

Exercice 1

4

Soit $x(t)$ donné à la figure ci-contre

On utilise ce signal pour déterminer la distance d'un objet.
Le signal reçu par le récepteur après réflexion sur l'objet est :
 $y(t) = \alpha x(t - T_{AR}) + b(t)$ où α est une constante réelle positive et $b(t)$ un bruit.

1. Tracer
- $y(t)$

On se place dans le cadre d'un filtrage optimal adapté

2. Donner la nature du bruit

Blanc

3. Donner l'expression de
- $h(t)$
- puis tracer la

$$h(t) = k/\sigma^2 (T_0 + t/T) = k/\sigma^2 x^*(T_0 - t)$$

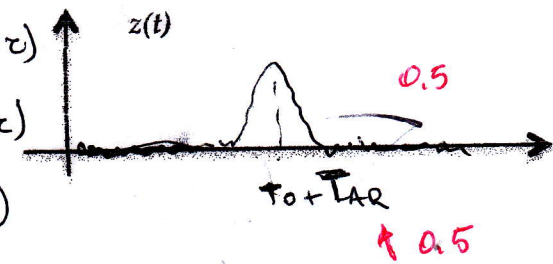
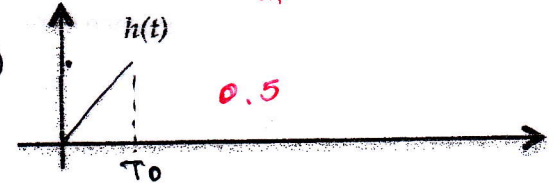
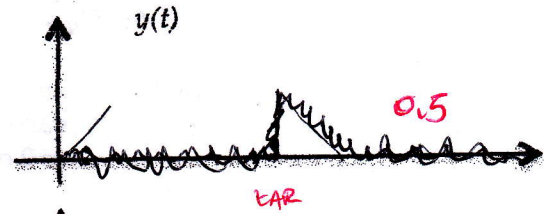
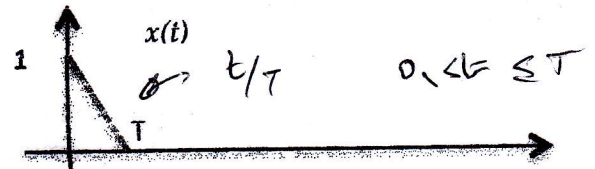
4. Tracer le signal $z(t)$ à la sortie du filtre $h(t)$
5. Montrer que $z(t)$ peut s'écrire sous forme d'une somme de corrélation et d'intercorrélation

$$z(t) = y(t) * h(t)$$

$$= \int y(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int y(\tau) \frac{k}{\sigma^2} x^*(T_0 - t + \tau) d\tau$$

$$= \int [\alpha x(\tau - T_{AR}) + b(\tau)] \frac{k}{\sigma^2} x^*(T_0 - t + \tau) d\tau$$

$$= \frac{\alpha k}{\sigma^2} R_x(t - T_0 + T_{AR}) + R_b(t - T_0)$$

**Exercice 2**

6.0

Soit l'équation aux récurrences suivante $y(n) = 0.5x(n) + 0.5x(n-2)$ où $x(n)$ est bruit blanc de variance 2

1. Identifier le modèle : MA
2. Donner l'ordre du modèle : 2
3. Déterminer $R_{xx}(k)$ et $S_{xx}(f)$:

$$R_{xx}(k) = \sigma^2 \delta(k) = 2 \delta(k)$$

$$S_{xx}(f) = 2$$

4. Déterminer et tracer
- $R_{yy}(k)$

$$R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^k b_j b_{j+k}$$

$$R_{yy}(0) = \sigma^2 (b_0^2 + b_1^2 + b_2^2) = 4$$

$$R_{yy}(1) = \sigma^2 (b_0 b_1 + b_1 b_2) = 0 = R_{yy}(-1)$$

$$R_{yy}(2) = \sigma^2 (b_0 b_2) = 0.5 = R_{yy}(-2)$$

$$R_{yy}(k) = 0 \text{ for } |k| > 2$$

5. Déterminer et tracer
- $R_{xy}(k)$
- et
- $R_{yx}(k)$
- et commenter

$$R_{xy}(k) = E\{x(n)y(n-k)\} = E\{x(n)[0.5x(n-k) + 0.5x(n-k-2)]\}$$

$$= 0.5 R_{xx}(k) + 0.5 R_{xx}(k+2) \Rightarrow R_{xy}(0) = 0.5 \sigma^2 = 1$$

$$R_{xy}(-2) = 0.5 \sigma^2 = 1$$

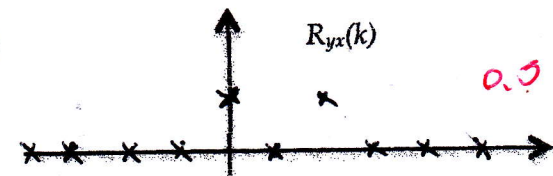
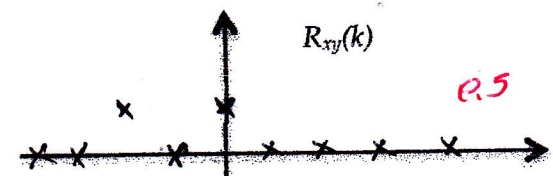
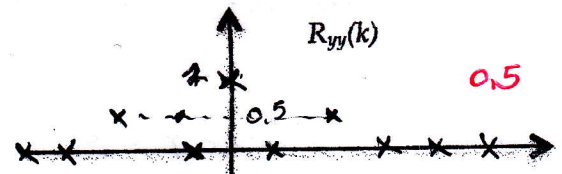
$$R_{yx}(k) = E\{y(n)x(n-k)\} = E\{[0.5x(n) + 0.5x(n-2)]x(n-k)\}$$

$$= 0.5 R_{xx}(k) + 0.5 R_{xx}(k-2) \Rightarrow R_{yx}(0) = 0.5 \sigma^2 = 1$$

$$R_{yx}(2) = 0.5 \sigma^2 = 1$$

$$R_{xy}(k) = R_{yx}(-k)$$

0.5



0.25

Exercice 3

6

Soient $(X_1, X_2, \dots, X_N)$, N variables aléatoires indépendantes suivant des lois de poisson de paramètre λ .
Soient les estimateurs suivants du paramètre λ suivant :

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} x_{2i}$$

On rappelle que pour une loi de poisson $\mu_x = \lambda$ et $\sigma_x^2 = \lambda$

1. Que signifient le biais et la variance pour un estimateur ?
2. Calculer biais et variance des 2 estimateurs.
3. Sont-ils consistants ?
4. Lequel est le plus efficace et pourquoi ?

1° biais: écart moyenne ^{d'estimation} par rapport à la vraie valeur 0.5

variance: écart moyenne par rapport à la moyenne des estimations 0.5

$$\begin{aligned} \text{d. } b_{\hat{\lambda}_1} &= E\{\hat{\lambda}_1 - \lambda\} = E\{\hat{\lambda}_1\} - \lambda \\ &= E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right\} - \lambda \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{x_i\} - \lambda = \frac{1}{N} \cdot N\lambda - \lambda \\ &= 0 \end{aligned} \quad 0.5$$

$$\begin{aligned} b_{\hat{\lambda}_2} &= E\{\hat{\lambda}_2 - \lambda\} = E\{\hat{\lambda}_2\} - \lambda \\ &= E\left\{\frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} x_{2i}\right\} - \lambda \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} E\{x_{2i}\} - \lambda \\ &= \frac{2}{N} \cdot \frac{N}{2} \cdot \lambda - \lambda = 0 \end{aligned} \quad 0.5$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{\lambda}_1}^2 &= E\{(\hat{\lambda}_1 - E\{\hat{\lambda}_1\})^2\} \\ &= E\left\{\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right\}\right]^2\right\} \\ &= \frac{1}{N^2} E\left\{\left[\sum_{i=1}^N [x_i - E\{x_i\}]\right]^2\right\} \quad 1 \end{aligned}$$

Sachant que les x_i sont indépendantes et que $E\{x_i - E\{x_i\}\} = 0$ alors

$$\sigma_{\hat{\lambda}_1}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E\{[x_i - E\{x_i\}]^2\} \quad \sigma_{x_i}^2 = \sigma_x^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{\lambda}_1}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{N} = \frac{\lambda}{N}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{\lambda}_2}^2 &= E\{(\hat{\lambda}_2 - E\{\hat{\lambda}_2\})^2\} \\ &= E\left\{\left[\frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} x_{2i} - E\left\{\frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N/2} x_{2i}\right\}\right]^2\right\} \\ &= \frac{4}{N^2} E\left\{\left[\sum_{i=1}^{N/2} (x_{2i} - E\{x_{2i}\})\right]^2\right\} \end{aligned}$$

Sachant que ...

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma_{\hat{\lambda}_2}^2 &= \frac{4}{N^2} \sum_{i=1}^{N/2} E\{[x_{2i} - E\{x_{2i}\}]^2\} \\ & \quad \sigma_{x_{2i}}^2 = \sigma_x^2 \\ &= \frac{4}{N^2} \cdot \frac{N}{2} \sigma_x^2 = \frac{2\lambda}{N} \quad 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ \text{ ou } b_{\hat{\lambda}_1} = b_{\hat{\lambda}_2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\hat{\lambda}_1}^2 \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \\ \sigma_{\hat{\lambda}_2}^2 \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \end{array} \right. \\ \Rightarrow \text{consistants} \quad 0.5 \end{aligned}$$

4° - le premier puisque $\sigma_{\hat{\lambda}_1}^2 < \sigma_{\hat{\lambda}_2}^2$

0.5