4.5

Exercice 1 : Soit une variable aléatoire x suivant la probabilité $p(x;\theta) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta x^2}{2}}$ et soient $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_N)$ un échantillon i.i.d de cette loi.

1. Que signifie i.i.d ?
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ
3. Par identification avec une probabilité gaussienne, déterminer $E\{x\}$ et σ_x^2
4. Etudier le biais de l'estimateur trouvé.

1° Indépendantes et Identiquement Distribuées

0.5 + 0.5

2° $\prod_{i=1}^{N} p(x_i;\theta) = \frac{\theta^{N/2}}{2\pi^{N/2}} e^{-\frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$

$\Rightarrow \ln\left[\prod p(x_i;\theta)\right]$

$= N/2 \ln\theta + N/2 \ln(2\pi) - \frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$

$\Rightarrow \frac{d \ln\left[\prod p(x_i;\theta)\right]}{d\theta} = 0$

1.5

$\Rightarrow \frac{N}{2\theta} - \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{2} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$

3° $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu x)^2}{2\sigma_x^2}}$

$\Rightarrow \mu x = 0 \quad \sigma_x^2 = 1/\theta$

1

4° $E\{\hat{\theta}\} - \theta = b_{\hat{\theta}}$

$= E\left\{\frac{N}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}\right\} - \theta$

$= \frac{N}{E\{\sum x_i^2\}} - \theta$

$= \frac{N}{\sum E\{x_i^2\}} - \theta$

$= \frac{N}{\sum_{i=1}^{N}(\mu x^2 + \sigma_x^2)} - \theta = \frac{\cancel{N}}{\cancel{N}\sigma_x^2} - \theta$

$= \theta - \theta = 0$ 1.5

6

Exercice 2 : On considère un problème d'estimation de l'ecg d'un foetus à travers une observation composée de l'ecg de la mère m(n), du foetus f(n) et du bruit de mesure b(n) supposé blanc de variance 0.25.

Le signal observé est $x(n) = f(n) + 0.5m(n) + b(n)$.

On suppose que les ecg m(n) et f(n) sont SSL et décorréles entre eux et indépendants du bruit.

Les fonctions de corrélation statistiques de l'observation et de l'ecg de la mère sont données comme suit:

$R_{xx}(k) = 0.9^{|k|}$ et $R_{mm}(k) = 0.8^{|k|}$

1. Justifier l'emploi du filtre de Wiener dans ce cas.
2. Donner l'expression de l'autocorrélation statistique $R_{xx}(k)$ en fonction de celles des autres signaux
3. Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant d'estimer $\hat{f}(n)$ l'ecg du foetus.
4. Exprimer $\hat{f}(n)$ en fonction de x(n)

1° les deux ecg occupent la même plage de fréquences et sont SSL

0.5

2° $R_{xx}(k) = E\{x(n)\, x(n-k)\}$

$= E\{[f(n) + 0.5\, m(n) + b(n)] \times [f(n-k) + 0.5\, m(n-k) + b(n-k)]\}$

Sachant que :

- m(n) et f(n) décorrelés

$R_{mf}(k) = \mu_m \cdot \mu_f$

- $R_{mm}(\infty) = \mu_m^2 = 0$

1

alors $R_{mf}(k) = R_{fm}(k) = 0$

Sachant que m(n) et f(n) sont indépendants du bruit

$R_{mb}(k) = \mu_m \cdot \cancel{\mu_b}_0 = 0$ bruit blanc

$R_{fb}(k) = \mu_f \cdot \cancel{\mu_b}_0 = 0$

$\Rightarrow R_{xx}(k) = R_{ff}(k) + 0.25\, R_m(k) + R_b(k)$

1.0

3° $R_{fx}(k) = E\{f(n)\, x(n-k)\}$

$= E\{f(n) \cdot [f(n-k) + 0.5\, m(n-k) + b(\ldots$

$= R_{ff}(k)$

1

(2) $\Rightarrow R_f(k) = R_{xx}(k) - 0.25\, R_m(k) - R_{bb}$

0.5

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$ 0.5

$\Rightarrow b_0 = -0.688 \quad b_1 = 1.32$ 0.

4° $\hat{f}(n) = b_0\, x(n) + b_1\, x(n-1$

$= -0.688\, x(n) + 1.32\, x(n-$

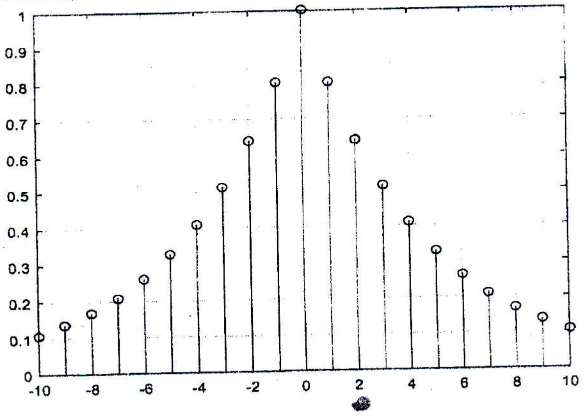
9

✓ Equations de Wiener-Hopf

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \ldots\ldots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \ldots\ldots & R_{xx}(N-2) \\ & & \ldots\ldots & \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \ldots\ldots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{yx}(0) \\ R_{yx}(1) \\ . \\ R_{yx}(N-1) \end{bmatrix}$$

Exercice 3: On veut modéliser le signal $y(n)$ SSL dont la corrélation statistique n'a été tracée que de -10 à 10. Elle est donnée à la figure ci-contre.

1. S'agit-il d'un modèle AR ou MA? Justifier
2. Donner les propriétés statistiques du signal d'entrée.
3. On suppose que le modèle est d'ordre 1, déterminer ses paramètres.
4. Expliquer la notion de filtre formeur et son utilité en téléphonie



1°- $R_x(\infty) \to 0 \Rightarrow AR$ 0.5

2° bb $\begin{cases} \mu_b = 0 \\ \sigma_b^2 = \sigma^2 \\ R_x(\tau) = \sigma^2 \delta(k) \\ S_x(f) = \sigma^2 \end{cases}$ 1

3°- $\begin{bmatrix} R_x(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 0.5

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0,8 \\ 0,8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 0.5

$\Rightarrow \begin{cases} 0.8 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -0,8 \\ 1 + 0.8\, a_1 = \sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 = 0,36 \end{cases}$ 0.5

4°- Modéliser un signal aléatoire SSL par h(n) déterministe 0.5
Gain temps et memoire par l'envoi des coefficients (a_i, σ_2)
~~que~~ au lieu du signal y(n)
0.5

✓ Pour un modèle AR, si k=0, $R_{yy}(0) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$ - Si k≠0, $R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$

✓ Pour un modèle MA : $R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k} . b_j$

5.5

Exercice 4: Soit le système LIT suivant : x(t) → [redacted] → y(t)

n(t)

A] On fournit à ce système en entrée $x_1(t)+x_2(t)$ deux signaux aléatoires décorrélés SSL.

1.Exprimer $E\{y(t)\}$

2. Exprimer $R_{x1x2}(\tau)$ puis $S_y(f)$

B] On considère que $x_1(t)= \Pi_2(t)$ et que $x_2(t)$ est un bruit blanc de variance 0.25. On veut maximiser le rapport signal sur bruit.

1. Exprimer et tracer h(t) causal.
2. Tracer le signal de sortie y(t)
3. Calculer le SNR après filtrage

A]

1° $\mu_y(t) = E\{y(t)\} = H(0) \cdot \mu_x$

$= H(0)(\mu_{x1} + \mu_{x2})$ 0.5

2° $R_{x1x2}(\tau) = E\{x_1(t)\, x_2^*(t-\tau)\}$

x_1 et x_2 decorreles $\Rightarrow R_{x1x2}(\tau)$

$= \mu_{x1} \cdot \mu_{x2}$ 0.5

$S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)$

0.5

$= |H(f)|^2 \cdot TF\{R_x(\tau)\}$

où $R_x(\tau) = E\{x(t)\, x^*(t-\tau)\}$

$= E\{[x_1(t) + x_2(t)][x_1^*(t-\tau) + x_2^*(t-\tau)]\}$

$= R_{x1}(\tau) + R_{x2}(\tau) + 2\mu_{x1}\mu_{x2}$

0.5

$\Rightarrow S_x(f) = S_{x1}(f) + S_{x2}(f) + 2\mu_{x}\mu_{x2}\,\delta(f)$ 0.5

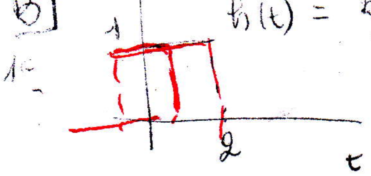
donc $S_y(f) = |H(f)|^2[S_{x1}(f) + S_{x2}(f) + 2\mu_{x1}\mu_{x2}\,\delta(f)]$

$= |H(f)|^2(S_{x1}(f) + S_{x2}(f)) + 2\mu_{x1}\mu_{x2}|H(0)|^2\delta(f)$

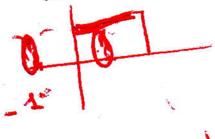
0.5

B]

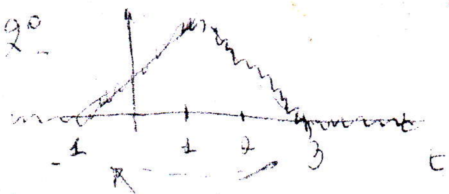
1° $h(t) = k/\sigma^2\, x^*(T_0 - t)$



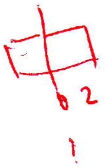
0.5



2°



0.5



0.5

$SNR_{T_0} = \frac{E_x}{\sigma_b^2} = \frac{\int_{-1}^{1} (\Pi_2(t))^2\, dt}{0.25} = \frac{2}{0.25}$

1

$$SNR(T_0)_{max} = \int \frac{|X(f)|^2}{S_b(f)} df$$

$$H(f)_{optimal} = k.X^*(f)e^{-2\pi jfT0} / S$$