Signaux Aléatoires et Processus Stochastiques

(Support de cours)

Master 1 : Systèmes de Télécommunications

Faculté d'Electronique et d'Informatique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Site perso : http://perso.usthb.dz/~akourgli/

e-mails: akourgli@usthb.dz , assiakourgli@gmail.com

Programme

Chapitre 1. Notions de corrélation et de convolution (2 Semaines)

1. Rappels sur les systèmes linéaires et invariants dans le temps
2. Stabilité et causalité
3. Energie et Puissance
4. Notion de corrélation
5. Applications fondamentales des méthodes de corrélation
6. Filtre RII et RIF

Série d'exercices n°1

TP n°1 : Convolution et Corrélation

Chapitre 2. Notions de variables aléatoires (2,5 Semaines)

1. Variables aléatoires et probabilités

- Probabilité individuelle et probabilité conjointe

- Notion d'indépendance

2.Moments statistiques

3.Lois de probabilité usuelles (discrètes et continues)

4.Vecteurs aléatoires

- Lois de distribution marginales

- Changements de variables

- Covariance et coefficient de corrélation

- Cas du vecteur aléatoire Gaussien

Série d'exercices n°2

TP n°2 : Variables et Vecteurs aléatoires

Chapitre 3. Processus stochastiques et Signaux Aléatoires (2,5 Semaines)

1. Espérances ou Moments d'une fonction aléatoire

- Statistiques d'ordre 1 (moyenne, variance, etc.)

- Statistiques d'ordre 2 (corrélation et covariance)

3. Processus stationnaires

- Stationnarité au sens large et au sens strict
- Propriétés de la fonction de corrélation
- Puissance et DSP
- Bruit Blanc

4. Processus ergodiques

5. Exemples de processus stochastiques (Processus de Poisson, Gaussien et Markovien)

6. Statistiques d'ordre supérieur (Moments et cumulants, Polyspectres, processus non gaussiens,etc.)

Série d'exercices n°3

TP n°3: Processus aléatoires (Stationnarité et Ergodisme)

Chapitre 4 : Filtrage linéaire des signaux aléatoires (3 Semaines)

1.Processus aléatoires et SLIT

- Moyenne et autocorrélation
- Densité spectrale
- Formule des interférences
- Notion de filtre formeur

2. Filtrage adapté et Filtrage optimal

3. Modèles AR, MA, ARMA

Série d'exercices n°4

TP n°4 : Filtrage des signaux aléatoires

Chapitre 5 : **Estimation statistique et Estimation Spectrale**

- Propriétés des estimateurs (biais, variance, efficacité, etc.)
- Estimation des moments statistiques
- Estimation spectrale (périodogramme, corrélogramme)
- Filtrage de Wiener

Série d'exercices n°5

TP n°5 : Estimation et Filtrage de Wiener

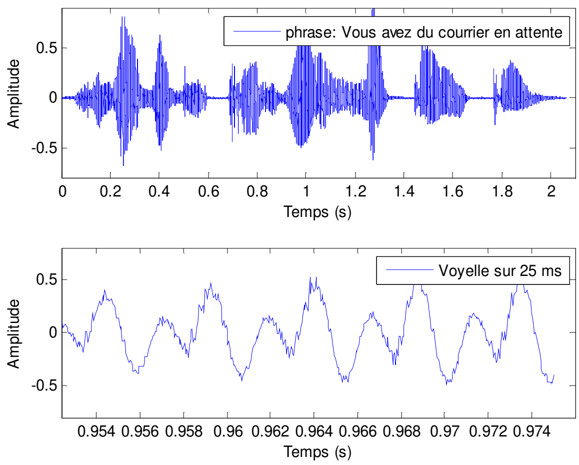
Chapitre 1. Notions de corrélation et convolution

Introduction

Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Il sert de vecteur à une information. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Les signaux sont des grandeurs électriques variant en fonction du temps $x(t)$ obtenues à l'aide de capteurs. Sur le plan analytique : Un signal sera une fonction d'une variable réelle, en général le temps.

<u>Exemples :</u>

- Onde acoustique : délivré par un micro (parole, musique, …)
- Signaux biologiques : EEG, ECG
- Tension aux bornes composant électronique
- Signaux géophysiques : vibrations sismiques
- Finances : cours du pétrole
- Images, Vidéos



<u>Remarque</u>: Tout signal physique comporte une *composante* aléatoire (perturbation externe, bruit, erreur de mesure, etc …). **Le bruit** est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.). La différentiation entre le signal et le bruit est artificielle et dépend de l'intérêt de l'utilisateur : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur des télécommunications par satellites et un signal utile pour les radioastronomes.

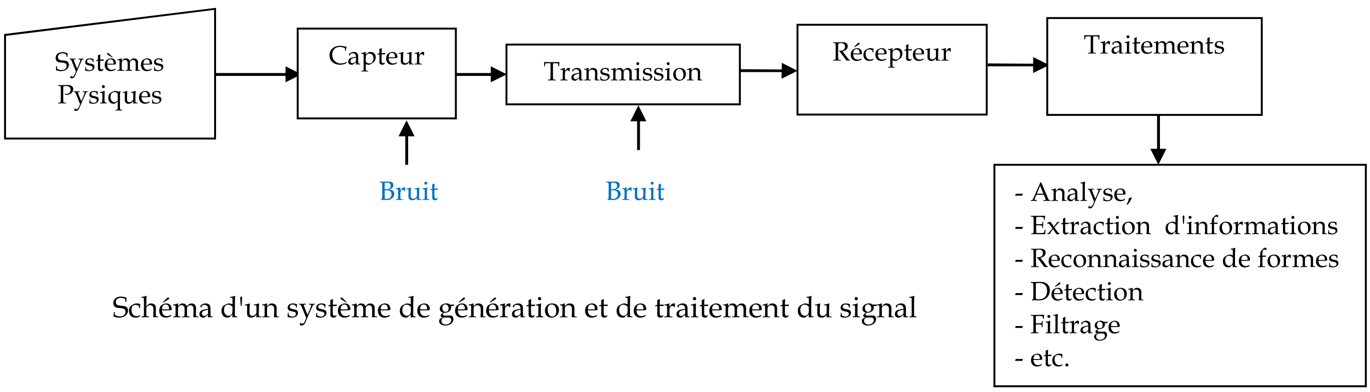


Schéma d'un système de génération et de traitement du signal

Les fonctions du traitement du signal peuvent se diviser en deux catégories : l'élaboration des signaux (incorporation des informations) et l'interprétation des signaux (extraction des informations). Les principales fonctions intégrées dans ces deux parties sont les suivantes [1]:

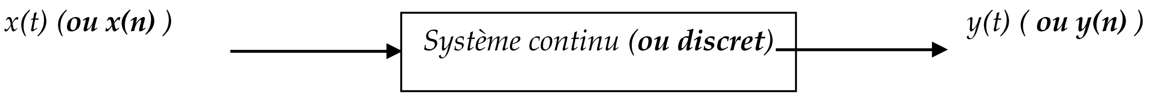
Élaboration des signaux : synthèse, modulation, codage/compression, etc.

Interprétation des signaux : filtrage, détection, identification, analyse, mesure, etc.

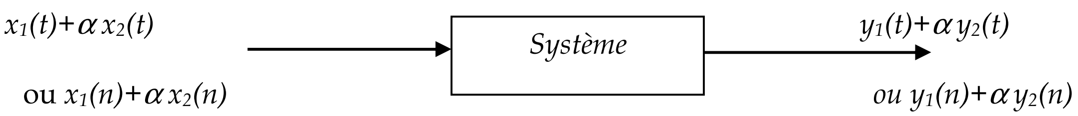
1. *Théorie des systèmes linéaires et invariants dans le temps (SLIT) discrets et continus*

Un système linéaire est un modèle de système qui applique un opérateur linéaire à un signal d'entrée. C'est une abstraction mathématique très utile en automatique, traitement du signal, mécanique et télécommunications. Les systèmes linéaires sont ainsi fréquemment utilisés pour décrire un système non linéaire en ignorant les petites non-linéarités.

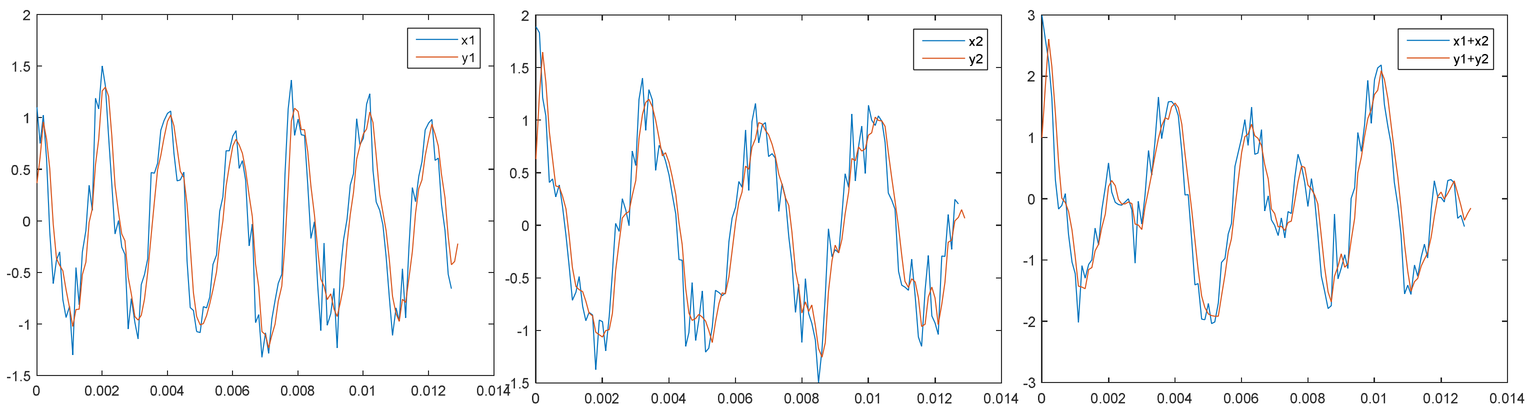
Un système est continu si à une entrée continue $x(t)$, il fournit une sortie continue $y(t)$. Un système discret fera correspondre à une suite d'entrées discrètes $x(n)$ une suite de sorties discrètes $y(n)$.



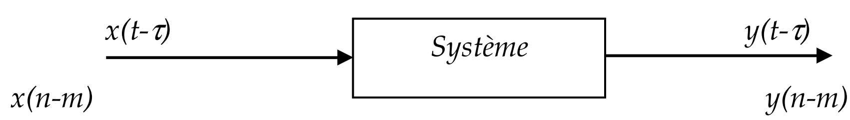
- Le système sera dit linéaire si quand on applique une entrée k x(t) (*ou* $k.x(n)$) , la sortie sera k.y(t) (*ou* $k.y(n)$). Si deux entréesx$_1$(t) et x$_2$(t) engendrent deux sorties y$_1$(t) et y$_2$(t) alors $x_1(t) + x_2(t)$ engendrera $y_1(t) + y_2(t)$. (*De même, dans le cas discret : si deux entrées* $x_1(n)$ *et* $x_2(n)$ *engendrent deux sorties* $y_1(n)$ *et* $y_2(n)$) *alors* $x_1(n) + x_2(n)$ *engendrera* $y_1(n) + y_2(n)$)



<u>*Exemple*</u>



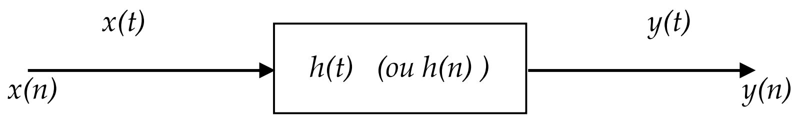
- S'il y a invariance dans le temps, une translation de l'entrée $x(t)\Rightarrow x(t-\tau)$ (*ou* $x(n)\Rightarrow x(n-m)$) se traduira par une même translation dans le temps de la sortie $y(t)\Rightarrow y(t-\tau)$.(*ou* $y(n)\Rightarrow y(n-m)$).



Si le système est invariant, cela implique que le système réagit de la même façon quel que soit l'instant auquel nous appliquons ses excitations. Cette propriété exprime que la caractéristique du système ne dépend pas de l'origine du temps, on parle encore de stationnarité.

Convolution

Si les hypothèses de linéarité et d'invariance temporelle sont vérifiées, on peut caractériser le système par sa réponse impulsionnelle h(t) (*ou h(n)*).



On peut en déduire l'effet d'une entrée quelconque sous la forme d'une convolution. Cette dernière est l'opération de traitement de signal la plus fondamentale. Elle indique que la valeur du signal de sortie à l'instant *t (ou n)*est obtenue par la sommation (intégrale) pondérée des valeurs passées du signal d'excitation *x(t) (ou x(n)).* La fonction de pondération est précisément la réponse impulsionnelle*h(t) (ou h(n))*:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

La réponse impulsionnelle *h(t)* (*ou h(n)*)est le signal qu'on obtient en sortie *y(t)=h(t)*(ou *y(n)=h(n)*) si on applique en entrée une impulsion "de Dirac" $x(t)=\delta(t)$ ($ou\ x(n)=\delta(n)$). Ainsi, le Dirac est l'élément neutre de l'opération de convolution:

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$\delta(n) * x(n) = x(n)$$

Quelques propriétés du Dirac

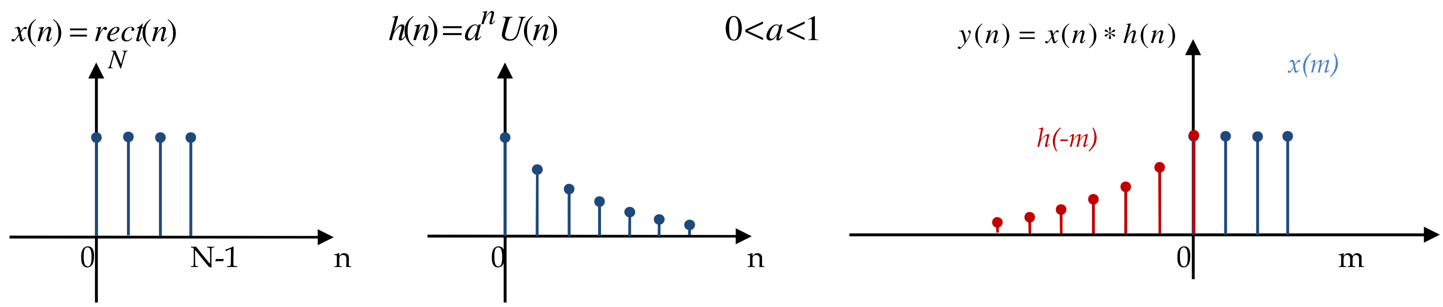
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_o)dt = x(t_0)$$

$$x(t)\delta(t-t_o) = x(t_o)\delta(t-t_o)$$

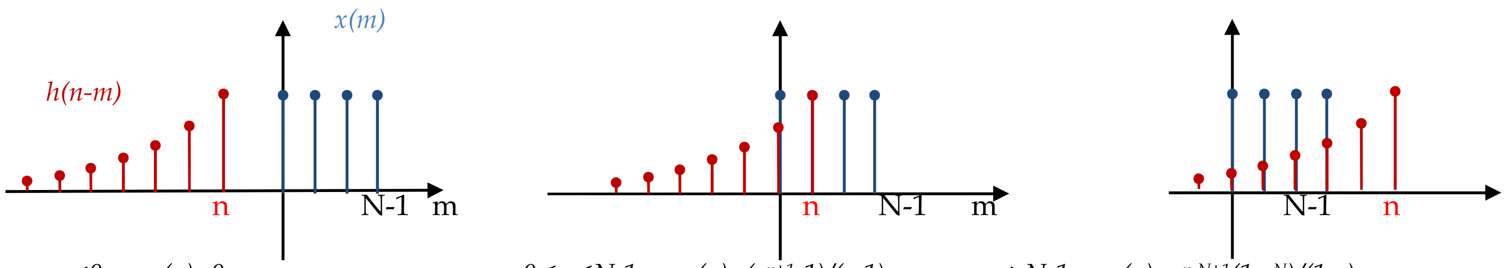
$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la somme du produit$x(\tau)h(t-\tau)$(*ou x(m)h(n -m)*) . Le signal $h(t-\tau)$ (*ou h(n-m)*) est simplement le signal initial$h(\tau)$ (*ou h(m)*), retourné dans le temps pour donner $h(-\tau)$ (ou *h(-m)*) puis translaté de *t* (*ou n*). En calculant alors l'ensemble des produits obtenus en faisant « glisser » h, c'est-à-dire pour tous les décalages de *t (oun)* , on obtient le produit de convolution pour tout *t* (*ou n*).

Exemple 1 : (en discret)

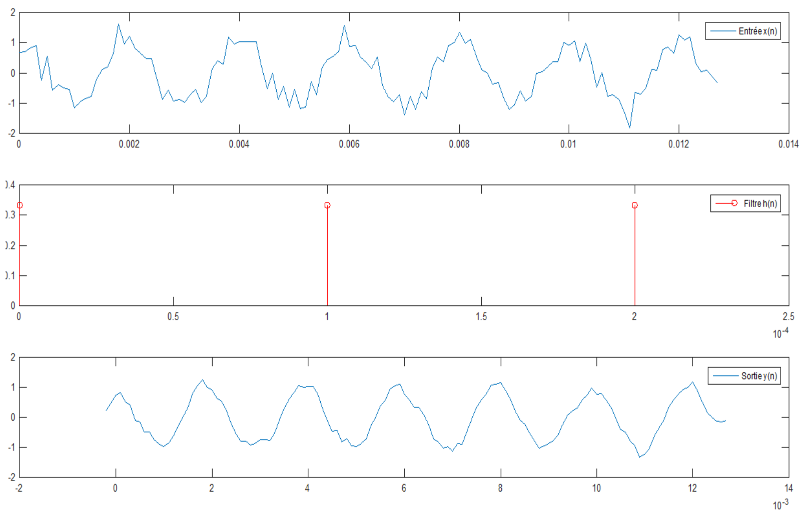


On distingue 3 cas :



$n<0 \Rightarrow y(n)=0$ $\quad 0 \le n \le N-1 \Rightarrow y(n)=(a^{n+1}-1)/(a-1)$ $\quad n>N-1 \Rightarrow y(n)=a^{n-N+1}(1-a^N)/(1-a)$

Exemple 2 :(Voir TP n°1)



$$h(t)=\frac{1}{T}\Pi_T(t) \Rightarrow y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\,d\tau$$

$$h(n)=\frac{1}{N+1}\Pi_{N+1}(n) \Rightarrow y(n)=\frac{1}{N+1}\sum_{m=-N/2}^{N/2} x(n+m)$$

Exemple 3: Soit le signal x(n) = {2, -1, 3} et h(n) = {1, 2, 2, 3}

Calculer y(n)=x(n)*h(n)

Pour des séquences finies, on peut utiliser la méthode des colonnes

Y(n)={2, 3, 5, 10, 3, 9}

h[n]	=	1	2	2	3		
x[n]	=	2	-1	3			
		2	4	4	6		
			-1	-2	-2	-3	
				3	6	6	9
		2	3	5	10	3	9

Remarques

Si on applique à un SLIT une entrée sinusoïdale réelle ou complexe de fréquence f_0, alors, la sortie sera une sinusoïde dont l'amplitude et la phase pourront être modifiées mais qui conservera la même forme (une sinusoïde) et la même fréquence f_0. On dit que les sinusoïdes sont les fonctions propres des SLIT.

Un système linéaire invariant est un système dont le comportement dans le temps, peut-être décrit par :

- soit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants: $\sum_{i=0}^{M} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{N} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$

- soit par une équation aux différences,pour le cas discret: $\sum_{i=0}^{M} a_i\, y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} b_i x(n-i)$,

2. *Stabilité et causalité*

Une contrainte importante pour la formalisation de nombreux problèmes est de respecter la notion de *causalité* (les effets ne peuvent pas précéder la cause). Dans le cas des SLIT, cette causalité se traduit par le fait que pour: *h(t) = 0 pour t<0* (*ou h(n) = 0 pour n<0*).

$$x(t)=0,\ t<t_0 \text{ alors } y(t)=0,\ t<t_0 \quad \Rightarrow \quad h(t)=0,\ t<0,$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

Ce qui noud donne en discret :

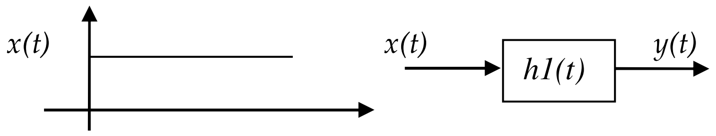
$$x(n)=0,\ n<n_0 \text{ alors } y(n)=0,\ n<n_0 \quad \Rightarrow \quad h(n)=0,\ n<0,$$

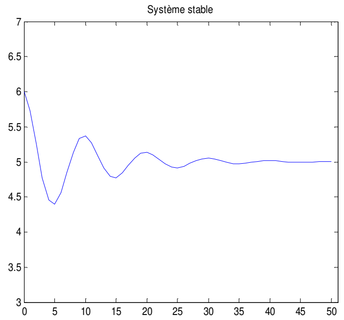
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{+\infty} x(n-m)h(m)$$

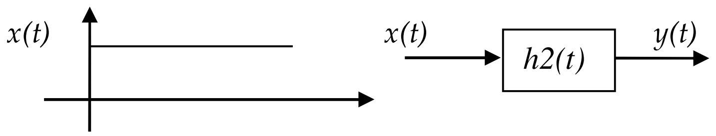
- si h et x sont causaux $y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(n-m)x(m)$

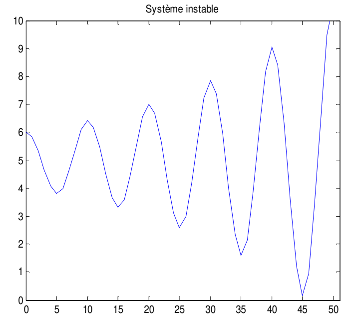
<u>Remarque</u>:Nous pouvons envisager mémoriser les signaux d'entrée et faire un traitement de ceux-ci en temps différé, les systèmes utilisés ne sont plus alors nécessairement causaux car pour élaborer la sortie à l'instant t_i(*ou* n_i), nous disposons en mémoire des entrées aux instants suivants. C'est souvent le cas en traitement d'image, en traitement de parole effectué après mémorisation du signal à traiter.

Une autre notion fondamentale est la *stabilité* des systèmes. La propriété de stabilité des systèmes bouclés est non seulement une performance mais une exigence pour le bon fonctionnement d'une boucle d'asservissement ou de régulation. Une boucle instable est une boucle inutilisable. La définition la plus courante de cette stabilité est la suivante :









On dit qu'un système est stable si, en lui appliquant une entrée bornée quelconque, la sortie reste bornée, ce qui implique dans le cas des SLIT:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < M \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n} |h(n)| < \infty$$

Remarque *:Pour le reste, les définitions seront données pour le cas discret.*

3. Energie et puissance

Toute transmission d'information s'accompagne de transferts d'énergie. En effet, les signaux continus ou discrets sont essentiellement caractérisés par l'énergie ou la puissance qu'ils véhiculent. Ce sont les seules grandeurs physiques auxquelles sont sensibles les détecteurs. Beaucoup de capteurs physiques mesurent une énergie ou une quantité quadratique. Par exemple, les capteurs optiques mesurent une intensité, les compteurs d'électricité mesurent une énergie, etc. Compte tenu de la définition fondamentale, l'énergie du signal entre les instants t et t+dt est : $|x(t)|^2\, dt$ (puissance instantanée multipliée par le temps).

Soit un signal x(n) à temps discret, tel que $\sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$ existe et converge. Alors le signal est dit à énergie finie et la valeur de cette somme est appelée énergie du signal :

$$E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Exemples:

x(n) = Rect(n/N) énergie finie. x(n) = a (constante) et x(n) = A sin($2\pi f_0 n$) ne sont pas à énergie finie

Pour un signal périodique, cette somme ne converge pas. On peut néanmoins définir la puissance d'un signal x(n) périodique de période N par :

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{-N/2}^{N/2-1}|x(n)|^2 \quad \text{ou} \quad P_x = \frac{1}{2.N}\sum_{-N}^{N-1}|x(n)|^2$$

Dans le cas général, on parle de signaux à puissance moyenne finie définie par:

$$P_x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{-N/2}^{N/2-1}|x(n)|^2 \quad \text{ou} \quad P_x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2.N}\sum_{-N}^{N-1}|x(n)|^2$$

Exemples:

Signal continu x(t)=a, A sin(2πf_0t) , signaux périodiques,échelon unité, peigne de Dirac.

Il existe des signaux ni périodiques, ni d'énergie finie, pour lesquels la puissance ne peut être définie, comme par exemple la rampe x(n)=n. Il s'agit là de définitions mathématiques, en pratique, un signal mesuré ne l'est jamais sur un intervalle de temps infini. On peut commencer à visualiser un signal à un instant qu'on prendra comme origine des temps, et dans ce cas on arrêtera son examen au bout d'un temps T_{obs} :

$$E_x = \sum_{n=0}^{Nobs}|x(n)|^2$$

Remarque

Signal à énergie finie ⇒ puissance nulle

Signal à puissance finie ⇒ énergie infinie

Le calcul de l'énergie ou la puissance permet d'obtenir une première caractérisation du signal. Par ailleurs, la théorie du signal a largement développé des méthodes d'étude basées sur la corrélation pour caractériser le comportement temporel du signal.

Exercice d'application :

Calculer l'énergie et la puissance des signaux: $\prod_7(n)$,A cos(2πf_0n) .

4. Corrélation et auto-corrélation

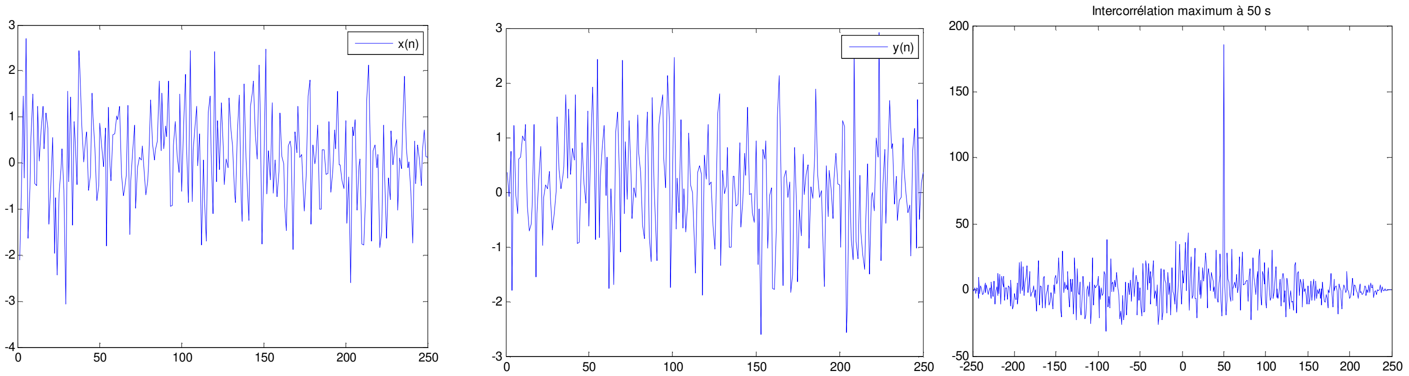
La fonction de corrélation permet de mesurer le degré de ressemblance entre deux signaux en fonction d'un décalage. Considérons x(n) et y (n) deux signaux d'énergie finie, la fonction d'intercorrélation $R_{x,y}$(k) est définie par: $R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, y^*(n-k)$

L'inter-corrélation entre x(t) et y(t) atteint un maximum pour un retard k si x(n)=y(n-k)

Pour des signaux à puissance moyenne finie, elle vaut : $R_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n)\, y^*(n-k)$

Exemples

Soient un signal aléatoire et sa version décalée de 50s. On remarque que les signaux se ressemblent le plus quand y(n) est décalé de 50 secondes.



Pour l'auto-corrélation, on remplace y(n) par x(n) on obtient l'expression de l'auto-corrélation pour les signaux à énergie finie: $R_{xx}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-k)$

L'auto-corrélation permet de détecter des régularités, des profils répétés dans un signal comme un signal périodique perturbé par beaucoup de bruit (Voir TP n°1)

Propriétés :

- Pour k= 0, on retrouve l'énergie du signal $R_{xx}(0) = E_x$ et $R_{xx}(k)$ est maximale en k=0

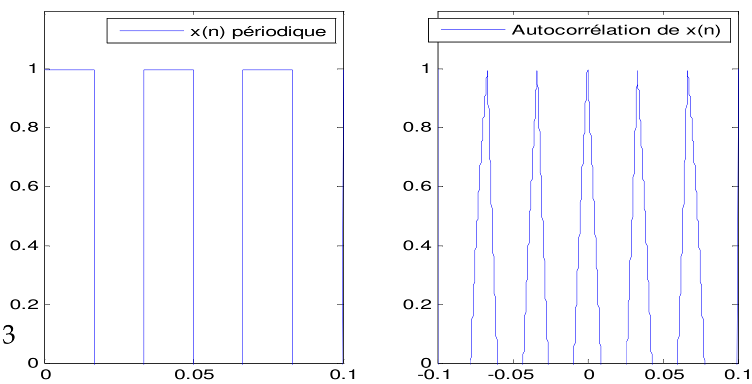
- Si x(n) est réel, l'auto-corrélation est réelle et paire.

- L'auto-corrélation d'un signal de durée N aura une taille 2*N-1

Auto-corrélation des signaux périodiques : Le calcul sur une seule période suffit. L'auto-corrélation d'un signal périodique est-elle même périodique. Par définition, le signal périodique ressemble parfaitement à lui-même, décalé d'une ou plusieurs périodes.

- signaux périodiques

$$R_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n)\, x^*(n-k)$$

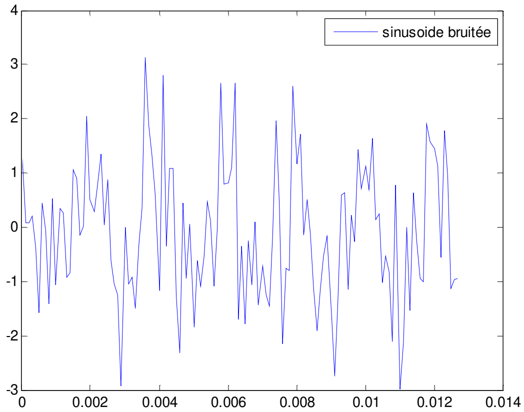


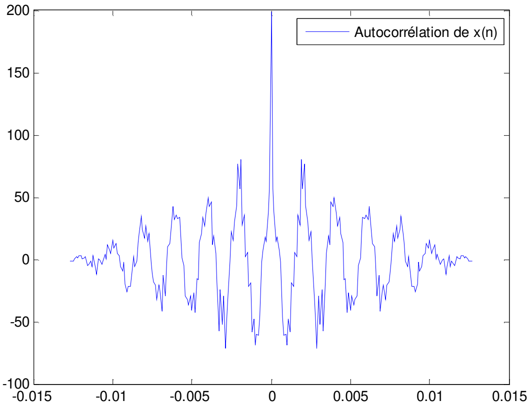
Exercice d'application Soit le signal x(n)=(n+1) pour n=0 à 3

Calculer l'auto-corrélation de x et déduire son énergie

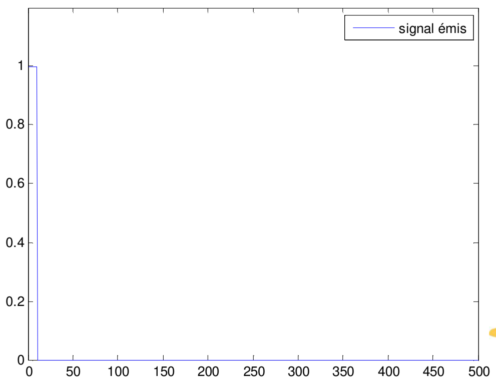
5. Applications fondamentales des fonctions de corrélation

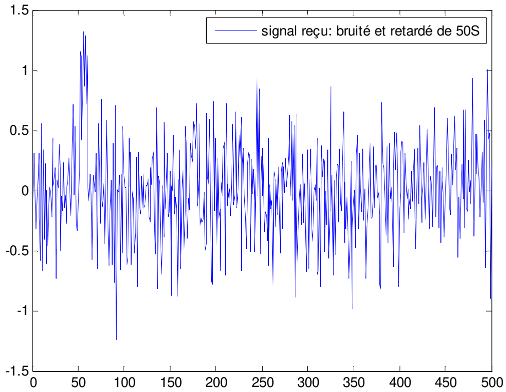
Extraction d'un signal noyé dans du bruit, mesure d'un temps ou retard, détection d'un signal périodique (Voir TP n° 1).L'exemple ci-dessous illustre l'auto-corrélation d'un signal sinusoïdal d'amplitude 1 noyé dans du bruit Gaussien de variance 1.

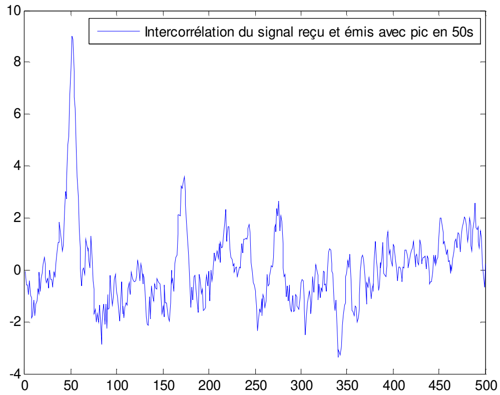




La corrélation est largement utilisée dans les systèmes radar. Ainsi, pour détecter un avion, on envoie une impulsion, puis on reçoit une version retardée, atténuée et bruitée de cette impulsion . L'intercorrélation du signal reçu et émis présentera un pic à l'instant correspondant au retard.

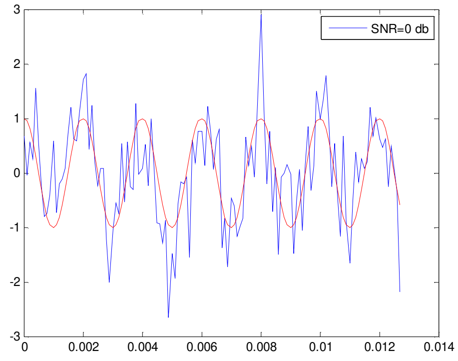


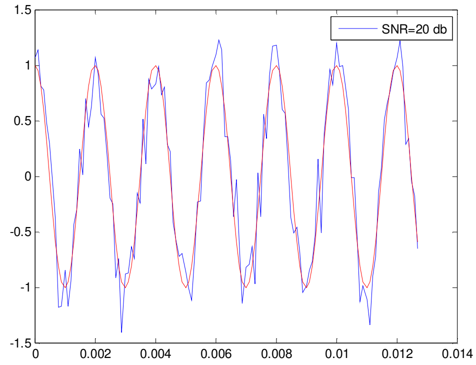




Remarque: La notion de bruit est relative, elle dépend du contexte. Le rapport signal/bruit désigne la qualité de la transmission d'une information par rapport aux parasites. Il est défini par:

$SNR_{db}=20\ Log(P_S/P_B)$





6. Filtres à réponses impulsionnelles finies ou infinies (RIF et RII)

- Si les a_i sont ≠ de 0, le système est dit récursif (RII), il est non récursif s'il ne dépend que des *x(n-i)* (RIF)

- Si le système est à réponse impulsionnelle de durée finie (RIF), alors : $y(n)=\sum_{m=0}^{K} h(m)x(n-m)$

Dans ce cas, le système numérique est une fenêtre centrée sur les K plus récents échantillons.

- Si le système est à réponse impulsionnelle de durée infinie (RII) : $y(n)=\sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n-m)$

Dans ce cas, il est nécessaire de connaître tous les échantillons présents et passés, le système à une mémoire de longueur infinie.

*Exemple*1 $y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_2x(n-2)+.......+a_kx(n-k)$ est l'équation aux différence finies d'un filtre RIF avec comme réponse impulsionnelle $h(n)=\delta(n)+a_1\delta(n-1)+a_2\delta(n-2)+.......+a_k\delta(n-k)$ qui, on peut le constater,est bien finie.

Exemple 2 $y(n)=x(n)+a_1y(n-1)$ est l'équation aux différence finies d'un filtre RII

avec $y(n-1)=x(n-1)+a_1y(n-2) \Rightarrow y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_1^2y(n-2)$

de même $y(n-2)=x(n-2)+a_1y(n-3) \Rightarrow y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_1^2x(n-2))+a_1^3y(n-3)$

$\Rightarrow y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_1^2x(n-2))+a_1^3x(n-3)+a_1^4x(n-3)+.....+ a_1^m y(n-m)$

En poursuivant le procédé à l'infini *y(n)* dépend d'une infinité de *x(n-k)* ce qui en fait un filtre RII.

Exemple d'application

Les séquences $x(n)$ (réel) et $y(n)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie d'un système discret. Pour chaque cas, identifiez celles représentant

a) des systèmes linéaires, b) des systèmes causals, c) des systèmes invariants aux translations de n,

d) des systèmes assurément ou possiblement stables (en fonctions des constantes)

1. $y(n) = x(n) + bx(n-1)$ 2. $y(n) = x(n) + bx(n+1)$ 6. $y(n) = b^{x(n)}$ b : constante réelle

3. $y(n) = nx(n)$ 5. $y(n) = x(n)e^n$ 7. $y(n) = |x(n)|$

4. $y(n) = x(n) \sin(2\pi f_0 n)$

a) Tous sauf 6 et 7 b) Tous sauf 2

c) Les systèmes 1, 2, 6 et 7 d) 1 (b finie), 2 (b finie), 4, 6 (b finie) et 7.

Série n° 1

1. Représenter les signaux suivants pour les cas continus et discrets

$\prod_{5}(n-1)$, $\prod_{N+1}(n-1)$, n.U(n), (n-2).U(n-3), (-n+3)U(n-2)U(-n+3), $e^{-an.}$U(n-1) où N est pair

2. Donner l'expression du signal échelon U(n) en fonction du signal signe Sgn(n).

3. Les signaux suivants sont-ils à énergie finie, à puissance moyenne finie, ou ni l'un, ni l'autre ? Calculer, dans chaque cas, l'énergie totale et la puissance moyenne totale (a>0).

- Arect(n/N+1) Asin($2\pi f_0 n$) Asin($2\pi f_0 n$).U(n) U(n)
- n.U(n) Ae^{-an}u(n) Ae^{-an}

4. Calculer la sortie y(n) lorsque : x(n) =δ (n–n_0) +δ(n–n_1) et h(n) = e^{-an}

5. Soit le signal échelon f(n)= E_0 U(n), d'amplitude E_0.

- Représenter graphiquement et calculer le produit de convolution de f(n) par lui-même (auto-convolution).
- Faire de même pour le cas continu

6. Calculer l'autocorrélation des signaux suivants pour les cas continus et discrets

- Arect(n/N) Asin($2\pi f_0 n$) 5 δ_N(n) Bcos($2\pi f_0 n$)

7. Soit le signal x(n)=e-an U(n) transmis à travers le système h(n) dont la réponse impulsionnelle est h(n) est donnée par h(0)=h(1)=h(2)=1/3.

- Calculer l'énergie et la puissance du signal d'entrée
- Calculer et tracer l'autocorrélation de h(n)
- Déterminer le signal y(n) résultant de la convolution numérique x(n)*h(n).

8. Etudier la linéarité, la causalité, l'invariance et la stabilité des systèmes définis par les équations aux différences finies:

	Linéarité	Invariance	Causalité	Stabilité
y(n)= 2 .n. x(n-1)				
y(n)+y(n+1)=2 $x(n+1)^2$				
y(n)=|x(n-1)-0.5x(n+1)|				
y(n)=1/e^n. x(n)				

Solutions

2. U(n)=1/2(sgn(n)+1)

3. E=A^2.(N+1) Pm=0, E=∞ Pm=A^2/2, E=∞Pm=A^2/4, E=∞ Pm=1/2
E=∞ Pm=∞, E=A^2/(1-e^{-2a}) Pm=0 , E=∞ Pm=∞, E=2A^2N(1+N) Pm=0

4. $x(n) = e^{-a(n-n0)} + e^{-a(n-n1)}$

5. f(n)*f(n)= E_0^2.(n+1) pour n≥0 et 0 ailleurs

6. $A^2N.\Lambda_N(k)$ $A^2/2.\cos(2\pi f_0 k)$ $25\delta_N(k)$ $B^2/2.\cos(2\pi f_0 k)$

7. E=1/(1-e^{-2a}) P=0 $R_h(0)$=1/3, $R_h(\pm1)$=2/9, $R_h(\pm2)$=1/9 y(n)=1/3 (x(n)+x(n-1)+x(n-2)

8. O-N-O-N N-O-O-N N-O-N-O O-N-O-N

Exercices supplémentaires

1. Donner l'expression du signal x(n) = Arect[(n-n₀)/N+1]=A $\prod_{N+1}(n-n_0)$ à l'aide du signal signeseulement. Justifier graphiquement la solution trouvée (N supposé pair).

2. Soient Calculer $x_1(n) * x_2(n)$ avec(a,b)$\in \Re^+ et$ a > b $x_1(n) = e^{-a.n}.U(n)$ $x_2(n) = e^{-b.n}.U(n)$

3. Calculer et esquisser graphiquement pour les cas $n_0 < n_1$ et $n_0 > n_1$ le produit de convolution z(n) = x(n)*y(n) pour les cas suivants :

X(n) = A[δ(n+n_0) + δ(n-n_0)] et Y(n) = B δ(n) + ½B[δ(n+n_1) + δ(n-n_1)]

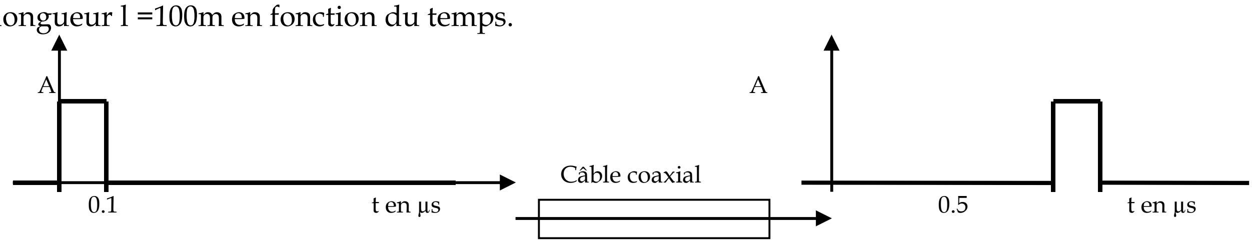
4. La fonction triangulaire est définie de la manière suivante: $E^2 N.\Lambda_N(n) = \begin{cases} E^2(n+1+N) & -N \le n \le 0 \\ -E^2(n-1-N) & 0 \le n \le N \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$

- Vérifier analytiquement et graphiquement la relation $E^2 N.\ \Lambda_N(n) = E.\Pi_{N+1}(n) * E.\Pi_{N+1}(n)$,
- En déduire l'auto-corrélation du signal et son énergie (devoir à rendre)

5. Soient x(n) et h(n) deux signaux numériques provenant respectivement de l'échantillonnage d'un signal x et de la réponse impulsionnelle h d'un système :

x(n)={0,0,0,0.5,1.5,0.5,1.5,0,0,0} et h(n)={0.5,0.5}
- Calculer l'énergie de chaque signal
- Calculer et tracer l'autocorrélation de h(n)
- Calculer la séquence y résultant de la convolution numérique x(n)*h(n).
- Interpréter ces résultats du point de vue des plages de fréquences éliminées et conservées.
- Quel est le signal d'entrée qui permettrait de connaître le signal h(n) ?
- Proposer un signal h(n) permettant de réaliser un filtrage passe haut du signal x(n)

6. On désire déterminer la vitesse de propagation d'une impulsion dans un câble coaxial sans perte. L'intensité est alors une fonction de la longueur de câble traversé 'l' et du temps 't'. Les mesures relevées donnent l'évolution de cette intensité pour l=0 correspondant au signal en entrée du câble et pour une longueur l =100m en fonction du temps.



- A partir de la figure ci-dessus, écrire les 2 signaux sous forme de 2 portes de mêmes amplitude et largeur en déterminant le centre de chacune (décalage).
- Calculer la fonction de corrélation entre les 2 signaux.
- Montrer que la détection du maximum de la fonction de corrélation permet de calculer la vitesse de propagation dans le câble. Calculer cette vitesse.

Solutions

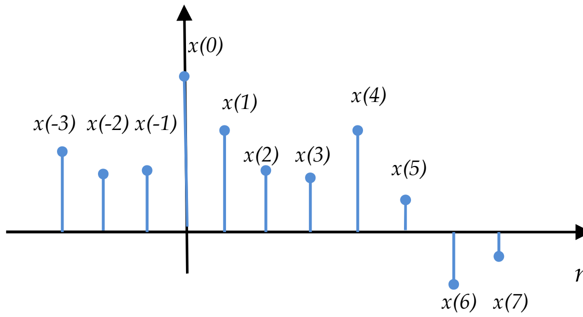
1. x(n)= A/2 [sgn(n-(n_0-N/2))- sgn(n-(n_0+N/2+1))] **2.** $x(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ e^{-bn}\dfrac{1-e^{(b-a)n+1}}{1-e^{(b-a)}} & n > 0 \end{cases}$

3. X(n)*Y_1(n)=AB[δ(n+n_0) + δ(n-n_0)]+AB/2[δ(n+n_0+n_1) + δ(n-n_0-n_1)+ δ(n-n_0+n_1) + δ(n-n_0-n_1)]

5. Voir interro1 S1 2016/2017 **6**. Voir examen S1 2017/2018

TP n°1 : Analyse temporelle des SLID (sous Matlab)
Convolution, Energie, Puissance et Corrélation

I. Rappels



Un signal discret s(n) est une suite de N échantillons régulièrement espacés de Te secondes: x(0),x(Te),x(2Te),…......., x((N-1)Te) où Fe=1/Te est la fréquence d'échantillonnage. Le tracé graphique d'un signal discrétisé en temps peut s'effectuer simplement à l'aide de la fonction stem sous matlab.

- L'énergie d'un signal x(n) est fournie sous matlab par **sum(x.^2).** Concernant la puissance moyenne, il faut diviser l'énergie par le nombre d'éléments de x(n).
- Pour la corrélation et la convolution, on utilisera, respectivement, les fonctions **xcorr** et **conv.** A noter que la convolution ou la corrélation de x et h de durée respective N et M est un signal y(n) de durée (N+M-1)
- La fonction **b=m+ s*randn(N,1)** permet de générer un vecteur bruit b de distribution pseudo normale (Gaussienne) de taille N de moyenne m et de variance s^2 dont la puissance est $P_s = m^2 + s^2$.

II. Exemples à tester avant le TP

1. Le programme suivant permet de générer un Dirac en 0 : δ(n) =1   pour n=0 et vaut 0 ailleurs

```
clc ; clear all ; close all ;
t=-10:10;
x=[zeros(1,10),1,zeros(1,10)];
stem(t,x);
axis([-10 10 -0.5 1.5]);
title('Dirac');
xlabel('n');ylabel('Amplitude');
```

2. Le programme suivant permet de générer un échelon U(n)=1 pour n≥0 et 0 pour n<0

```
clc ; clear all ; close all ;
t=-20:20;
x=[zeros(1,20),ones(1,21)];
stem(t,x);
title('Echelon unite');
xlabel('n');ylabel('Amplitude');
```

3. Pour générer N=128 échantillons d'une sinusoïde de fréquence f_0=1000, on peut procéder de la façon suivante, choisir une fréquence d'échantillonnage : Fe = 8000 (le pas de temps Te=1/Fe) Créer le vecteur des temps : t = (0:N-1)Te. Te. Calculer les échantillons: x = cos(2*pi*t*f_0) ; Puis, regarder le résultat : plot(x) ou plot(t,x).

Ce qui nous donne :

```
clc ; clear all ; close all ;
N=128;  fo=1000; Fe=8000; Te=1/Fe;
t=(0:N-1)*Te;  x=cos(2*pi*fo*t);
plot(t,x) ;
figure; plot(x);
figure; stem(t,x);
```

III. Programmes à réaliser

1. Le programme suivant permet de créer une porte de largeur 1s, centrée en 2,5 s, d'amplitude 4, échantillonnée avec Te=0.1s avec N=50 et de calculer son auto-corrélation et son énergie.

```
clc ; clear all ; close all ;
Te=0.1; N=50; A=4;
t=(0:1:N-1)*Te;
x=A*[zeros(1,20),ones(1,10),zeros(1,20)];
subplot(2,2,1);plot(x);
subplot(2,2,2);plot(t,x);
subplot(2,2,3);stem(t,x);
Rx= xcorr(x); tt=(-N+1:1:N-1)*Te;
subplot(2,2,4);plot(tt,Rx);
Energie=sum(x.^2)
```

- Quelle est la différence entre plot(x) et plot(t,x)?
- Quelle est la différence entre plot et stem?
- Utiliser le workspace pour visualiser la taille et le contenu des vecteurs t, tt, x et Rx. Commenter
- Calculer l'auto-corrélation théorique et comparer avec Rx.
- Retrouve-t-on les propriétés de l'auto-corrélation?
- Calculer l'énergie théorique et comparer avec Energie 1

2. Commenter le programme suivant :

```
clear all; close all; clc;
N=500; x=zeros(N,1);x(1:10)=1;
figure; plot(x);axis([0 N 0 1.2]);legend('signal émis');
y=circshift(x,50);
y=y+0.4*randn(N,1);
figure; plot(y);legend('signal reçu: bruité et retardé de 50s')
Ryx=xcorr(y,x);Ryx=Ryx(N:end);
figure; plot(Ryx);
```

-Induire un autre retard et observer.
- Changer la puissance du bruit et commenter.
- Donner un exemple d'application de ce programme.

3. Soit le programme ci-dessous

```
clc ; clear all ; close all ;
N=128;  fo=500; f1=300; Fe=10000; Te=1/Fe; T=3;
t=(0:N-1)*Te; X=cos(2*pi*fo*t)+0.3*randn(1,N);
h=(1/T)*ones(T,1); t_h=(0:T-1)*Te;
subplot(3,1,1);  plot(t,X);  legend('Entrée x(n)');
subplot(3,1,2);  stem(t_h,h,'r'); legend('Filtre h(n)');
Y=conv(X,h);  t_y=(1-T:N-1)*Te;
subplot(3,1,3); plot(t_y,Y); legend('Sortie y(n)');
```

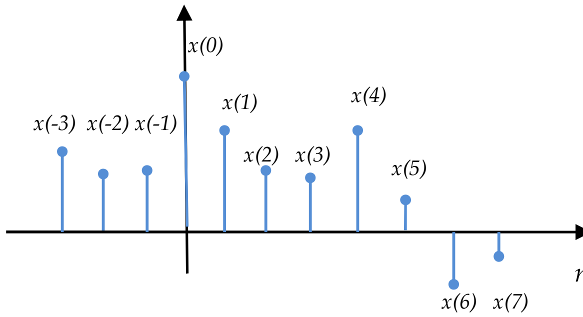
- Commenter le programme. Changer la valeur de T et observer.
- Comment nomme-t-on le signal h? Quel est son rôle?

4.Générer et visualiserle signal x composé de 64 échantillons d'une sinusoïde de fréquence f_0 =0.1 avec fe=20.f_0

- Calculer et afficher son auto-corrélation et comparer avec l'auto-corrélation théorique.
- Retrouver les caractéristiques du signal (puissance et fréquence) à partir de l'auto-corrélation.
- Générer le signal z=x+b ou b est un bruit avec (m=0 , s=0.5) . Calculer l'auto-corrélation du bruit et commenter.
- Calculer et visualiser l'auto-corrélation de z pour s=0.5, s=1 puis s=2 en commentant.
- Retrouver dans chacun des cas précédents la fréquence du signal à partir de l'auto-corrélation de z.

TP n°1 : Analyse temporelle des SLID (sous Python)
Convolution, Energie, Puissance et Corrélation

I. Rappels



Un signal discret s(n) est une suite de N échantillons régulièrement espacés de Te secondes: x(0),x(Te),x(2Te),……….., x((N-1)Te) où Fe=1/Te est la fréquence d'échantillonnage.

Au début du programme python, importer les bibliothèques nécessaires. Pour alléger l'écriture leur donner un nom plus court:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

NumPy est une bibliothèque destinée à manipuler des matrices ou tableaux multidimensionnels ainsi que des fonctions mathématiques opérant sur ces tableaux.
SciPy regroupe un ensemble de bibliothèques Python à usage scientifique avec un environnement très similaire à Matlab. Elle comporte des modules pour l'optimisation, l'algèbre linéaire, les statistiques, le traitement du signal ou encore le traitement d'images. **Scipy** utilise les tableaux et matrices du module **NumPy**.

II. Exemples à tester avant le TP

1. Le programme suivant permet de générer un Dirac en 0 : $\delta(n) = 1$ pour n=0 et vaut 0 ailleurs

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
N=32;
x = np.zeros(N); x[0]=1;
plt.figure(1)
plt.stem(x)
plt.title('Un Dirac.'); plt.grid(True); plt.xlabel('n'); plt.ylabel('Amplitude'); plt.show()
```

2. Rajouter les lignes suivante pour générer un échelon U(n)=1 pour $n \geq 0$ et 0 pour $n<0$

```
x=np.zeros(N); y = np.ones(N); z=np.concatenate((x,y));
plt.figure(2); plt.stem(z)
plt.title('Un Echelon'); plt.grid(True); plt.xlabel('n'); plt.ylabel('Amplitude'); plt.show()
```

3. Générer une sinusoïde de fréquence f_0=1000 et une fréquence d'échantillonnage : Fe = 1200 (Te=1/Fe)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
N = 128; f0=1000; fe=12000.; Te=1/fe
t = np.linspace(0.0, (N-1)*Te, N) ; x = np.cos(2.0*np.pi*f0*t)
plt.figure(1)
plt.subplot(211); plt.plot(t,x); plt.grid(True); plt.xlabel('Seconde(s)');
plt.ylabel('Amplitude')
plt.subplot(212); plt.stem(t, x); plt.grid(True); plt.xlabel('Seconde(s)');
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()
```

III. Programmes à réaliser

1. Le programme suivant permet de créer une porte de largeur 1s, centrée en 2,5 s, d'amplitude 4, échantillonnée avec Te=0.1s avec N=50 et de calculer son auto-corrélation et son énergie.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
N = 50; A=4; Te=0.1; t = np.linspace(0, N*Te, N)
x = A*np.concatenate((np.zeros(20),np.ones(10),np.zeros(20)))
plt.figure(1)
plt.subplot(221); plt.plot(x); plt.grid(True); plt.xlabel('S'); plt.ylabel('Amp')
plt.subplot(222); plt.plot(t, x); plt.grid(True); plt.xlabel('S'); plt.ylabel('Amp')
plt.subplot(223); plt.stem(t, x); plt.grid(True); plt.xlabel('S'); plt.ylabel('Amp')
plt.show()
tt=np.linspace((1-N)*Te, (N-1)*Te, 2*N-1); Rx=np.correlate(x,x,mode='full');
plt.subplot(224);  plt.title('Autocorr');plt.plot(tt,  Rx);  plt.grid(True);  plt.xlabel('S');
plt.ylabel('Amp')
Energie=sum(abs(x)**2)
```

- Quelle est la différence entre plt.plot(x) et plt.plot(t,x)? et la différence entre plt.plot et plt.stem?
- Utiliser l'explorateur de variables pour visualiser la taille et le contenu des vecteurs t, tt, x et Rx.
- Calculer l'auto-corrélation théorique et comparer avec Rx.
- Retrouve-t-on les propriétés de l'auto-corrélation?
- Calculer l'énergie théorique et comparer avec Energie.

2. Commenter le programme suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
N = 500; sigma = 0.5 ; mu = 0;
x = np.zeros(N); x[0:9]=1;   y = np.roll(x,50)+ sigma * np.random.randn(N) + mu
Ryx = np.correlate(y,x,mode='full');Ryx=Ryx[N-1:2*N-1]
plt.figure(1); plt.subplot(131); plt.plot(x); plt.title('signal émis')
plt.subplot(132); plt.plot(y); plt.title('signal reçu')
plt.subplot(133); plt.plot(Ryx); plt.title('Intercorrélation entre signal émis et signal reçu');
plt.show()
```

- Induire un autre retard et observer.
- Changer la puissance du bruit et commenter.
- Donner un exemple d'application de ce programme.

3. Soit le programme ci-dessous

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
N = 128; f0=500; fe=10000.; Te=1/fe; T=3; sigma = 0.3 ;
t = np.linspace(0.0, (N-1)*Te, N); x = np.cos(2.0*np.pi*f0*t)+ sigma * np.random.randn(N) ;
t_h = np.linspace(0.0, (T-1)*Te, T); h = 1.0/T*np.ones(T)
t_y = np.linspace(0.0, (N+T-2)*Te, N+T-1); y = np.convolve (x, h, mode='full')
plt.figure(1);
plt.subplot(311); plt.plot(t,x); plt.grid(True); plt.title('Signal d entrée x(n)')
plt.subplot(312); plt.stem(t_h, h); plt.grid(True); plt.title('Le filtre h(n)')
plt.subplot(313); plt.plot(t_y,y); plt.grid(True); plt.title('Signal de sortie y(n)')
plt.show()
```

- Commenter le programme. Changer la valeur de T et observer.
- Comment nomme-t-on le signal h? Quel est son rôle?

4.Générer et visualiser le signal *x* composé de 64 échantillons d'une sinusoïde de fréquence f_0 =0.1 avec fe=20.f_0
- Calculer et afficher son auto-corrélation et comparer avec l'auto-corrélation théorique.
- Retrouver les caractéristiques du signal (puissance et fréquence) à partir de l'auto-corrélation.
- Générer le signal z=x+b ou b est un bruit avec (m=0 , s=0.5) . Calculer l'auto-corrélation du bruit et commenter. Calculer et visualiser l'auto-corrélation de z pour s=0.5, s=1 puis s=2 en commentant.
- Retrouver dans chacun des cas précédents la fréquence du signal à partir de l'auto-corrélation de *z*.