Exercice 1: Expliquer le filtrage adapté

1. Que permet-il de faire?
2. Donner un exemple : Prendre un signal, le tracer puis tracer le signal bruité, le filtre adapté et la sortie après le filtrage adapté.
3. Quelles hypothèses fait-on sur le bruit?

Exercice 2: Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est y(n)= - α y(n-1) - β y(n-2) + x(n)

1. Identifier l'ordre du modèle linéaire AR.
2. Déterminer les paramètres du modèles, on suppose que $R_{yy}(k)=2*0.5^{|k|}$

Exercice 3 : On considère un problème d'estimation d'un signal θ bruité.
Le signal observé est $x(n)=\theta+b(n)$.
On suppose que θ suit une loi uniforme sur $[-\theta_0, \theta_0]$ et qu'elle est décorrélée du bruit *b(n)* qui possède une DSP qui vaut σ^2.

1. Que signifie θ et b(n)sont décorrélés ? quel est le lien avec l'indépendance?
2. Calculer la moyenne et la variance de *b(n)*. Est-il SSL?
3. Déterminer le filtre de Wiener d'ordre N permettant de retrouver le signal utile θ .
4. Exprimer H(z) puis θ.

Exercice 4 : Soit une variable aléatoire x suivant la probabilité de Rayleigh définie par $p(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ et soient $(x_1, x_2, ...x_N)$ un échantillon i.i.d de cette loi

avec $\mu_x=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\sigma_x^2=\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$

On considère l'estimateur suivant de σ^2 qui vaut $\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{2\pi N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2$

1. Etudier son biais.
2. Etudier sa variance.
3. Est-il consistant?

Rappels

- ✓ Pour un modèle AR, si k=0, $R_{yy}(0)=\sigma^2.1-\sum_{i=1}^{N}a_iR_{yy}(i)$ - Si k≠0, $R_{yy}(k)=-\sum_{i=1}^{N}a_iR_{yy}(k-i)$
- ✓ Pour un modèle MA : $R_{yy}(k)=\sigma^2\sum_{j=0}^{M-k}b_{j+k}.b_j$
- ✓ Equations de Wiener-Hopf

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \dots\dots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots\dots & R_{xx}(N-2) \\ & & \dots\dots & \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \dots\dots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{yx}(0) \\ R_{yx}(1) \\ . \\ R_{yx}(N-1) \end{bmatrix}$$

$$SNR(T_0)_{\max}=\int\frac{|X(f)|^2}{S_b(f)}df$$

$$H(f)_{optimal}=k.X^*(f)e^{-2\pi jfT0}/S_b(f)$$