)$ en fonction de l'auto-corrélation de $x(t)$ et de l'inter-corrélation des signaux $b(t)$ et $x(t)$
4. Comment déterminer le temps T_D?
5. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le filtrage optimal pour un signal déterministe dont on ignore l'expression?

Exercice 2: Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est $y(n) = 0.5\,(x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3))$

1. Expliquer la notion de filtre formeur
2. Identifier ce modèle linéaire AR ou MA
3. Donner la moyenne, l'autocorrélation et la DSP de son entrée $x(n)$.
4. Calculer et tracer $R_{yy}(k)$ puis déterminer $S_{yy}(f)$

Exercice 3 : On considère un problème d'estimation de bruit b(n).
Le signal observé est $x(n) = s(n) + b(n) - b(n-1)$.
On suppose que le signal s(n) est centré avec $R_{ss}(n) = 0.8^n$ et qu'il est décorrélé du bruit dont l'autocorrélation est $R_{bb}(n) = 0.8\,\delta(n)$.

1. Déterminer les moyennes statistiques de $x(n)$ et $y(n)$ et tracer leur DSP sur un même graphe
2. Quand à-t-on recours au filtre de Wiener?
3. Donner les équations de Wiener-Hopf permettant d'estimer $b(n)$
4. Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{b}(n)$.
5. Exprimer $\hat{b}(n)$ et commenter

Exercice 4 : Dans une usine de fabrication de composants électroniques, on prélève au hasard des composants jusqu'à tomber sur un qui serait défaillant. Cette expérience suit une loi géométrique de paramètre p :

$$p(x/\theta) = p(1-p)^x \qquad \text{avec} \qquad \mu_x = \frac{(1-p)}{p} \qquad \sigma_x^2 = \frac{(1-p)}{p^2}$$

1. Déterminer $\hat{\theta}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta = (1-p)/p$
2. Montrer que le biais est nul et calculer la variance de cet estimateur
3. Cet estimateur est-il consistant ?
4. Dans quelle situation utilise-t-on l'estimateur linéaire à variance minimale?

Rappels

- ✓ Pour un modèle AR, si k=0, $R_{yy}(0) = \sigma^2 . 1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$ - Si k≠0, $R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$
- ✓ Pour un modèle MA : $R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k} . b_j$
- ✓ Equations de Wiener-Hopf

$$\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & \ldots\ldots & R_{yy}(N-1) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & \ldots\ldots & R_{yy}(N-2) \\ & & \ldots\ldots & \\ R_{yy}(N-1) & R_{yy}(N-2) & \ldots\ldots & R_{yy}(0) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xy}(0) \\ R_{xy}(1) \\ . \\ R_{xy}(N-1) \end{bmatrix}$$