Exercice 1 8

Soient X et Y deux v.a. telles que $p(x,y)=e^{-(x+y)}$ pour x>0 et y>0.

1. Déterminer les probabilités individuelles p(x) et p(y).
2. En déduire les moyennes et variances des v.a. X et Y.
3. Soient les Z et W des v.a. telles que Z=X+Y et W=X/Y. Montrer que la probabilité conjointe p(z,w) vaut $e^{-z}\frac{z}{(1+w)^2}$
4. Z et W sont-elles indépendantes? Sont-elles décorrélées?
5. On suppose que V=-2X+1. Calculer la moyenne et la variance de la v.a. V puis calculer Cxv.
6. X et V sont-elles indépendantes? Justifier

1°. $p(x) = \int p(x,y)\, dy$

$= \int_0^{+\infty} e^{-x}.e^{-y}\, dy$

$= e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy$ 0.5

$= e^{-x}\, .-\left[e^{-y}\right]_0^{+\infty} = e^{-x}$

de même $p(y) = e^{-y}$

2°. p(x) et p(y) lois exponentielle de paramètre 1. $\Rightarrow \mu_x = \mu_y = 1$ et $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$ 1

3°. $\begin{cases} z = x+y & (1) \\ w = x/y \Rightarrow x = wy & (2) \end{cases}$

(1) → (2) $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{w.z}{1+w} \\ y = \frac{z}{1+w} \end{cases}$

$p(z,w) = |J|\, p(x,y) \Big|_{x = wz/1+w,\ y = \frac{z}{1+w}}$

$|J| = Det\begin{vmatrix} \frac{dx}{dw} & \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dw} & \frac{dx}{dz} \end{vmatrix} = Det\begin{vmatrix} \frac{z}{(1+w)^2} & \frac{w}{1+w} \\ -\frac{z}{(1+w)^2} & \frac{1}{1+w} \end{vmatrix}$

$= \frac{z + wz}{(1+w)^3} = \frac{z}{(1+w)^2}$ 1.5

d'où $p(z,w) = \frac{z}{(1+w)^2} e^{-z}$

4°. $p(z) = \int_0^{+\infty} \frac{z}{(1+w)^2} e^{-z}\, dw$

$= z e^{-z}\left[-\frac{1}{1+w}\right]_0^{+\infty} = z e^{-z}$

$p(w) = \int_0^{+\infty} \frac{z}{(1+w)^2} e^{-z}\, dz$ 1

$= \frac{1}{(1+w)^2}\int_0^{+\infty} z e^{-z}\, dz = \frac{1}{(1+w)^2}$

moy loi exponentielle $\lambda = 1$

puisque $p(z).p(w) = p(z,w)$ alors z et w sont indépendantes $\Rightarrow$ decorrelées 1

5°. $V = -2X + 1$

* $\mu_v = E\{V\} = E\{-2X+1\}$
$= -2\mu_x + 1 = -1$ 0.5

* $\sigma_v^2 = E\{V^2\} - \mu_v^2$
$= E\{4X^2 - 4X + 1\} - 1$
$= 4(\mu_x^2 + \sigma_x^2) - 4\mu_x + 1 - 1$ 0.5
$= 4$

* $C_{xv} = E\{XV\} - \mu_x.\mu_v$
$= E\{-2X^2 + X\} + 1$
$= -2(\mu_x^2 + \sigma_x^2) + \mu_x + 1$
$= -2 \Rightarrow \rho_{xy} = -1$ 1

6°. non puisque V fct de X

9.5

Exercice 2 3.5

Soit X(t) et Y(t) deux processus aléatoires SSL et décorrélés tels que :

$R_X(\tau)=4e^{-|\tau|}+9$ et $R_Y(\tau)=\Lambda_2(\tau)+4$

1. Montrer Z(t)=X(t)-Y(t) est SSL. En déduire la puissance de Z(t)
2. Peut-on calculer sa DSP? si oui calculer la.

1° $Z(t) = X(t) - Y(t)$

$\mu_Z\{t\} = E\{Z(t)\} = E\{X(t) - Y(t)\}$

$= \mu_X(t) + \mu_Y(t)$

$R_X(0) = \mu_X^2 + \sigma^2 = 13$

$R_X(\infty) = \mu_X^2 = 9$ $\Rightarrow \begin{cases} \mu_X = 3 \\ \sigma_X^2 = 4 \end{cases}$ 0.5

de même

$R_Y(0) = \mu_Y^2 + \sigma_Y^2 = 5$

$R_Y(\infty) = \mu_Y^2 = 4$ $\Rightarrow \begin{cases} \mu_Y = 2 \\ \sigma_Y^2 = 1 \end{cases}$

0.5

d'où $\mu_Z(t) = 3 + 2 = 5$

$R_Z(t,\tau) = E\{Z(t)\, Z^*(t-\tau)\}$

$= E\{[X(t) - Y(t)][X^*(t-\tau) - Y^*(t-\tau)]\}$

$= R_X(\tau) + R_Y(\tau) - 2\mu_X\mu_Y$

$= 4e^{-|\tau|} + 13 + \Lambda_2(\tau) - 12$

$= f_{ct}(\tau)$ 1

Ainsi $\begin{cases} \mu_Z = 5 = cst \\ R_Z(t,\tau) = f_{ct}(\tau) \end{cases} \Rightarrow Z(t)$ SSL

0.5

$P = R_Z(0) = 4 + 13 + 1 - 12 = 6$

0.5

2°/ Z(t) SSL $\Rightarrow$ DSP existe

$S_Z(f) = TF\{R_Z(\tau)\}$

$= 4\, TF\{e^{-|\tau|}\} + TF\{\Lambda_2(\tau)\} + 1$

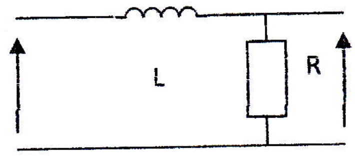
$= \dfrac{8}{1+4\pi^2 f^2} + 2\,\mathrm{sinc}^2(2f) + \delta(f)$

0.5

Exercice 3 3.5

L'entrée x(t) du circuit donnée ci-dessous est signal aléatoire de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \sigma_x^2\delta(\tau)$

1. Déterminer la densité spectrale de la sortie y(t), notée $S_y(f)$
2. Déterminer la fonction d'autocorrélation de la sortie y(t), notée $R_y(\tau)$ ainsi que sa puissance.
3. On suppose maintenant que le signal d'entrée x(t) est une sinusoïde auquel s'est rajouté un bruit blanc. Tracer x(t) puis y(t) dans ce cas.



1°/ $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$

avec $S_x(f) = TF\{R_x(\tau)\} = \sigma_x^2$ 0.5

et $H(f) = H(\omega)\big|_{\omega = 2\pi f} = \dfrac{R}{R + jL\omega}$

$= \dfrac{R}{R + 2\pi j f L} = \dfrac{R/L}{R/L + 2\pi j f}$

$\Rightarrow |H(f)|^2 = \dfrac{R^2/L^2}{\frac{R^2}{L^2} + 4\pi^2 f^2}$ d'où 0.5

$S_y(f) = \dfrac{\sigma^2 R^2/L^2}{R^2/L^2 + 4\pi^2 f^2}$ 0.5

2°/ Sachant que

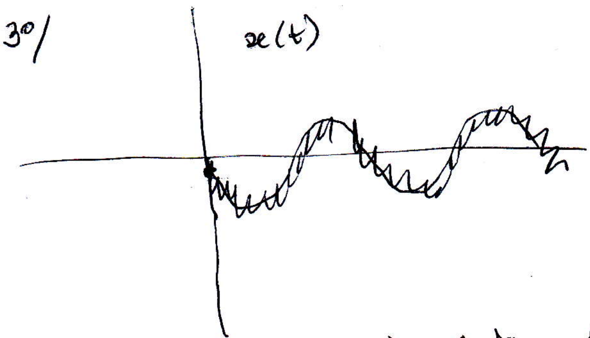
$TF\{e^{-a|t|}\} = \dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$

$\Rightarrow R_y(\tau) = TF^{-1}\{S_y(f)\}$

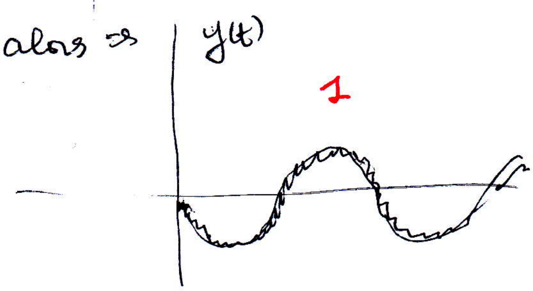
$= \dfrac{\sigma^2 R}{2L} e^{-R/L|\tau|}$ 0.5

$P = R_y(0) = \dfrac{\sigma^2 R}{2L}$ 0.5

3°/



Sachant que H(f) filtre passe bas alors ⇒



1

Rappels:

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

$\sin a\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$

$TF\{\delta(t - t_0)\} = e^{-2\pi j f t_0}$

$TF\{A\prod_\theta(t)\} = A\theta\,\mathrm{sinc}(f\theta)$

$TF\{A\Lambda_\theta(t)\} = A\theta\,\mathrm{sinc}^2(f\theta)$

$TF\{e^{-at}U(t)\} = \dfrac{a}{a + 2\pi j f}$

$TF\{e^{-a|t|}\} = \dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$

$y = \arcsin x$ $\quad y' = 1/\sqrt{1-x^2}$

$y = \arccos x$ $\quad y' = -1/\sqrt{1-x^2}$

$y = \mathrm{arc\,tg}\, x$ $\quad y' = 1/(1+x^2)$

$y = \mathrm{arc\,cot}\, x$ $\quad y' = -1/(1+x^2)$