3.5

Exercice 1

On considère un signal aléatoire stationnaire x(n) et l'on suppose connu ses coefficients d'autocorrélation :

$R_{xx}(0) = 3\sigma^2$, $R_{xx}(1) = 2\sigma^2$, $R_{xx}(2) = \sigma^2$, $R_{xx}(k\geq3) = 0$

Si le signal x(n) a été obtenu par filtrage d'un bruit blanc gaussien de variance σ^2 par un filtre à réponse impulsionnelle finie de fonction de transfert $H(z) = 1 + a.z^{-1} + b.z^{-2}$, en déduire les valeurs de a et b.

Modèle MA $R_{xx}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{n-k} b_j . b_{j+k}$ 0.5

1

$\Rightarrow \begin{cases} R_{xx}(0) = (1 + a^2 + b^2).\sigma^2 = 3\sigma^2 \\ R_{xx}(1) = \sigma^2(1\times a + a\times b) = 2\sigma^2 \\ R_{xx}(2) = \sigma^2(1\times b) = \sigma^2 \end{cases} \Rightarrow$ $b = 1$, $a = 1$ 1

1

Exercice 2 4

La durée T séparant deux arrivées successives de requêtes à un serveur suit une loi exponentielle de paramètre θ et de densité de probabilité : $p(t/\theta) = \theta e^{-\theta t}$ avec t>0. On suppose que le paramètre θ est stochastique et suit une loi exponentielle de paramètre λ connu, de densité $p(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}$.

- Montrer que $p(t/\theta).\ p(\theta)$ est proportionnelle à $\theta e^{-\theta(t+\lambda)}$
- On observe un échantillon de n durée $t_1,\ldots, t_N$.

Déterminer à partir des observations ti les estimateurs du maximum a posteriori de θ.

- $p(t/\theta).\ p(\theta) = \theta e^{-\theta t} . \lambda e^{-\lambda\theta} = \theta\lambda\, e^{-(t+\lambda)\theta} = \lambda.\ \underline{\theta e^{-\theta(t+\lambda)}}$ 1
- $\prod (p(t_i/\theta)) = \theta^N e^{-\theta.\sum_{i=1}^{N} t_i}$ 0.5

$\ln\left[\prod (p(t_i/\theta))\right] + \ln(p(\theta)) = N \ln\theta - \theta\sum_{i=1}^{N} t_i + \ln\lambda - \lambda\theta$ 0,5

$\dfrac{d(\quad '' \quad)}{d\theta} = \dfrac{N}{\theta} - \sum_{i=1}^{N} t_i - \lambda = 0$ 0.5 0.5

$\Rightarrow \dfrac{N}{\theta} = \sum_{i=1}^{N} t_i + \lambda \Rightarrow \theta = \dfrac{N}{\sum t_i + \lambda}$ 1

Exercice 3

On considère un processus de la forme X(n)= S (n)−2.S(n-1)+ S(n-2)+ W(n) où :

- W(n) est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 tel que W(n) et W(j) sont indépendants si n≠j.
- On suppose que S(n) suit une loi N (0,1) indépendante de W(n) n∈Z et que de même, S(n) et S(j) sont indépendants si n ≠ j.

1. Donner l'équation de Wiener-Hopf permettant de calculer les coefficients du filtre de Wiener d'ordre 3 permettant d'estimer S(n-2) à partir de X(n), X(n-1) et X(n-2).
2. Vérifier que si σ = 0, la solution est : S(n-~~1~~)= -(X(n)+ 3X(n-1) + X(n-2))/5

1°- $R_{ww}(k) = \sigma^2 \delta(k)$

$R_{SS}(k) = \delta(k)$

$$\text{W.H} \Rightarrow \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & R_{xx}(2) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{Sx}(0) \\ R_{Sx}(-1) \\ R_{Sx}(-2) \end{bmatrix} \quad 1$$

$$R_{xx}(k) = E\{x(n)\,x(n-k)\} = E\{[S(n) - 2S(n-1) + S(n-2) + w(n)] \times [S(n-k) - 2S(n-1-k) + S(n-2-k) + w(n-k)]\}$$

$$= \cancel{R_{SS}(k)\,(5}$$

$$= 6\,R_{SS}(k) - 4\,[R_{SS}(k+1) + R_{SS}(k-1)] + R_{SS}(k-2) + R_{SS}(k+2) + R_{ww}(k) \quad 1.5$$

$$R_{Sx}(k) = E\{S(n)\,x(n-k)\} = E\{S(n)\cdot[S(n) - 2S(n-1) + S(n-2) + w(n)]\}$$

$$= R_{SS}(k) - 2\,R_{SS}(k+1) + R_{SS}(k+2) \quad 1.5$$

$$\text{W.H} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6+\sigma^2 & -4 & 1 \\ -4 & 6+\sigma^2 & -4 \\ 1 & -4 & 6+\sigma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 1.0$$

2°- $\sigma^2 = 0 \Rightarrow$ W.H $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 0.5$$

$(1)-(3) \Rightarrow 5b_0 - 5b_2 = 0 \Rightarrow b_0 = b_2$

On remplace dans (2) $-4b_0 + 6b_1 - 4b_0 = -2 \Rightarrow \begin{cases} 8b_0 + 6b_1 = -2 \\ 6b_1 = -2 + 8b_0 \\ 3b_1 = 4b_0 - 1 \\ b_1 = \dfrac{4b_0 - 1}{3} \end{cases}$

et dans (1) $6b_0 - 4b_1 + b_0 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7b_0 - 4b_1 = 1 \\ \dfrac{21b_0 - 16b_0 + 4}{3} = \dfrac{3}{3} \\ \Rightarrow b_0 = -1/5 = b_2 \end{cases} \quad 1.5$$

$\Rightarrow b_1 = \dfrac{-4/5 - 5/5}{3} = -3/5$

$$\frac{\hat{S}(z)}{X(z)} = H(z) = -1/5 - 3/5\,z^{-1} - 1/5\,z^{-2}$$

$$\Rightarrow \hat{S}(n) = -1/5\,x(n) - 3/5\,x(n-1) - 1/5\,x(n-2) \quad 0.5$$