Exercice 1: Soit $x(t) = t$ avec $0 \le t \le T$

On utilise ce signal pour déterminer la distance d'un objet. Sachant que le signal reçu y(t) par le recepteur est retardé de T' et bruité par un bruit blanc Gaussien de densité spectrale de puissance σ^2:

1. Tracer approximativement y(t).
2. Déterminer l'expression générale de la réponse impulsionnelle du filtre *h(t)* (dont l'énergie vaut 1) permettant de maximiser le rapport signal sur bruit.
3. Tracer h(t) en fonction de $T_0 = 2T$ et $k = \sigma^2$, puis z(t) la sortie du filtre (prendre T'=10).
4. Donner le rapport signal sur bruit après filtrage.
5. Pourquoi ce filtrage est dit, en général, optimal et, en particulier, adapté?

Exercice 2: Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est $y(n) = \alpha\, y(n-1) + x(n)$

1. Identifier l'ordre du modèle linéaire AR.
2. Déterminer la moyenne de y(n) et montrer que $R_{yy}(k) = \alpha^k R_{yy}(0)$, déduire une condition sur α.
3. Montrer que $R_{yy}(0) = R_{xx}(0)/(1-\alpha^2)$
4. Tracer $R_{yy}(k)$ (Prendre $R_{xx}(0) = \sigma^2 = 1$).
5. Citer 2 applications concrètes des modèles AR.

Exercice 3 : On considère un problème d'estimation d'un signal s(n) bruité..

Le signal observé est $x(n) = \alpha s(n) + b(n)$.

On suppose que s(n) et b(n) sont SSL et décorréles et que le bruit possède une DSP $S_{bb}(f) = 0.25$.

1. Rappeler les conditions d'applications du filtrage de Wiener
2. Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{s}(n)$. On supposera que $R_{ss}(k) = 2 * 0.5^{|k|}$
3. Exprimer H(z) puis $\hat{s}(n)$

Exercice 4 : Soit une variable aléatoire *x* suivant la probabilité de Rayleigh définie par $p(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ et soient (x_1, x_2, ...x_N) un échantillon i.i.d de cette loi

avec $\mu_x = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\qquad \sigma_x^2 = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$

1. Montrer que x est forcément supérieure ou égale à 0.
2. Montrer que $\widehat{\sigma^2}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2 vaut $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$
3. Montrer qu'il est non biaisé.
4. Dans quel cas considère-t-on l'estimation par MV et MAP équivalente?

Rappels

- ✓ Pour un modèle AR, si k=0, $R_{yy}(0) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$ - Si k≠0, $R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$
- ✓ Pour un modèle MA : $R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$
- ✓ Equations de Wiener-Hopf

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \ldots\ldots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \ldots\ldots & R_{xx}(N-2) \\ & & \ldots\ldots & \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \ldots\ldots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{yx}(0) \\ R_{yx}(1) \\ . \\ R_{yx}(N-1) \end{bmatrix}$$

$$SNR(T_0)_{\max} = \int \frac{|X(f)|^2}{S_b(f)} df$$

$$H(f)_{optimal} = k.X^*(f) e^{-2\pi j f T0} / S_b(f)$$

Nom:………………………… Prénom:……………………….

Exercice N° ......