

Exercice 1**4.5**Soient X et Y deux v.a. gaussiennes décorrélées dont la probabilité conjointe est :

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

1. X et Y , sont-elles indépendantes? x et y gaussiennes décorrélées $\Rightarrow$ indep **0.5**2. Déterminer les probabilités individuelles $p(x)$ et $p(y)$.2. Déterminer la probabilité conjointe $p(z,w)$ des v.a. $Z=X+Y$ et $W=X-Y$.4. Déterminer les probabilités $p(z)$ et $p(w)$. Z et W sont-elles indépendantes?**2°** x et y indépendantes $\Rightarrow p(x,y) = p(x) \cdot p(y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \\ p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/2\sigma^2} \end{cases} \quad \text{1 pt}$$

$$\text{3°} \quad \begin{cases} z = x + y \\ w = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + w) \\ y = \frac{1}{2}(z - w) \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/4 \Rightarrow |J| = 1/4$$

$$p(z,w) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\frac{1}{4}(z+w)^2 + \frac{1}{4}(z-w)^2 \right]} \\ = \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2 + w^2}{4\sigma^2}} \quad \text{1.5 pt}$$

4° z et w combinaison linéaire de Gaussiennes $\Rightarrow z$ et w Gaussiennes

$$E\{z\} = E\{x+y\} = 0 \quad E\{w\} = 0$$

$$- \sigma_z^2 = E\{z^2\} - \mu_z^2 = E\{x^2 + y^2 + 2xy\} = 2\sigma^2$$

$$- \sigma_w^2 = 2\sigma^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-z^2/4\sigma^2} \\ p(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-w^2/4\sigma^2} \end{cases} \quad \text{1 pt}$$

$$p(w) \cdot p(z) = p(z,w) \Rightarrow z \text{ et } w \text{ indep} \quad \text{0.5}$$

Exercice 2**4.5**Soit φ une v.a. supposée suivre une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ et soit $X(t)$ un processus aléatoire défini comme suit : $X(t) = \cos(\varphi) e^{2\pi j f_0 t} + \sin(\varphi) e^{-2\pi j f_0 t}$ 1. Etudier la stationnarité d'ordre 1 et 2 du processus $X(t)$.

2. Peut-on calculer sa DSP? si oui calculer la.

$$\text{1°} \quad \mu_X(t) = E\{X(t)\} = E\{\cos(\varphi) e^{2\pi j f_0 t} + \sin(\varphi) e^{-2\pi j f_0 t}\} \\ = E\{\cos(\varphi)\} e^{2\pi j f_0 t} + E\{\sin(\varphi)\} e^{-2\pi j f_0 t} \\ = 0 \quad \text{0.5}$$

$$\begin{aligned} * \sigma_X^2(t) &= E\{|X(t)|^2\} \\ &= E\{(\cos(\varphi) e^{2\pi j f_0 t} + \sin(\varphi) e^{-2\pi j f_0 t})^2\} \\ &= E\{\cos^2(\varphi) e^{4\pi j f_0 t} + \sin^2(\varphi) e^{-4\pi j f_0 t} + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi) e^{0}\} \\ &= E\{\cos^2(\varphi)\} + E\{\sin^2(\varphi)\} + 2E\{\cos(\varphi)\sin(\varphi)\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1 \quad \text{1 pt} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mu_X(t) = 0 \\ \sigma_X^2(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{stationnaire d'ordre 1} \quad \text{0.5}$$

$$\begin{aligned} * R_X(t, \tau) &= E\{X(t) X^*(t-\tau)\} \\ * R_X(t, \tau) &= E\{\cos(\varphi) e^{2\pi j f_0 t} + \sin(\varphi) e^{-2\pi j f_0 t} \times (\cos(\varphi) e^{-2\pi j f_0 (t-\tau)} + \sin(\varphi) e^{2\pi j f_0 (t-\tau)})\} \\ &= E\{\cos^2(\varphi) e^{2\pi j f_0 \tau} + \sin^2(\varphi) e^{-2\pi j f_0 \tau} + \cos(\varphi)\sin(\varphi) e^{2\pi j f_0 \tau} + \sin(\varphi)\cos(\varphi) e^{-2\pi j f_0 \tau}\} \\ &= \frac{1}{2} (e^{2\pi j f_0 \tau} + e^{-2\pi j f_0 \tau}) \\ &= \cos(2\pi f_0 \tau) = f_{ct}(\tau) \quad \text{4.5} \\ \Rightarrow \text{stationnaire d'ordre 2} \quad \text{0.5} \end{aligned}$$

2° $R_X(t, \tau) = f_{ct}(\tau) \Rightarrow$ oui

$$S_X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] \quad \text{0.5}$$

Exercice 3

2.5

Dans les fonctions d'auto-corrélation statistiques suivantes lesquelles peuvent être celles d'un processus aléatoire réel?

$R_{x1}(\tau) = \Lambda_2(\tau) - 2$	$R_{x2}(\tau) = -\Lambda_2(\tau) + 2$	$R_{x3}(\tau) = e^{-2 \tau }$	$R_{x4}(\tau) = e^{-2\tau}U(\tau)$	$R_{x5}(\tau) = \delta(\tau-1) + \delta(\tau+1)$
Rep non	non	Oui	non	non
Just $R_{x1}(0) = \int_{-2}^2 x^2 dx$ $R_{x1}(0) < 0$	$R_{x2}(0) \neq \max$		non symétrique	$R_{x5}(0) \neq \max$

Exercice 4

3.5

Soit le signal aléatoire $x(t)$ SSL dont la DSP est donnée par $S_x(f) = \sigma^2 B \Pi_B(f)$

- Déterminer l'autocorrélation statistique de $x(t)$
- En déduire la moyenne et la variance statistique de $x(t)$.
- Ce signal est transmis à travers un SLIT dont la fonction de transfert $H(f) = \Pi_A(f)$ avec $A < B$

a- Le signal de sortie est-il aléatoire? (Justifier) SSL? (Justifier)

b- Déterminer $S_y(f)$ et en déduire $R_y(\tau)$ puis les moments statistiques d'ordre 1 de $y(t)$.

1° $R_x(\tau) = \sigma^2 B^2 \text{sinc}(B\tau)$ 0.5

2° $\mu_x^2 = R_x(\tau) = 0$ $\sigma_x^2 = R_x(0) - \mu_x^2 = \sigma^2 B^2$ 0.5

3° a. $x * y(t) = \int x(t) h(t-\tau) d\tau \Rightarrow y(t)$ aléatoire 0.5

* $x(t)$ SSL + $h(t)$ SLIT $\Rightarrow y(t)$ SSL 0.5

b. $S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f) = \left| \Pi_A(f) \right|^2 \cdot \sigma^2 B \Pi_B(f)$
 $= \sigma^2 B \Pi_A(f) \cdot \Pi_B(f)$ $A < B$

- $R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ S_y(f) \}$
 $= \mathcal{F}^{-1} \{ \sigma^2 B \Pi_A(f) \} = \sigma^2 A \cdot B \text{sinc}(A\tau)$ 0.5

$\Rightarrow \mu_y = R_y(0) = 0$
 $\sigma_y^2 = R_y(0) - \mu_y^2 = \sigma^2 A \cdot B$

Rappels:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$TF \{ \delta(t-t_0) \} = e^{-2\pi j f t_0}$$

$$TF \{ A \Pi_\theta(t) \} = A \theta \text{sinc}(f\theta)$$

$$TF \{ A \Lambda_\theta(t) \} = A \theta \text{sinc}^2(f\theta)$$

$$TF \{ e^{-at} U(t) \} = \frac{a}{a + 2\pi j f}$$

$$TF \{ e^{-a|t|} \} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Exercice 1 5

On considère un signal déterministe $x(t)$ qui modélise une impulsion (par exemple radar/sonar). Cette impulsion est réfléchiée sur une cible et on suppose que le signal reçu en retour (par exemple sur l'antenne de réception) s'écrit :

$$y(t) = x(t - \tau) + b(t) \text{ où } \tau \geq 0 \text{ représente un retard et } b(t) \text{ est un bruit blanc centré de variance } \sigma^2.$$

On applique à $y(t)$ un filtre dont la réponse impulsionnelle est notée $h(t)$.

1- Rappeler comment s'exprime l'énergie E_x du signal $x(t)$?

2- Si $y'(t)$ est la sortie du filtre $h(t)$ lorsque $y(t)$ est en entrée, justifier que l'on peut écrire $y'(t) = x'(t - \tau) + b'(t)$ où $x'(t)$ et $b'(t)$ sont les sorties du même filtre $h(t)$ avec respectivement $x(t)$ et $b(t)$ en entrée.

3- Exprimer $x'(t)$ en fonction de $H(f)$ et $X(f)$ et en déduire $x'(0) = \int H(f) X(f) df$.

4- Déterminer $S_{b'}(f)$ la densité spectrale de puissance de $b'(t)$.

5- En déduire la puissance de $b'(t)$. Déterminer $E\{|b'(t)|^2\}$.

On désire maximiser le critère le SNR en sortie du filtre à l'instant τ par un filtrage adapté.

6- Donner (sans démonstration) l'expression de $h(t)$, $H(f)$ et du SNR.

7- Que représente τ ?

8- Tracer $y(t)$ et $y'(t)$ pour $x(t) = \Pi_2(t - 1)$

$$1^\circ - E_x = \int |x(t)|^2 dt = \int |x(f)|^2 df \quad \text{0.25}$$

$$2^\circ - \text{SLIT} \quad \text{0.5} \quad x'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) X(f) e^{2\pi j f t} df \quad \text{0.5}$$

$$3^\circ - X'(f) = H(f) \cdot X(f) \Rightarrow x'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) X(f) e^{2\pi j f t} df \quad \text{0.25}$$

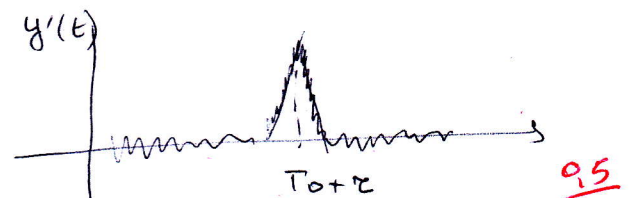
$$\Rightarrow x'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) X(f) df \quad \text{0.25}$$

$$4^\circ - S_{b'}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_b(f) = \sigma^2 \cdot |H(f)|^2 \quad \text{0.5}$$

$$5^\circ - P_{b'} = R_{b'}(0) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \quad \text{0.25} \quad E\{|b'(t)|^2\} = R_{b'}(0) - \frac{1}{T_0} = R_{b'}(0) \quad \text{0.25}$$

$$6^\circ - h(t) = k/\sigma^2 x^*(T_0 - t) \quad H(f) = k/\sigma^2 X^*(f) e^{-2\pi j f T_0} \quad \text{0.5}$$

$$\text{SNR} = E_x / \sigma^2 \quad \text{0.5}$$



Exercice 2

Les signaux $x(n)$ et $y(n)$ ont été obtenus en filtrant, au moyen d'un filtre à réponse impulsionnelle finie, un bruit blanc $b(n)$ gaussien centré de variance σ^2 .

$$x(n) = 2.b(n) + 0.5.b(n-1) - 0.2.b(n-2) + 0.1.b(n-3)$$

$$y(n) = b(n) - b(n-2)$$

1. Identifier les 2 modèles (justifier)

2. Pour chacun, calculer et tracer les coefficients d'autocorrélation

3. $x(n)$ et $y(n)$ sont-ils Gaussiens (justifier)

4. Calculer les intercorrélations $R_{xy}(k)$, et $R_{yx}(k)$ et commenter

1°/ MA valeurs des

$$2°/ R_x(k) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{L-1-k} b_i b_{i+k}$$

$$R_x(0) = 2^2 + 0.5^2 + 0.2^2 + 0.1^2 = 4.30 \sigma^2$$

$$R_x(1) = 2 \times 0.5 + 0.2 \times 0.5 - 0.2 \times 2 = 0.88 \sigma^2$$

$$R_x(2) = -0.4 + 0.05 = -0.35 \sigma^2$$

$$R_x(3) = 0.2 \sigma^2$$

$$R_x(k \geq 4) = 0$$

$$1 \ 0 \ -1$$

$$R_y(0) = 2 \sigma^2$$

$$R_y(1) = 0 \sigma^2$$

$$R_y(2) = -\sigma^2$$

$$R_y(k \geq 3) = 0$$

Placé

0.5

0.5

0.5

3° Combinaison linéaire de Gaussiennes $\Rightarrow$ Gaussienne 0.5

$$4°/ E\{x(n)y(n-k)\} = E\{[2b(n) + 0.5b(n-1) - 0.2b(n-2) + 0.1b(n-3)] \cdot [b(n-k) - b(n-k-2)]\}$$

$$= 2R_b(k) + 0.5R_b(k-1) - 0.2R_b(k-2) + 0.1R_b(k-3) - 0.5R_b(k+1) - 2R_b(k+2) + 0.2R_b(k+3) - 0.1R_b(k+4)$$

$$R_{xy}(k) = 2.2R_b(k) + 0.4R_b(k-1) - 0.2R_b(k-2) - 2R_b(k+2) - 0.5R_b(k+1) + 0.1R_b(k+3)$$

$$R_{yx}(k) = E\{y(n)x(n-k)\}$$

$$= E\{[b(n) - b(n-2)][2b(n-k) + 0.5b(n-k-1) - 0.2b(n-k-2) + 0.1b(n-k-3)]\}$$

$$= 0.2R_b(k+2) + 2R_b(k) + 0.5R_b(k+1) + 0.1R_b(k+3) - 2R_b(k-2) - 0.5R_b(k-1) + 0.2R_b(k) - 0.1R_b(k+1)$$

$$= 2.2R_b(k) + 0.4R_b(k+1) - 0.5R_b(k-1) - 2R_b(k-2) - 0.2R_b(k+2) + 0.1R_b(k+3)$$

$$R_{xy}(k) = 2.2\sigma^2\delta(k) + 0.4\sigma^2\delta(k-1) - 0.2\sigma^2\delta(k-2) - 2\sigma^2\delta(k+2) - 0.5\sigma^2\delta(k+1) + 0.1\sigma^2\delta(k+3)$$

$$R_{yx}(k) = R_{xy}(-k)$$

$$R_{xy}(-2) = -2\sigma^2, R_{xy}(-1) = -0.5\sigma^2, R_{xy}(0) = 2.2\sigma^2, R_{xy}(1) = 0.4\sigma^2$$

$$R_{xy}(1) = 0.4\sigma^2, R_{xy}(2) = -0.2\sigma^2, R_{xy}(3) = 0.1\sigma^2$$

5°/ Applications : Modélisation, prédiction, estimation spectrale 0.5

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale $B(16; p)$, où p est un paramètre inconnu. On se propose d'estimer p à l'aide d'un échantillon de taille n de $X : (x_1; \dots; x_N)$. On se propose d'étudier les estimateurs suivants :

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{16N} \sum_{i=1}^N X_i \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{16} \left(X_1 + \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N X_i \right)$$

1° Lesquels sont sans biais, consistants.

2° Lequel doit-on employer de préférence?

On rappelle que pour une loi Binomiale $B(n; p)$ de paramètre n et p , moyenne et variance sont les suivants

$$m = np \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

On a $m = 16p \quad \sigma^2 = 16p(1-p)$

A) $b_{\hat{p}_1} = E\left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right\} - p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 16p - p = 15p \neq 0$ non consistant

$$\sigma_{\hat{p}_1}^2 = E\left\{ \left(\hat{p}_1 - E\{\hat{p}_1\} \right)^2 \right\} = E\left\{ \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \frac{1}{N} \cdot 16p \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{N^2} E\left\{ \sum_{i=1}^N (x_i - 16p)^2 \right\} \quad \text{Sachant que } \begin{cases} x_i \text{ indépendants} \\ E\{x_i - 16p\} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{p}_1}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E\{(x_i - 16p)^2\} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2 = \frac{16p(1-p)}{N}$$

B) $b_{\hat{p}_2} = E\left\{ \frac{1}{16N} \sum_{i=1}^N x_i \right\} - p = \frac{1}{16N} \cdot N \cdot 16p - p = 0$

$$\sigma_{\hat{p}_2}^2 = E\left\{ \left(\frac{1}{16N} \sum_{i=1}^N x_i - \frac{1}{16N} \sum_{i=1}^N 16p \right)^2 \right\} = \frac{1}{16^2 \cdot N^2} E\left\{ \left[\sum_{i=1}^N (x_i - 16p) \right]^2 \right\}$$

Sachant que $\sigma^2 = 16p(1-p)$

$$\sigma_{\hat{p}_2}^2 = \frac{1}{16^2 \cdot N^2} \cdot \sum_{i=1}^N E\{(x_i - 16p)^2\} = \frac{1}{16N} \cdot p(1-p) \quad \text{consistant}$$

+ $b_{\hat{p}_2} = 0$

C) $b_{\hat{p}_3} = E\left\{ \frac{1}{16} \left[x_1 + \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N x_i \right] \right\} - p$

$$= \frac{1}{16} \left[16p + \frac{1}{N-1} \cdot (N-1) \cdot 16p \right] - p = 2p - p = p \neq 0 \quad \text{non consistant}$$

$$\sigma_{\hat{p}_3}^2 = E\left\{ \left(\hat{p}_3 - E\{\hat{p}_3\} \right)^2 \right\} = E\left\{ \left(\frac{1}{16} \left(x_1 + \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N x_i \right) - \frac{1}{16} (16p + \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N 16p) \right)^2 \right\}$$

$$= E\left\{ \left(\frac{1}{16} (x_1 - 16p) + \frac{1}{16(N-1)} \sum_{i=2}^N (x_i - 16p) \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{16^2} E\{(x_1 - 16p)^2\} + \frac{1}{(N-1)^2} E\left\{ \left[\sum_{i=2}^N (x_i - 16p) \right]^2 \right\} + 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(N-1)} \cdot \frac{1}{16} \cdot \sum_{i=2}^N E\{(x_i - 16p)(x_1 - 16p)\}$$

Sachant que...

$$= \frac{1}{16^2} \left[\sigma^2 + \frac{1}{(N-1)^2} \cdot (N-1) \cdot \sigma^2 \right] + 0 \quad (\text{indépendants})$$

$$= \frac{1}{16^2} \left[\sigma^2 + \frac{1}{(N-1)} \cdot \sigma^2 \right] = \frac{1}{16^2} \left[\sigma^2 N \cdot \frac{N-1}{(N-1)} + \sigma^2 \right]$$

$$= p(1-p) \cdot N / 16N$$