

Chapitre II : Rappels sur les variables et vecteurs aléatoires

Tout signal physique comporte une composante aléatoire qu'il s'agisse d'une perturbation externe telle une tension aléatoire aux bornes d'une résistance ou une perturbation atmosphérique. Le signal utile est lui-même aléatoire si l'on considère le lancer de dés, le loto, les résultats de matchs ou encore les phénomènes météorologiques, etc., ...

Rappelons qu'un signal déterministe possède une formulation mathématique qui permet de connaître sa valeur à tout instant. A contrario, la connaissance de la valeur d'un signal aléatoire à l'instant t ne nous permet pas de connaître sa valeur à $t + \tau$. On ne pourra que faire des prévisions. On dira par exemple qu'il y a 30% de chance que sa valeur reste constante, 20% chance que sa valeur augmente et 50% qu'elle diminue. En fait, on fera appel à des paramètres statistiques définissant les *possibilités* d'évolution du signal. Ainsi, pour étudier l'évolution des phénomènes aléatoires, on a recours à des modèles probabilistes. Ceux-ci tentent de représenter le signal observé par une famille de Variables Aléatoires (VA) indexées par le temps. Chacune de ces VA décrit l'aspect incertain du phénomène à un instant donné.

1. Variables aléatoires et probabilités

Une VA est discrète ou continue suivant que l'ensemble des valeurs possibles de l'expérience aléatoire est respectivement discret ou continu (rien à voir avec le temps). Un exemple du cas discret est donné par le nombre d'étudiants ayant acquis un module. Par contre, le poids ou la taille d'un individu fournit un exemple de VA continue.

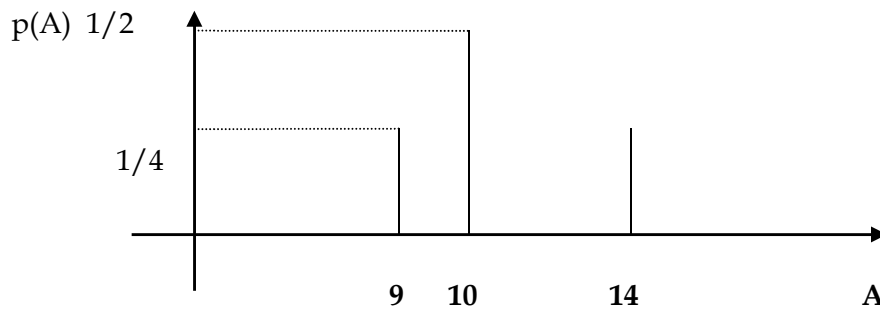
Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs. Cette expression s'appelle *la loi de probabilité* (ou *distribution de probabilité*) de la variable aléatoire $p(x)$ ou $\text{prob}(x_i)$ dans le cas discret. Quant à la fonction de répartition elle représente la probabilité pour qu'une VAX soit inférieure ou égale à x_i : $F(x_i) = \text{Prob}(X \leq x_i)$

Exemple 1: Le jet de dé.

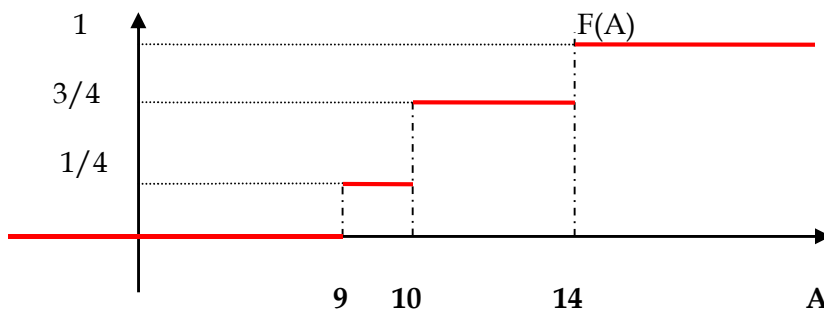
Il y a six valeurs possibles $x_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec les mêmes probabilités, sachant que $\sum_i \text{prob}(x_i) = 1$

alors $\text{prob}(x_i) = 1/6$ et $F(x_i) = \sum_{j=-\infty}^i \text{prob}(x_j) U(x - x_j)$

Exemple 2 : Soient 4 étudiants ayant obtenu les notes suivantes à l'examen : 10, 9, 10, 14 dans un module A. Si on cherche la probabilité d'avoir chaque note on trouve : $\text{prob}(A=9)=1/4, \text{prob}(A=10)=1/2, \text{prob}(A=14)=1/4$. On obtient le tracé suivant de $p(A)$:



Si on veut connaître la probabilité d'avoir une note inférieure ou égale à 10 (≤ 10), $p(A \leq 10) = 1/4 + 1/2 = 3/4$. Si on fait ce calcul pour toutes les valeurs A, on obtient la fonction de répartition $F(A)$:



$$\text{Prob}(x_j \leq X \leq x_i) = F(x_i) - F(x_j)$$

Concrètement la fonction de répartition correspond à la distribution des probabilités cumulées. Le plateau atteint par la fonction de répartition correspond à la valeur de probabilité 1. Ainsi $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$

Probabilité simple et probabilité conjointe

Il est évident qu'une probabilité n'a de sens que si celle-ci est calculée sur un grand nombre. Imaginons que l'on lance un dé 6 fois, on n'obtiendra sûrement 6 faces différentes, ni même autant de faces pour 12 ou 60 lancers (voir exo n°1 du TP n°1). Ce n'est qu'au bout d'un nombre de lancers très important ($N \gg$) que les 6 faces apparaîtront avec quasi les mêmes probabilités.

Soit donc A un résultat possible d'une expérience aléatoire, N le nombre de réalisation de l'expérience et n_A le nombre de fois que le résultat A est apparu, alors la probabilité de l'événement "le résultat de l'expérience est A" :

$$p(A) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_A}{N}$$

De la même façon, on peut définir la probabilité conjointe : Soient A et B deux événements distincts alors la probabilité que A et B aient lieu conjointement est:

$$p(A, B) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n_{AB}}{N}$$

avec n_{AB} = nombre de fois que A et B sont apparus

$$p(A, B) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \frac{n_A}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \right) \cdot \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{n_A}{N} \right) \stackrel{\text{déf.}}{=} p(B/A) \cdot p(A)$$

qui peut aussi s'écrire

On appelle $p(B/A)$ une probabilité conditionnelle c'est la probabilité que B ait lieu sachant que A a eu déjà lieu. La formulation de la probabilité conditionnelle $p(A/B)$ permet de retrouver le théorème de Bayes :

$$p(A, B) = p(B/A) \cdot p(A) = p(A/B) \cdot p(B)$$

Notion d'indépendance: Supposons que l'on veuille connaître la probabilité qu'il pleuve à Alger (Evènement A) sachant qu'il fait beau / Rio (Evènement B). L'un n'ayant aucune influence sur l'autre (les deux évènements étant indépendants) alors : $p(A/B) = p(A)$ de même $p(B/A) = p(B)$ d'où $p(A, B) = p(A) \cdot p(B)$

Remarque:

Pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'évènement $\{X = a\}$ est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur. On considère alors la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprises dans un intervalle $[a, b]$ tel que $p(a \leq X \leq b)$. Lorsque cet intervalle tend vers 0, la valeur prise par X tend alors vers une fonction que l'on appelle fonction densité de probabilité ou densité de probabilité : [1]

$$\text{Prob}(x \leq x_i \leq x + \Delta x) = \frac{\text{Valeurs entre } x \text{ et } x + \Delta x}{\text{Nombre de valeurs}} \Rightarrow p_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}(x \leq x_i \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Lorsque $\Delta x \rightarrow dx$, l'histogramme devient une fonction continue de $x \Rightarrow \text{Prob}[x_1 \leq x_i < x_2] = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$
avec $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$

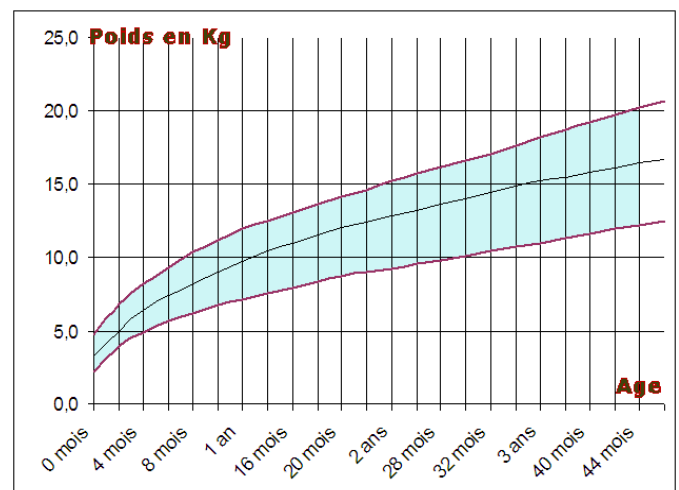
La fonction de répartition est alors la primitive de la fonction densité de probabilité $p(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du \Rightarrow p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

2. Moments statistiques

Le tracé de la densité de probabilité nous fournit une première information sur notre VA que l'on complètera par le calcul de différents paramètres statistiques. Deux d'entre eux sont largement utilisés, il s'agit de la moyenne et la variance.

La valeur moyenne équivaut à la composante continue et la variance aux fluctuations autour de cette moyenne. Ainsi, pour le suivi du poids ou de la taille d'un enfant, on se réfère à la moyenne calculée par tranches d'âge pour plusieurs enfants. L'écart par rapport à cette moyenne (supérieur ou inférieur) permettra de savoir si l'enfant a un poids normal pour son âge ou au contraire est en surpoids ou malnutrition



- Pour une VA discrète, la moyenne et la variance sont données par:

$$m = \mu_x = E\{x\} = \sum_i^N x_i p(x_i) \quad \text{Var} = \sigma_x^2 = E\{(x - \mu_x)^2\} = \sum_i^N (x_i - \mu_x)^2 p(x_i) = \sum_i^N x_i^2 p(x_i) - \mu_x^2$$

- Pour une VA continue $x \in [a, b]$, la moyenne et la variance sont données par:

$$m = \mu_x = E\{x\} = \int_a^b x \cdot p(x) dx \quad \text{Var} = \sigma_x^2 = E\{(x - \mu_x)^2\} = \int_a^b (x - \mu_x)^2 p(x) dx = \int_a^b x^2 p(x) dx - \mu_x^2$$

De façon plus générale, toute fonction f d'une variable aléatoire x est une variable aléatoire f . La connaissance des lois de probabilités nous permet de déterminer les *valeurs espérées théoriquement* - ou *espérances mathématiques* - ou encore *moyenne (ou moments) statistique* de f :

$$E\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx$$

Propriétés de l'espérance

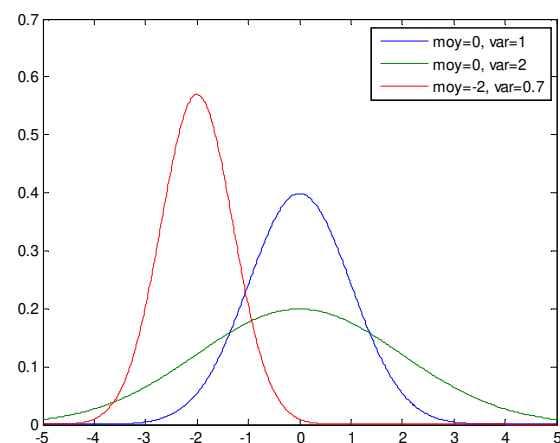
- $E\{X+Y\} = E\{X\} + E\{Y\}$
- $E\{aX\} = aE\{X\} \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (a étant une valeur déterministe)
- $E\{a\} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- Si $X \geq 0$ alors $E\{X\} \geq 0$

Remarque : Lorsque la moyenne est nulle, on dit que la variable aléatoire est *centrée*, lorsque sa variance vaut 1, on dit qu'elle est *réduite*

3. Lois de probabilité usuelles

Loi Normale ou gaussienne: Une des plus importantes lois car elle permet de modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires. Elle est caractérisée par sa moyenne m et sa variance σ^2 . Plus la variance est élevée, plus la courbe est aplatie.

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$$

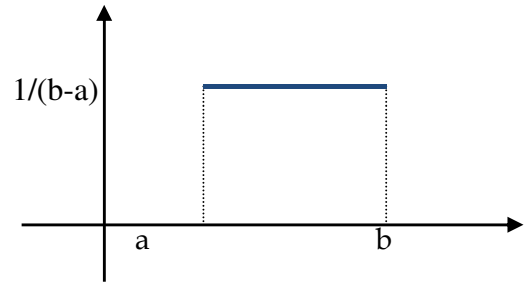


Exemple:

Notes obtenues à un examen par un ensemble d'étudiants. La plus part des notes seront comprises entre 7 et 13. Très peu d'étudiants auront une note >18 ou <0 . La loi des notes $p(x)$ est gaussienne du fait que la note d'un étudiant dépende de plusieurs facteurs aléatoires (cours donné, révision ou pas, aptitudes, disponibilités de documents, état moral, etc.)

Loi uniforme : X est uniformément répartie entre a et b veut dire que la probabilité est identique (ou équiprobable) quelque soit la valeur de x sur $[a, b]$:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad \begin{aligned} m &= (b+a)/2, \\ \sigma^2 &= (b-a)^2/12 \end{aligned}$$

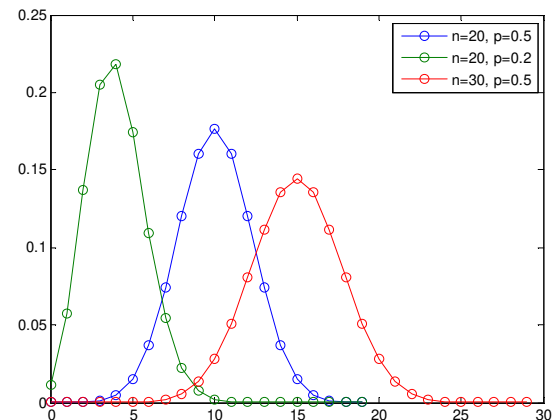


Loi de Bernoulli : La loi de Bernoulli, de paramètre p , est une expérience avec seulement deux issues possibles a et b avec les probabilités respectives de p et $(1-p)$. *Exemple:* Résultat pile ou face d'une pièce.

- La densité de probabilité est donnée par : $p_X(x) = p \cdot \delta(x-a) + (1-p) \cdot \delta(x-b)$
- La fonction de répartition par : $F(x) = p \cdot U(x-a) + (1-p) \cdot U(x-b)$

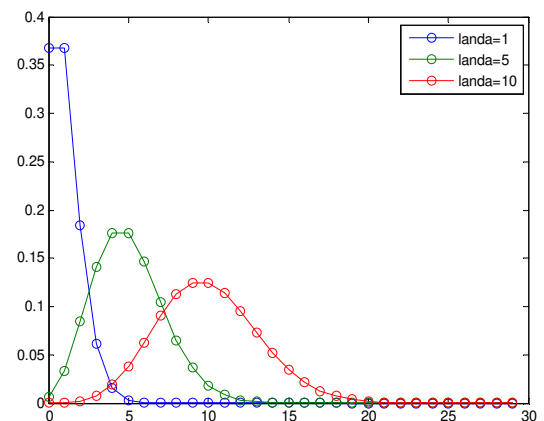
Loi Binomiale : de paramètre (n, p) , c'est la répétition de n expériences de Bernoulli. Soit un événement A associé à une expérience. Cet événement a une probabilité p de survenir. On reproduit n fois l'expérience et on s'intéresse à la VA X qui donne le nombre de succès de l'événement A au cours des n essais.

$$p_X(x) = C_n^x p^x (1-p)^{(n-x)} C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad m = np \quad \sigma^2 = np(1-p)$$



Loi de Poisson : La loi de Poisson est appelée la loi des événements rares, elle dépend d'un paramètre λ ; elle trouve son utilité pour la description du comportement d'événements dont les chances de réalisation sont faibles. De nos jours, elle est très utilisée dans les télécommunications (pour compter le nombre de communications dans un intervalle de temps donné), le contrôle de qualité statistique (nombre de pièces défectueuses), etc.

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \geq 0, \lambda > 0 \quad m = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda$$

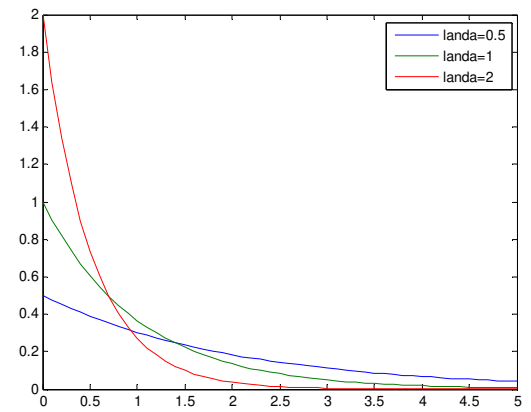


Exemple :

Si un événement donné se produit en moyenne 10 fois par minute, pour étudier le nombre d'événements se produisant dans un laps de temps d'une heure, on choisit comme modèle une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 60 \times 10 = 600$.

Loi exponentielle : Dans ce cas X est une variable aléatoire définissant la durée de vie d'un phénomène. Si l'espérance de vie du phénomène est $E(X)$ et si la durée de vie est sans vieillissement (ex: composant électronique (voir exo n°5 du TP n°1).), c'est-à-dire si la durée de vie au-delà de l'instant T est indépendante de l'instant T , alors X a pour densité de probabilité:

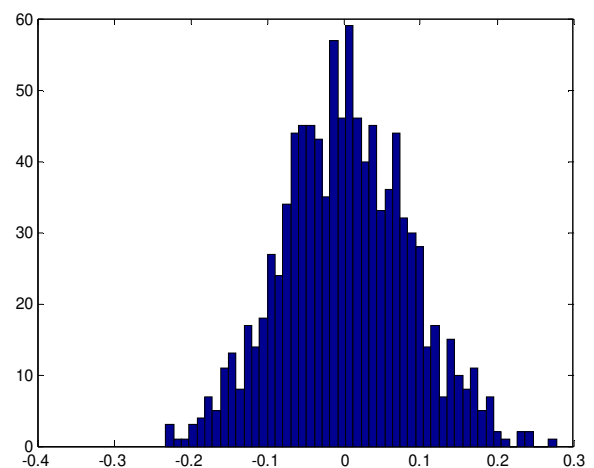
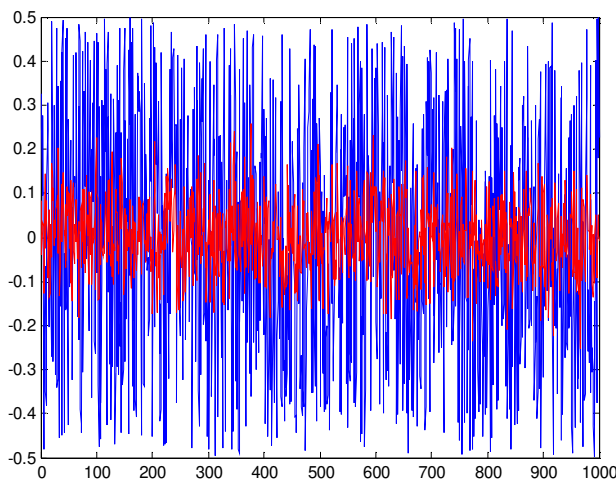
$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases} \quad m = 1/\lambda \quad \sigma^2 = 1/\lambda^2$$



En théorie des files d'attente, l'arrivée de clients dans une file est souvent modélisée par cette loi.

Théorème central limite et approximations :

Chaque fois qu'un phénomène peut être considéré comme la résultante d'un grand nombre de causes aléatoires indépendantes (ex: notes obtenues à l'examen, poids d'un enfant), on peut résumer que ce phénomène suit une loi de distribution normale: c'est le théorème central limite. Ainsi, la distribution statistique de la somme de n V.A. indépendantes et de même loi tend vers la loi Normale quand n tend vers l'infini. L'exemple suivant illustre la somme de 12 signaux indépendants et uniformément répartis entre -0.5 et +0.5 et sa densité de probabilité qui suit une loi gaussienne (voir exo n°3 du TP n°1).



Exemple d'application : Soient les notes obtenues dans 2 modules par une section de 10 étudiants .

1. Quel est le nombre d'étudiants ayant le module1
2. Quelle est la probabilité d'avoir la moyenne dans le module1
3. Quelle est la probabilité d'avoir la moyenne dans le module2
4. Quelle est la probabilité d'avoir le module2 quand on eu le module1
5. Quelle est la probabilité d'avoir les 2 modules simultanément
6. Quelle est la probabilité d'avoir une note inférieure à 10 dans le module1

Etudiants	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Module1	8	10	17	7	9	11	13	6	12	8
Module2	11	12	13	9	10	8	11	8	10	6

4. Vecteurs Aléatoires

Une variable aléatoire à plusieurs dimensions (encore appelée vecteur de VA) est le résultat dépendant de plusieurs caractères aléatoires. Le tirage de 2 dés à six faces donne une VA discrète à deux dimensions (une matrice 6x6 de probabilités 1/36). Par contre, la taille et le poids forment une VA continue à 2 dimensions.

Exemple:

$p(X,Y)$ ou X est une Gaussienne et Y est uniforme

Des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ ont une loi de distribution conjointe si elles sont définies par rapport au même univers Ω . Elles peuvent être caractérisées via soit:

- leur fonction de densité de probabilité conjointe : $p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ définie par:

$$\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

- leur fonction de répartition conjointe : $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

Loi de distribution marginale

Si l'on s'intéresse à un sous-ensemble $X_1, X_2, \dots, X_m$, $m < n$ des variables aléatoires précédentes distribuées conjointement, on définit la loi de distribution marginale à partir de la distribution conjointe ont une loi de distribution conjointe si elles sont définies par rapport au même univers Ω . Elles peuvent être caractérisées via :

$$p_{X_1, X_2, \dots, X_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n) du_{m+1} \dots du_n$$

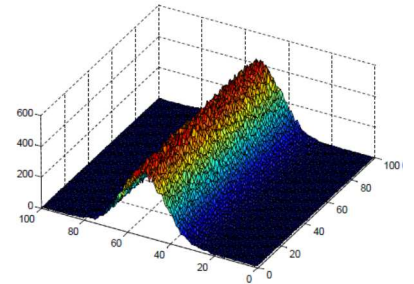
Exemple 1 (VA discrète)

$$\text{Soit } \text{Prob}(x,y) = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/3 & 0 \\ 2/9 & 1/9 & 2/9 \end{bmatrix}$$

On peut alors déterminer la probabilité de x soit $\text{prob}(x)$ et de même celle de y

$$\text{Prob}(x) = [1/9 + 1/3 = 4/9 \quad 2/9 + 1/9 + 2/9 = 5/9]$$

$$\text{Prob}(y) = [1/9 + 2/9 = 1/3 \quad 1/3 + 1/9 = 4/9 + 2/9 = 2/9]$$



Exemple 2 Soient X et Y deux variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0, T] \times [0, T]$, alors :

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/T^2 & \text{pour } x \in [0, T] \text{ et } y \in [0, T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad p_X(x) = \int_0^T p_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^T 1/T^2 dy = 1/T = p_Y(y)$$

Exemple 3 Soit une distribution bidimensionnelle définie par :

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_X(x) = \int_0^x p_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^x 2 dy = 2x$$

$$p_Y(y) = \int_y^1 p_{X,Y}(x, y) dx = \int_y^1 2 dx = 2(1 - y)$$

Changements de variables : Connaissant une variable X et sa loi $p_X(x)$ et étant donné une autre variable Y s'écrivant en fonction de X. Il existe un moyen de déterminer $p_Y(y)$ par le biais du Jacobien. Soit X une VA continue caractérisée par sa densité de probabilité $p_X(x)$ alors la VA continue $Y=f(X)$ a une densité de probabilité donnée par :

$$p_Y(y) = |J| [p_X(x)]_{x=f^{-1}(y)} = \left| \frac{\partial X}{\partial Y} \right| [p_X(x)]_{x=f^{-1}(y)}$$

On peut généraliser cela pour n VA. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur de VA continue caractérisé par sa densité de probabilité $p_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, alors le vecteur de VA continue $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ a une densité de probabilité donnée par :

$$p_Y(y_1, \dots, y_n) = |J| [p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)]_{x_1 \dots x_n = f^{-1}(y_1, \dots, y_n)}$$

$$\text{avec } J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial Y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial Y_n} \end{bmatrix}$$

Exemple 1: Soit $z = x + y$ où x, y sont deux variables aléatoires indépendantes. On cherche la densité de probabilité de z connaissant celles de x et y c'est-à-dire $p_X(x)$ et $p_Y(y)$.

Posons: $z=x+y$ On a alors $x=w$

$$w=x$$

d'où

$$y=z-w$$

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{dx}{dw} & \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dw} & \frac{dy}{dz} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

alors $p(w, z) = \left| J \right| p(x, y) \Big|_{x=f(w,z) \text{ et } y=f(w,z)} = 1 \cdot p_{xy}(w, z - w)$

$$\text{ainsi, } p(z) = \int p_{xy}(x, z) dx = \int p_{xy}(x, z - x) dx = \int p_x(x) p_y(z - x) dx = p_x(z) * p_y(z)$$

Donc, la densité de probabilité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes a pour densité de probabilité le produit de convolution de leurs densités de probabilité respectives (voir exo n°5 du TP n°1).

Remarque: Il faut distinguer le cas où la transformation entre X et Y est biunivoque de celui où elle ne l'est pas.

Ainsi, soit la transformation $Y = X^2$, X est une variable aléatoire de probabilité $p(x)$ définie tout d'abord sur l'intervalle $[0, 1]$. Sur cet intervalle, la transformation est biunivoque.

$$\text{On a alors : } X = \sqrt{Y} \text{ d'où : } p(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} p(x = \sqrt{y})$$

Soit la même transformation définie, cette-fois ci sur l'intervalle $[-1, 1]$. Sur cet intervalle, la transformation n'est pas biunivoque. On a alors : $X = \sqrt{Y}$ sur $[0, 1]$ et $X = -\sqrt{Y}$ sur $[-1, 0]$ d'où :

$$p(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} p(x = \sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} p(x = -\sqrt{y})$$

Covariance et coefficient de corrélation

$$C_{x_1 x_2} = \sigma_{x_1 x_2} = E\{(x_1 - \mu_{x_1})(x_2 - \mu_{x_2})^*\} = E\{x_1 \cdot x_2^*\} - \mu_{x_1} \mu_{x_2}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \mu_{x_1} \cdot \mu_{x_2}^*$$

Si X_1 et X_2 sont indépendants $\Rightarrow C_{x_1 x_2} = 0$. On dit que les variables sont décorréliées.

Le coefficient de corrélation est donné par : $\rho_{x_1 x_2} = C_{x_1 x_2} / (\sigma_{x_1} \sigma_{x_2})$

Ce coefficient mesure le degré de dépendance linéaire entre X_1 et X_2 . Il est compris entre -1 et 1. Un signe positif indique que X_1 et X_2 varient dans le même sens et un signe négatif que les deux variables varient en sens contraire. S'il est nul, X_1 et X_2 sont décorréliées, c'est le cas quand elles sont indépendantes.

Remarque:

Si les deux variables sont totalement indépendantes, alors leur corrélation est égale à 0. La réciproque est cependant fautive, car le coefficient de corrélation indique uniquement une dépendance linéaire.

Ainsi, soient deux variables aléatoires $X = \sin \phi$ et $Y = \cos \phi$ où ϕ est une phase aléatoire uniformément distribuée dans $[0, 2\pi]$. Si on calcule l'espérance de X et Y, on trouve une valeur moyenne nulle (voir exo n°6 du TP n°1). De même, le calcul de la covariance nous donne une valeur nulle. Les deux variables sont donc non corrélées. Et pourtant, on a $X^2 + Y^2 = 1$, ce qui prouve qu'elles sont dépendantes. En effet, si X est connue, Y l'est aussi.

Emploi de la notation matricielle : Il est préférable d'utiliser une notation matricielle pour traiter des vecteurs aléatoires de plus de 2 dimensions.

Soit $\underline{X}$ le vecteur des v.a. , $\underline{\mu}_X$ le vecteur des moyennes μ_{X_i} et $\underline{X}_C$ le vecteur des v.a. centrées :

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\mu}_X = \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \vdots \\ \mu_{X_n} \end{bmatrix}, \quad \underline{X}_C = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \vdots \\ \mu_{X_n} \end{bmatrix}$$

La matrice de covariance C_X est donnée par :

$$C_X = E\{\underline{X}_C \cdot \underline{X}_C^T\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & C_{12} & \cdot & \cdot & C_{1n} \\ C_{21} & \sigma_2^2 & \cdot & \cdot & C_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdot & \cdot & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Cas d'un vecteur aléatoire Gaussien: Un vecteur aléatoire réel de dimension n ($X_1, \dots, X_n$) est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire de $X_1, \dots, X_n$ est une variable aléatoire gaussienne réelle.

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_X)}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{X} - \underline{\mu}_X)^T C_X^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu}_X)}$$

Exemple d'application: Soient deux variables aléatoires Gaussiennes X et Y décorréliées, montrer que dans ce cas elles sont indépendantes.

Par ailleurs et par définition d'un vecteur aléatoire gaussien, la variable aléatoire :

$$Y = \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k = \alpha^T \underline{X}$$

est une variable aléatoire réelle Gaussienne. Par conséquent, sa loi est complètement déterminée par sa moyenne et sa variance qui ont pour expressions respectives :

$$E\{Y\} = \sum_{k=1}^n \alpha_k E\{X_k\} = \alpha^T \underline{\mu}_X \text{ et } \sigma_Y = \sum_{j,k=1}^n \alpha_j \alpha_k \text{cov}\{X_j, X_k\} = \alpha^T C_X \alpha$$

Exemple : Si Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale de paramètres respectifs (μ_1, σ_1) et (μ_2, σ_2) , alors, quels que soient les réels a et b, $aZ_1 + bZ_2$ est de loi normale de paramètres $(a\mu_1 + b\mu_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2})$

TD n°2: Variables et Vecteurs aléatoires

1. Une v.a a pour densité de probabilité $p_X(x)$ définie comme suit : $p_X(x) = \begin{cases} K & x \in [a, b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

- Trouver la valeur de K
- Calculer la fonction de répartition $F_X(x)$ et la tracer pour $a=1$ et $b=2$.
- Déterminer la moyenne et la variance

2. Soient X une v.a et $p(x)$ sa densité de probabilité définie comme suit : $p(x) = \begin{cases} Ke^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

- Déterminer la constante K
- Calculer $E[X]$ et $\text{Var}[X]$ puis $p(X < 1)$, $p(X < 2)$ et $p(X > 2)$.

3. Soit X une v.a ayant une densité de probabilité $p_X(x)$ telle que : $p_X(x) = ae^{-b|x|}$ pour $-\infty < x < +\infty$

- Trouver la relation entre a et b
- Calculer $E[x]$ et $\text{Var}[x]$

4. La densité de probabilité conjointe de deux v.a est donnée par : $P_{xy}(x, y) = \begin{cases} e^{-x}e^{-y} & x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

- Calculer la densité de probabilité marginale de X puis celle de Y
- Vérifier que $p_{xy}(x, y)$ est une densité de probabilité
- Confirmer l'indépendance de X et Y par le calcul de densité de probabilité

5. Soit X une v.a ayant une densité de probabilité uniforme pour $0 \leq x \leq 1$ et nulle ailleurs ; et soit Y une v.a indépendante de X et de densité de probabilité uniforme pour $0 \leq y \leq 2$ et nulle ailleurs. On considère $Z = X + Y$. Calculer $p_X(x)$, $p_Y(y)$ et $p_Z(z)$.

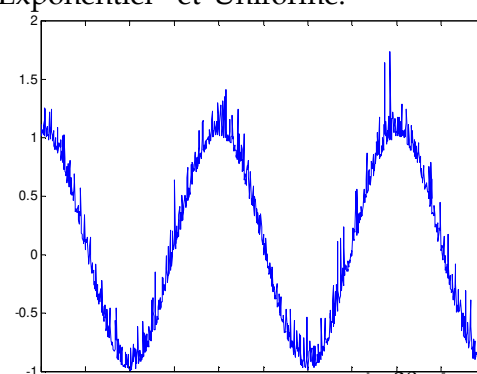
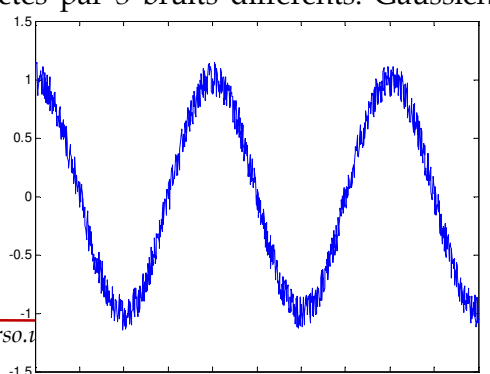
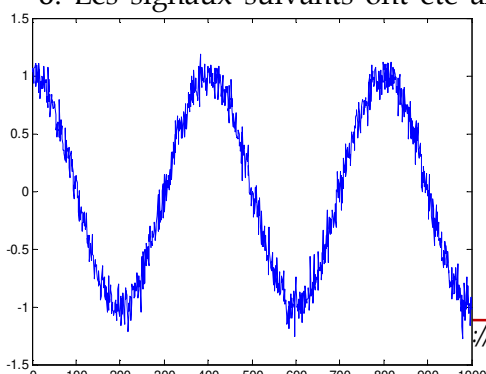
6. Soient deux v.a réels, indépendantes ayant des densités de probabilités de Gauss, centrées et de variance unité. On considère deux v.a W et Z définies par : $w = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ et $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$

- Déterminer la densité de probabilité conjointe de W et Z puis les lois de W et Z
- Ces variables sont-elles indépendantes ? On donne : $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x)$

7. Soit ϕ une phase aléatoire équi-répartie sur $[0, 2\pi]$. Considérons les variables aléatoires x et y définies par $x = \cos\phi$ et $y = \sin\phi$.

- Calculer les moyennes $E[x]$ et $E[y]$ puis calculer les variances de x et y.
- Calculer finalement la covariance de x et y donnée par $C_{xy} = \sigma_{xy} = E\{(x - \mu_x)(y - \mu_y)\} = E\{xy\} - \mu_x\mu_y$

8. Les signaux suivants ont été affectés par 3 bruits différents: Gaussien, Exponentiel et Uniforme.



Solutions

1. $K=1/(b-a)$; $F(x)$ est une droite de 1 à 2 de pente 1. 3. $b=2a$, $\mu_x=0$, $\sigma_x^2=$
2. $K=1$, $\mu_x=1$, $\sigma_x^2=1$, $p(X<1)=1-1/e$, $p(X<2)=1-1/e^2$, $p(X>2)=1/e^2$
4. $p(x) = e^{-x}$ $x \geq 0$..et.. $p(y) = e^{-y}$ $y \geq 0$ $\iint p(x,y) dx dy = 1$ $p(x,y)=p(x).p(y)$
5. $p(x)=1$, $p(y)=1/2$, $p(z)=1/2z$ entre 0 et 1, $p(z)=1/2$ entre 1 et 2, $p(z)=1/2(3-z)$ entre 2 et 3
6. $p(z)=ze^{-z/2}$, $p(w)=1/(\pi(1-w^2)^{1/2})$ indépendants 7. $\mu_x=0$ et $\mu_y=0$ $\sigma_x^2=0.5$ et $\sigma_y^2=0.5$ $C_{x,y}=0.8$. U, G, P

Exercices supplémentaires

1. Soit la fonction f définie comme suit : $p(x) = \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots x < -1 \\ x+1 & \dots\dots x \in [-1,0] \\ -x+1 & \dots\dots x \in [0,1] \\ 0 & \dots\dots\dots x > 1 \end{cases}$

- Montrer que la fonction f est une densité de probabilité puis déterminer sa fonction de répartition
- Déterminer la moyenne et la variance d'une v.a aléatoire ayant $f(x)$ pour densité de probabilité

2. Soient X et Y deux v.a liées par la relation : $Y = aX+b$ où a et b sont deux nombres réels. En supposant que $F_X(x)$ et $p_X(x)$ sont connus. Calculer alors $F_Y(y)$ et $p_Y(y)$.

3. Soient deux v.a X et Y liée par la relation : $Y = g(X) = X^2$. Calculer $F_Y(y)$ et $p_Y(y)$ sachant que $p_X(x)$ a une distribution uniforme sur $[0,2\pi]$.

4. Soient X et Y deux v.a. gaussiennes décorrélées dont la probabilité conjointe est :

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

- ✓ X et Y , sont-elles indépendantes? Déterminer les probabilités individuelles $p(x)$ et $p(y)$.
- ✓ Déterminer la probabilité conjointe $p(z,w)$ des v.a. $Z=X+Y$ et $W=X-Y$.
- ✓ Déterminer les probabilités $p(z)$ et $p(w)$. Z et W sont-elles indépendantes?

5. Soient X et Y deux v.a. indépendantes avec $p(x) = a \prod_2(x)$ et $p(y) = a \prod_2(y)$

- ✓ Déterminer et tracer $p(z)$ pour $Z=X+Y$.
- ✓ Si les deux v.a. suivent une loi normale centrée et réduite, déterminer $p(z)$.
- ✓ Pourquoi appelle la loi Gaussienne la loi normale ? Une v.a. peut-elle avoir une variance nulle ?

6. Soient X et Y deux v.a. telles que $p(x,y)=e^{-(x+y)}$ pour $x>0$ et $y>0$. Déterminer les probabilités individuelles $p(x)$ et $p(y)$ et en déduire les moyennes et variances des v.a. X et Y .

Soient les Z et W des v.a. telles que $Z=X+Y$ et $W=X/Y$. Montrer que la probabilité conjointe $p(z,w)$ vaut $e^{-z} \frac{z}{(1+w)^2}$ Z et W sont-elles indépendantes? Sont-elles décorrélées?

On suppose que $V=-2X+1$. Calculer la moyenne et la variance de la v.a. V puis calculer C_{xv} . X et V sont-elles indépendantes? Justifier

7. Soient X et Y 2 v.a. Gaussiennes centrées de variance unité et soient 2 autres variables aléatoire R et θ tels que $X=R\cos\theta$ et $Y=R\sin\theta$. Les 2 v.a. R et θ sont-elles indépendante ? décorrélées? (Justifier)

Solutions

4. Voir interro 1 S2 2105/2016 5. Voir interro 1 S1 2013/2014
6. Voir interro 1 S2 2106/2017 7. Voir interro 1 S1 2107/2018

TP n°2 : Variables et Vecteurs Aléatoires (Sous Matlab)

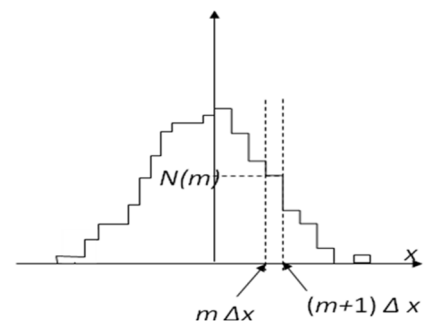
Rappels

Un générateur de nombres aléatoires dans l'intervalle $[0, 1]$ est une fonction `rand` qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- un appel à la fonction **rand** donne une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.
Pour générer une loi uniforme sur $[a, b]$, on écrit $a+(b-a)*\text{rand}(N,1)$
- les appels successifs à la fonction `rand` fournissent une réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes.

➤ Pour générer une loi Gaussienne de moyenne M et variance V : $M+\text{sqrt}(V)*\text{randn}(N,1)$

- **s=sum(X)** Calcule la somme des composantes de X .
- **m=mean(X)** Calcule la moyenne empirique de X
- **v=var(X)** Calcule la variance empirique.
- **sigma=std(X)** Calcule l'écart-type empirique de X
- **hist (X,NC):** Trace un histogramme non normalisé de X sur NC intervalles. Soit une suite finie de points issus de la réalisation d'une VA X avec $X_{\min}$ =valeur minimale de la suite de valeurs et $X_{\max}$ =valeur maximale de la suite de valeurs. On partage le segment $[X_{\min}, X_{\max}]$ en NC classes équidistantes et on compte le nombre de valeurs dans chaque classe, on a alors une estimation de la densité de probabilité:



Remarques :

Sous Matlab au début d'un programme, on peut initialiser le générateur en lui fournissant la première valeur appelée la graine du générateur `rand('state',sum(100*clock))`. Sinon, à chaque fois que l'on démarre Matlab, c'est la même suite de valeurs qui sera donnée.

Matlab dispose d'une boîte à outils Statistics Toolbox qui contient des fonctions prédéfinies permettant de simuler des réalisations de variables de la plupart des lois usuelles. On sert de la fonction dont le nom est obtenu en ajoutant au nom de la distribution le suffixe `rnd` : `distrnd`. Ainsi, pour la loi exponentielle ce sera `expnrnd`, pour poisson (`poissrnd`), etc.

Exercice 1

On veut simuler le lancer d'un dé avec 60 jets. Donner la loi de probabilité puis la fonction de répartition et calculer la moyenne et la variance théoriques.

```
clc; clear all; close all;
N=60; NC=6;
X=1+6*rand(N,1); X=floor(X);
figure; plot(X); %plot(X,'*');
mm=mean(X); vv=var(X);
figure; hist(X,NC)
A=hist(X,NC)/N;
Figure ; plot(A) ;
```

1. Prendre $N=6$ puis 12 puis 6000 puis 60000 et commenter l'histogramme
2. Quelle est l'effet de l'augmentation de N sur la moyenne et la variance estimées.
3. Peut-on considérer que l'histogramme représente la densité de probabilité?
4. Utiliser `cumsum` pour tracer la fonction de répartition $Y=\text{cumsum}(A)$; `figure` ; `plot(Y)` ;

Exercice 2

En vous servant de `randn`, écrire un programme permettant de simuler une loi gaussienne représentant les notes de 1000 étudiants. Utiliser différentes valeurs de NC (10, 50 et 100) et commenter.

Exercice 3

On veut vérifier le théorème central limite. Pour cela, on crée une matrice A dont chaque ligne représente un échantillon d'une loi uniforme.

1. Créer la matrice $A=\text{rand}(12,1000)$, et un vecteur x de taille 1000 dont les composantes représentent la moyenne de chaque colonne de A .
2. Vérifier que chaque ligne de A suit une loi uniforme en traçant leurs histogrammes sur 50 valeurs ($NC=50$) en employant une boucle.
3. Utiliser `hist(x,NC)` pour visualiser la loi de x . A quoi la loi de x ressemble-t-elle?

Exercice 4

Ecrire un programme de générer une loi X une v.a ayant une densité de probabilité uniforme pour $0 \leq x \leq 1$ ($N=10000$) et nulle ailleurs ; et soit Y une v.a indépendante de X et de densité de probabilité uniforme pour $0 \leq y \leq 1$ et nulle ailleurs. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$,

1. Sachant que $p_Z(z) = p_X(x) * p_Y(y)$, montrer théoriquement que $p_Z(z)$ aura l'allure d'un triangle
2. Vérifier par `hist` que c'est le cas.

Exercice 5

On modélise fréquemment la durée de vie d'un composant électronique par une loi exponentielle. On suppose que la durée de vie, en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda=1/100$.

1. Donner sa moyenne et sa variance théorique
2. Utiliser `X = exprnd(1/λ,N,1)` pour générer cette loi. Tracer sa loi.
3. Utiliser `mean` pour déterminer la durée de vie moyenne d'une ampoule.

Exercice 6

Soit φ une v.a. uniforme entre 0 et 2π et soit $X=\cos(\varphi)$ et $Y=\sin(\varphi)$

1. Déterminer théoriquement $p(x)$ et $p(y)$ puis tracer les lois de X et Y avec `matlab` et commenter
2. Calculer leurs moyennes et variances théoriques puis empiriques.
3. Utiliser `corr2` pour déterminer le coefficient de corrélation.
4. X et Y sont-elles décorréliées? Sont-elles indépendantes?.
4. Reprendre ces questions en considérant $Y=aX+b$ avec $a=2$ et $b=3$ puis $a=-4$. Conclure.

TP n°2 : Variables et Vecteurs Aléatoires (Sous Python)

Rappels

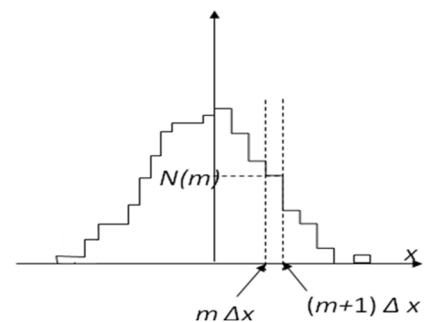
Un générateur de nombres aléatoires dans l'intervalle $[0, 1]$ est une fonction `rand` qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- un appel à la fonction **numpy.random.uniform** (a,b, N) donne une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a,b]$.
- les appels successifs à la fonction **numpy.random.uniform** fournissent une réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour générer une loi Gaussienne de moyenne M et variance V : $V * \text{numpy.random.randn}(N) + M$

Pour générer une loi exponentielle de paramètre Landa : **numpy.random.exponential**(Landa,N)

- **sum(X)** Calcule la somme des composantes de X .
- **numpy.mean(X)** Calcule la moyenne empirique de X
- **numpy.var(X)** Calcule la variance empirique.
- **numpy.std(X)** Calcule l'écart-type empirique de X
- **numpy.histogram (X, bins):** Trace un histogramme non normalisé de X sur 'bins' intervalles. Soit une suite finie de points issus de la réalisation d'une VA X avec $X_{\min}$ =valeur minimale de la suite de valeurs et $X_{\max}$ =valeur maximale de la suite de valeurs. On partage le segment $[X_{\min}, X_{\max}]$ en 'bins' classes équidistantes et on compte le nombre de valeurs dans chaque classe, on a alors une estimation de la densité de probabilité:



Remarques :

- ✓ Sous Python au début d'un programme, on peut initialiser le générateur en lui fournissant la première valeur appelée la graine du générateur `numpy.random.seed(nbre)`. Sinon, à chaque fois que l'on démarre Python, c'est la même suite de valeurs qui sera donnée.
- ✓ Python dispose d'une classe **stats** de la bibliothèque **scipy** (**scipy.stats**) qui contient des fonctions prédéfinies permettant de simuler des réalisations de variables de la plupart des lois usuelles ainsi que de nombreuses fonctions statistiques.

Exercice 1

On veut simuler le lancer d'un dé avec 60 jets. Donner la loi de probabilité puis la fonction de répartition et calculer la moyenne et la variance théoriques.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
N = 60; a = 1 ; b = 6 ;
X = np.random.randint(a,b+1,N) ;
plt.figure(1); plt.stem(X,use_line_collection=True); plt.grid(True);
plt.title("lancer du dé")
bins=(b-a)+1; I = np.linspace(a,b,bins)
(P,J) = np.histogram(X,bins);
plt.figure(2); plt.subplot(211); plt.stem(I,P,use_line_collection=True);
plt.grid(True);
plt.subplot(212); plt.hist(X, bins, density = True)
mu=np.mean(X); vv=np.var(X) ; vvv=np.std(X)
```

1. Prendre $N=6$ puis 12 puis 6000 puis 60000 et commenter l'histogramme
2. Quelle est l'effet de l'augmentation de N sur la moyenne et la variance estimées.
3. Peut-on considérer que l'histogramme représente la densité de probabilité?
4. Utiliser `np.cumsum` pour tracer la fonction de répartition

```
F=np.cumsum(P/N);
```

```
plt.figure(3); plt.stem(I,F,use_line_collection=True); plt.grid(True);
```

Exercice 2

En vous servant de `np.random.randn`, écrire un programme permettant de simuler une loi gaussienne représentant les notes de 1000 étudiants. Utiliser différentes valeurs de bins (10, 50 et 100) et commenter.

Exercice 3

On veut vérifier le théorème central limite. Pour cela, on crée une matrice A dont chaque ligne représente un échantillon d'une loi uniforme.

1. Créer la matrice $A = \text{np.random.uniform}(a,b,(12,1000))$, et un vecteur X de taille 1000 dont les composantes représentent la moyenne de chaque colonne de A : `np.mean(A, 0)`
2. Vérifier que chaque ligne de A suit une loi uniforme en traçant leurs histogrammes sur 50 valeurs (bins=50) en employant une boucle.
3. Utiliser `np.histogram(X,bins)` pour visualiser la loi de X . A quoi la loi de X ressemble-t-elle?

Exercice 4

Ecrire un programme de générer une loi X une v.a ayant une densité de probabilité uniforme pour $0 \leq x \leq 1$ ($N=10000$) et nulle ailleurs ; et soit Y une v.a indépendante de X et de densité de probabilité uniforme pour $0 \leq y \leq 1$ et nulle ailleurs. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$,

1. Sachant que $p_Z(z) = p_X(x) * p_Y(y)$, montrer théoriquement que $p_Z(z)$ aura l'allure d'un triangle
2. Vérifier par `np.histogram` que c'est le cas.

Exercice 5

On modélise fréquemment la durée de vie d'un composant électronique par une loi exponentielle. On suppose que la durée de vie, en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda=1/100$.

1. Donner sa moyenne et sa variance théorique
2. Utiliser `X = numpy.random.exponential(1/Landa,N)` pour générer cette loi. Tracer sa loi.
3. Utiliser `np.mean` pour déterminer la durée de vie moyenne d'une ampoule.

Exercice 6

Soi φ une v.a. uniforme entre 0 et 2π et soit $X=\cos(\varphi)$ et $Y=\sin(\varphi)$

1. Déterminer théoriquement $p(x)$ et $p(y)$ puis tracer les lois de X et Y et commenter.
2. Utiliser `plt.scatter(X, Y)`
2. Calculer leurs moyennes et variances théoriques puis empiriques.
3. Utiliser `np.corrcoef(X, Y)` pour déterminer le coefficient de corrélation.
4. X et Y sont-elles décorréliées? Sont-elles indépendantes?.
4. Reprendre ces questions en considérant $Y=aX+b$ avec $a= 2$ et $b=3$ puis $a= - 4$. Conclure.