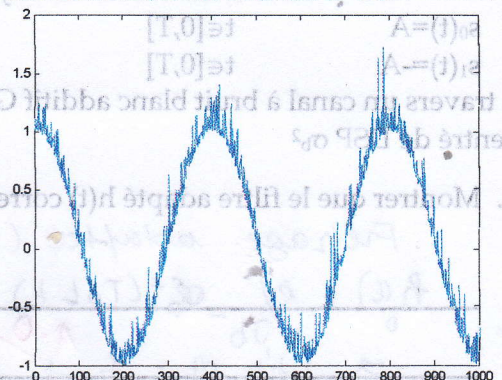
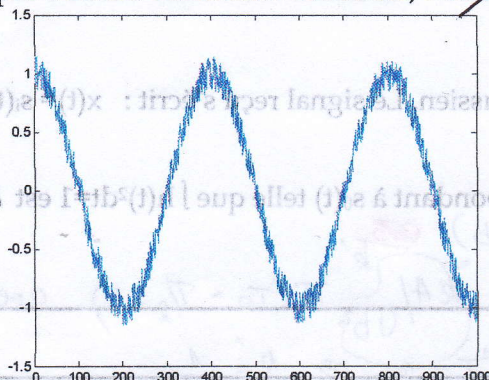
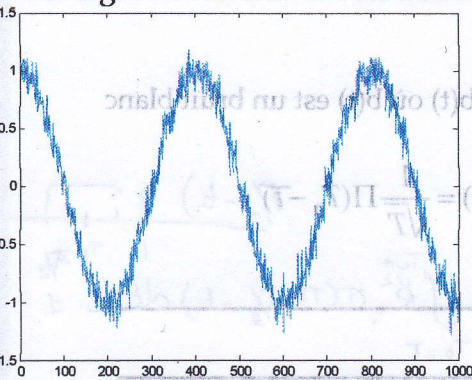


Exercice 1

4.5

Exponentiel

Les signaux suivants ont été affectés par 3 bruits différents: Gaussien, Poissonien et Uniforme. Identifier les.



..... Gaussien 0.5

..... Uniforme 0.5

..... Exponentiel 0.5

Exercice 2

Soit le signal aléatoire défini par : $x(t) = A_1 e^{j2\pi f_1 t} + A_2 e^{j2\pi f_2 t}$ où A_1 et A_2 sont deux v.a gaussiennes, décorrelées, centrées et de variance σ^2

1. Donner la ddp conjointe $p_{A_1, A_2}(A_1, A_2)$.

~~0.5~~ v.a. Gaussiennes et décorrelées sont indépendantes 0.5

$$p(A_1, A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(A_1^2 + A_2^2)}$$
 0.5

2. Déterminer la moyenne statistique du signal $x(t)$ ainsi que sa fonction d'autocorrélation et la DSP.

$$\mu_x(t) = E\{x(t)\} = E\{A_1\} e^{j2\pi f_1 t} + E\{A_2\} e^{j2\pi f_2 t} = 0$$
 0.5

$$R_x(t, \tau) = E\{x(t) x^*(t - \tau)\}$$

$$= E\{A_1 e^{j2\pi f_1 t} + A_2 e^{j2\pi f_2 t}\} (A_1^* e^{-j2\pi f_1 (t - \tau)} + A_2^* e^{-j2\pi f_2 (t - \tau)})$$

$$= E\{A_1^2\} e^{j2\pi f_1 \tau} + E\{A_2^2\} e^{j2\pi f_2 \tau} + E\{A_1 A_2^*\} e^{j2\pi (f_1 - f_2) \tau} + E\{A_1 A_2\} e^{j2\pi (f_2 - f_1) \tau}$$

$$= \sigma^2 (e^{j2\pi f_1 \tau} + e^{j2\pi f_2 \tau})$$
 1/ décorrelées = 0

$$DSP = TF\{R_x(\tau)\} = \sigma^2 \delta(f - f_1) + \sigma^2 \delta(f - f_2)$$
 0.5 = 0

3. Le processus $x(t)$ est-il SSL : $\mu_x = 0 = \text{cte}$ et $R_x(t, \tau) = f(\tau)$ $\Rightarrow$ SSL 0.5

4. Déterminer la ddp de $x(t)$.

$x(t)$ combinaison linéaire de v.a. Gaussiennes $\Rightarrow p(x(t))$ Gaussienne 0.5
 avec $\mu_x(t) = 0$ et $\sigma_x(t) = R_x(0) = 2\sigma^2 \Rightarrow p(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2\sigma^2} e^{-\frac{x(t)^2}{4\sigma^2}}$

Exercice 3

5

On considère la transmission de deux symboles :

$$s_0(t) = A \quad t \in [0, T]$$

$$s_1(t) = -A \quad t \in [0, T]$$

à travers un canal à bruit blanc additif Gaussien. Le signal reçu s'écrit : $x(t) = s_i(t) + b(t)$ où $b(t)$ est un bruit blanc centré de DSP σ_b^2

1. Montrer que le filtre adapté $h(t)$ correspondant à $s_0(t)$ telle que $\int h(t)^2 dt = 1$ est $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi(T_0 - T/2 - t)$
- Filtrage adapté (bb) $\Rightarrow h(t) = k \int_0^T s_0^*(T_0 - t) dt = kA \int_0^T \Pi(T_0 - T/2 - t) dt$ avec $\int_{T_0-T}^{T_0} \Pi(T_0 - T/2 - t) dt = 1$
- $\Rightarrow \int_{T_0-T}^{T_0} k^2 A^2 dt = 1 \Rightarrow k^2 T = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{T}}$

$$\Rightarrow h_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi(T_0 - T/2 - t)$$

2. Déterminer le filtre adapté correspondant à $s_1(t)$. $h_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi(T_0 - T/2 - t)$ 0.5
3. Donner le rapport signal sur bruit, dans chaque cas.

$$SNR = \frac{E_{s_0}}{\sigma_b^2} = \frac{1}{\sigma_b^2} = \frac{E_{s_1}}{\sigma_b^2} \quad 0.5$$

4. Soit $y_{si}(t)$, la sortie du filtre correspondant à $s_i(t)$, Montrer que pour $b(t)$ ($T_0 = T/2$) elle s'écrit : $y_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} b(\tau) d\tau$
- $y_b(t) = b(t) * h(t) = \int_{-T/2}^{T/2} b(t-\tau) \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi(T_0 - T/2 - \tau) d\tau$
- $= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} \Pi(T_0 - T/2 - \tau) b(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} b(\tau) d\tau$

4. Déterminer la moyenne de $y_b(t)$: $\mu_{y_b} = \mu_b \cdot H(0) = 0$ (bruit blanc) 0.5

Exercice 4

3.5

Soit un processus défini par : $y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + x(n)$ où $x(n)$ est un bb décorrélé de variance 1

1. Identifier le modèle : Récurrent $\Rightarrow$ AR 0.5 (SSL car $x(n)$ bb + SLIT) 1
2. Calculer $\mu_y(n)$, $y(n)$ est-il SSL? : $\mu_y(n) = \mu_x(n) \cdot H(z=1) = 0$ car $\mu_x(n) = 0$ 0.5
3. Montrer que pour $k > 0$, $R_{yy}(k) = -a_1 R_{yy}(k-1) - a_2 R_{yy}(k-2)$ et pour $k=0$, $R_{yy}(0) = 1 - a_1 R_{yy}(1) - a_2 R_{yy}(2)$

$$R_{yy}(k) = E\{y(n)y(n-k)\} = E\{-a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + x(n)\} y(n-k)$$

$$= -a_1 R_{yy}(k-1) - a_2 R_{yy}(k-2) + E\{x(n) \cdot \sum_{k'} x(n-k-k') b(k')\}$$

$$= -a_1 R_{yy}(k-1) - a_2 R_{yy}(k-2) + \sum_{k'} R_{xx}(k+k') b(k')$$

$\Rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} k=0 \quad R_{yy}(0) = 1 - a_1 R_{yy}(1) - a_2 R_{yy}(2) \\ k>0 \quad R_{yy}(k) = -a_1 R_{yy}(k-1) - a_2 R_{yy}(k-2) \end{array} \right\} = 0 \quad k \neq 0$ 0.5

$R_{yy}(k) = R_{yy}(-k)$ symétrique pour y réel 0.5

Rappels

$$H(f)_{\text{optimal}} = k X^*(f) e^{-2\pi j f T_0} / S_b(f) \quad SNR(T_0)_{\text{max}} = \int \frac{|X(f)|^2}{S_b(f)} df$$