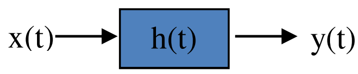
Chapitre IV : Filtrage linéaire des signaux aléatoires

Un signal aléatoire est amené à être transmis, analysé, transformé, etc. Conserve-t-il son caractère aléatoire? sa stationnarité ? Que deviennent sa moyenne et son auto-corrélation statistiques lors d'un filtrage linéaire. On examinera la transformation des caractéristiques du signal dans le domaine fréquentiel qui permettra d'aborder la notion de filtre formeur. Ces connaissances nous permettront d'envisager une application directe qui est le filtrage optimal et adapté.

1. Processus aléatoires et SLIT

Soit un système linéaire et invariant dans le temps (SLIT) défini par sa réponse impulsionnelle h(t) ou sa fonction de transfert H(f) :



Rappelons que la réponse du système linéaire et invariant à un signal quelconque déterministe est donnée par :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Cette expression implique que si x(t) est un signal aléatoire, le signal en sortie y(t) est forcément un signal aléatoire puisque la sortie est une somme pondérée de l'entrée. Il faudra donc caractériser y(t) de manière statistique, de même que pour x(t), en étudiant les grandeurs statistiques déjà vues au chapitre précédent.

Moyenne et autocorrélation statistiques de y(t)

Supposons que x(t) est un processus aléatoire, la moyenne μy(t) du signal de sortie (aléatoire aussi) peut se calculer par :

$$\mu_y(t) = E\{y(t)\} = E\{x(t) * h(t)\} = E\left\{\int h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right\}$$
$$= \int h(\tau)E\{x(t-\tau)\}d\tau = \int h(\tau)\mu_x(t-\tau) = h(t) * \mu_x(t)$$

De la même façon, on peut calculer l'auto-corrélation statistique de y(t) soit R_y (t1,t2):

$$R_y(t_1,t_2) = E\{y(t_1)y^*(t_2)\} = E\{x(t_1) * h(t_1).x^*(t_2) * h^*(t_2)\} = E\left\{\int h(\tau_1)x(t_1-\tau_1)d\tau_1 \int h^*(\tau_2)x^*(t_2-\tau_2)d\tau_2\right\}$$
$$= \int\int h(\tau_1)h^*(\tau_2)E\{x(t_1-\tau_1)x^*(t_2-\tau_2)\}d\tau_1 d\tau_2$$

Si x(t) est stationnaire au sens large (SSL) alors:

- La moyenne statistique de y(t) devient :

$$\mu_y(t) = \int h(\tau)\mu_x(t-\tau)d\tau = \int h(\tau)\mu_x d\tau = \mu_x \int h(\tau)d\tau = \mu_x H(0) \qquad (f=0)$$

- La corrélation statistique de y devient :

$$R_y(t_1,t_2)=\iint h(\tau_1)h^*(\tau_2)E\{x(t_1-\tau_1)x^*(t_2-\tau_2)\}d\tau_1 d\tau_2$$
$$=\iint h(\tau_1)h^*(\tau_2)R_x(\tau-\tau_1+\tau 2)d\tau_1 d\tau_2 = fct(\tau)=R_y(\tau)$$

Ainsi, si le signal d'entrée est stationnaire au sens large (SSL) alors le signal de sortie sera aussi SSL

Sachant que $f(\tau)*h(\tau)=\int f(\tau_2)h(\tau-\tau_2)d\tau_2=\int f(\tau-\tau_2)h(\tau_2)d\tau_2$

Alors $f(\tau)*h(-\tau)=\int f(\tau_2)h(\tau_2+\tau)d\tau_2=\int f(\tau+\tau_2)h(\tau_2)d\tau_2$

C'est ainsi que $R_y(\tau)=R_x(\tau)*h(\tau)*h^*(-\tau)$

Densité spectrale

En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres de l'équation précédente, la densité spectrale de puissance est obtenue :

$$S_y(f)=TF(R_y(\tau))=TF\left(R_x(\tau)*h(\tau)*h^*(-\tau)\right)=S_x(f).H(f).H^*(f)=|H(f)|^2 S_x(f)$$

Ainsi, la densité spectrale de puissance du signal de sortie est égale à la densité spectrale de puissance du signal d'entrée multipliée par le carré du module de la réponse en fréquences du système (la phase de H(f) n'intervient pas). C'est une propriété très importante à la base de nombreuses applications dont notamment la notion de filtre formeur et le filtrage optimal.

Par ailleurs, si l'on souhaite calculer la corrélation du signal de sortie en éludant la lourdeur de calcul inhérente au produit de convolution, on calculera la densité spectrale de puissance du signal de sortie et on prendre la transformée de Fourier inverse.

$$R_y(\tau)=TF^{-1}\left(|H(f)|^2 S_x(f)\right)=\int |H(f)|^2 S_x(f)e^{2\pi jf\tau}df$$

La puissance moyenne du signal de sortie est alors obtenue par : $E\{y(t)^2\}=R_y(0)=\int |H(f)|^2 S_x(f)df$

Formule des interférences

Soient y1(t) la sortie d'un système h1(t) dont l'entrée est un signal aléatoire x1(t) et y2(t) la sortie d'un système h2(t) dont l'entrée est un signal aléatoire x2(t). La formule de l'interférence permet de relier l'intercorrélation entre les sorties de deux filtres à celles des entrées de ces filtres:

$$S_{y1y2}(f)=H_1(f)S_{x1x2}(f)H_2^*(f)$$

On a aussi : $R_{xy}(\tau)=R_x(\tau)*h^*(-\tau)\Rightarrow S_{xy}(f)=S_x(f)H^*(f)$

et $R_{yx}(\tau)=R_x(\tau)*h(\tau)\Rightarrow S_{yx}(f)=H(f)S_x(f)$

Exemple 1 : Soit le processus stochastique x(t) SSL de corrélation statistique: $R_x(\tau)=\sigma^2 e^{-\frac{|\tau|}{\theta}}$ et le système linéaire et invariant de réponse impulsionnelle h(t)=5e^{-2t}. On obtient alors:

$$- \mu_y(t)=\mu_x H(0)=0\times \left.\frac{5}{2+2\pi jf}\right|_{f=0} = 0\times 5/2=0$$

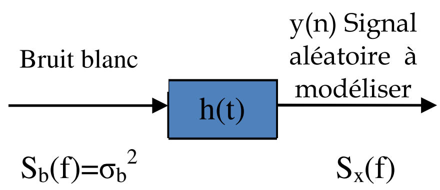
$$- S_y(f)=|H(f)|^2 S_x(f)=\left|\frac{5}{2+2\pi jf}\right|^2 .\ TF\left(\sigma^2 e^{\frac{-|\tau|}{\theta}}\right)=\frac{5.}{4+(4\pi^2 f^2)}.\frac{2\sigma^2\theta}{1+4\pi^2 f^2\theta^2}$$

Exemple 2 :

Considérons par exemple le cas où le signal en entrée est un bruit blanc b(t). Sa DSP est donc une fonction constante. Alors, en sortie, on aura un signal tel que :$S_x(f)$ = constante $|H(f)|^2$

Notion de filtre formeur

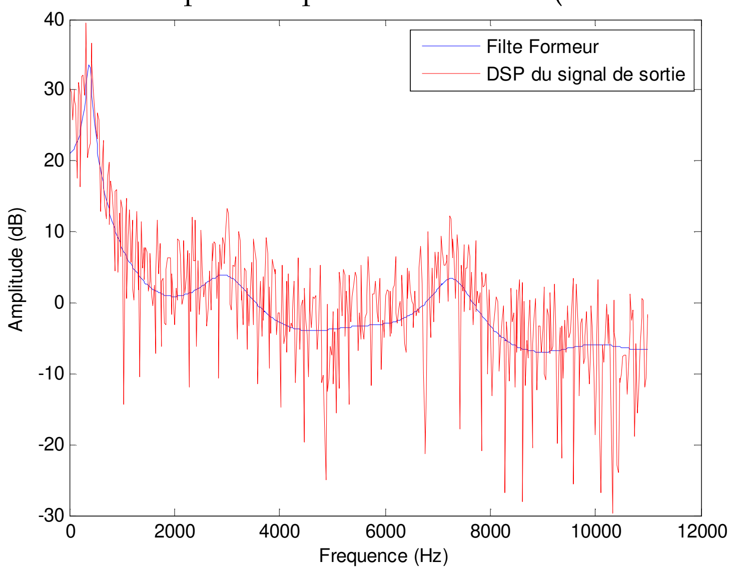
Supposons donné un signal aléatoire x(t): On appelle filtre formeur de x(t); le filtre de fonction de transfert H(f); tel que x(t) est généré par passage d'un bruit blanc b(t) dans H(f).



La détermination du filtre formeur s'effectue en inversant la formule précédente:

$$|H(f)|^2 = S_x(f)/\sigma_b^2$$

On pourra donc décrire le signal aléatoire par les paramètres du filtre et la variance du bruit blanc. En effet, si on fait passer le bruit blanc dans un filtre linéaire et stationnaire à paramètres ajustables et si on obtient le signal désiré (à modéliser) à la sortie du filtre, alors on peut dire que toute l'information spectrale est contenue dans le filtre représenté par ses coefficients (Voir exo 1 du TP n°3)



Remarque :Ainsi le bruit blanc joue pour l'aléatoire l'équivalent de la distribution de Dirac pour le déterministe.

Rappelons que le bruit blanc n'a pas d'existence physique car il serait de puissance infinie. Une approximation du bruit blanc à bande limitée appelé aussi bruit blanc coloré est défini par :

$$S_b(f) = \begin{cases} \sigma_b^2 & |f| < B \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

2. *Application 1: Filtrage adapté et filtrage optimal*

La transmission d'un signal s'accompagne de distorsions (dues aux milieux de transmission) qu'il serait souhaitable d'éliminer ou au moins d'atténuer avant tout traitement ultérieur. Si l'on connait le signal (déterministe) d'origine, on parlera de détection. Dans le cas contraire ou si le signal est aléatoire on emploiera le terme estimation. Il existe de nombreuses approches de détection, on peut, entre autres procéder par filtrage qui permettra de rehausser le signal noyé dans le bruit.

Considérons un signal déterministe x(t) supposé connu, dont on souhaite tester la présence possible dans une observation s(t). Le bruit d'observation est supposé quant à lui stationnaire SSL de densité spectrale $S_b(f)$. On cherche un filtre H(f) qui maximise le SNR à un instant précis T_0.

On suppose donc que le signal utile x(t) est noyé dans un bruit b(t) stationnaire SSL additif, d'où :

s(t) = x(t)+b(t)

On filtre le signal par un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle est h(t). A la sortie du filtre, on obtient un signal :

$y(t) = s(t) * h(t) = x(t)*h(t)+b(t)*h(t) = x_2(t)+ b_2(t)$

A la sortie du filtre et à l'instant T_0, le SNR s'écrit **:** $SNR(T_0) = \dfrac{Puis(x_2(T_0))}{Puis(b_2(T_0))}$

Le but étant de trouver *h(t)*, on va alors exprimer le SNR en fonction de *h(t)* (ou *H(f)*), ainsi :

- Le signal au numérateur $x_2(t)$est déterministe dons sa puissance s'exprime comme suit:

$$Puis(x_2(T_0)) = |x_2(T_0)|^2 = \left|TF^{-1}(X_2(f))\right|^2 = \left|\int X(f)H(f)e^{2\pi jfT_0}df\right|^2$$

- Le signal $b_2(t)$ est issu du filtrage d'un signal aléatoire *b(t)* SSL donc il est aussi SSL, c'est ainsi que sa puissance pourra se formuler comme suit:

$$Puis(b_2(T_0)) = E\left\{|b_2(T_0)^2|\right\} = R_{b2}(\tau=0) = TF^{-1}(S_{b2}(f))\Big|_{\tau=0} = \int S_b(f)\left|H(f)^2\right|df$$

Ainsi, on arrive à exprimer le SNR comme suit :

$$SNR(T_0) = \frac{Puis(x_2(T_0))}{Puis(b_2(T_0))} = \frac{\left|\int X(f)H(f)e^{2\pi jfT_0}df\right|^2}{\int S_b(f)\left|H(f)^2\right|df} \qquad SNR(T_0) = \frac{\left|\int a(f)b^*(f)df\right|^2}{\int a(f)a^*(f)\,df}$$

Que l'on peut écrire aussi, comme étant :

Avec $a(f) = \sqrt{S_b(f)}H(f)$ et $b(f) = X^*(f)e^{-2\pi jfT0} / \sqrt{S_b(f)}$

Pour trouver H(f) qui maximise ce rapport, on fait appel à l'inégalité de cauchy-schwartz:

$$\left|\int a(f)b^*(f)df\right|^2 \leq \int a(f)a^*(f)\,df \quad \int b(f)b^*(f)\,df$$

Ce qui nous donne : $SNR(T_0) = \dfrac{\left|\int a(f)b^*(f)df\right|^2}{\int a(f)a^*(f)\,df} \leq \int b(f)b^*(f)\,df$

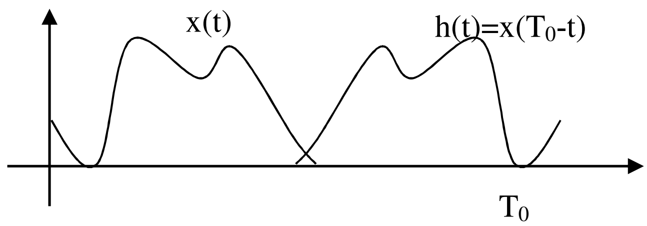
avec égalité (soit le maximum) lorsque *a(f)=kb(f)*⇒ Cette dernière nous fournit l'expression suivante du filtre optimal H(f) :

$$H(f)_{optimal} = k.X^*(f)e^{-2\pi jfT0} / S_b(f)$$

L'expression du SNR devient : $SNR(T_0)_{\max} = \int \dfrac{|X(f)|^2}{S_b(f)}df$ (Ce maximum est indépendant de T_0)

<u>*Cas particulier*</u> *:* Par ailleurs, si le bruit b(n) est blanc, on parle de filtre adapté:

$H(f)_{adaptél} = k / \sigma_b{}^2 X^*(f)e^{-2\pi jfT0}$ donnant $h(t)_{adaptél} = k / \sigma_b{}^2 x^*(T_0 - t)$



La réponse impulsionnelle du filtre représente le signal utile x(t) renversé et décalé de T_0.Le filtrage adapté revient à effectuer l'inter-corrélation entre l'observation et le signal à détecter.

Cette réponse n'est pas causale ce qui ne permet pas de l'appliquer en temps réel. Cependant, ce filtre peut-être appliqué à un signal sauvegardé.

<u>Exemple1</u> : Détection d'une impulsion

Considérons un système émettant une impulsion x(t) rectangulaire de durée T_0 etd'amplitude A. Rec(t) étant la fonction porte égale à un pour t entre -1/2 et 1/2 et nulle ailleurs. Du fait de la parité de cette fonction, le filtre aura la même expression et sera centré en T_0.

<u>Exemple</u> 2 : En sonar ou en radar, on cherche à localiser une « cible ». Cette cible peut être par exempleun bateau ou un avion. Pour cela, on procède de la façon suivante : on émet un signal x(t), qui parcourt la distance *d* jusqu'à la cible, sur laquelle il sera réfléchi en direction d'un récepteur. Le récepteur reçoit alors le signal*y(t)*bruité, atténué (de *a*) et retardédeT_{AR} (voir exo 2 du TP n°3)

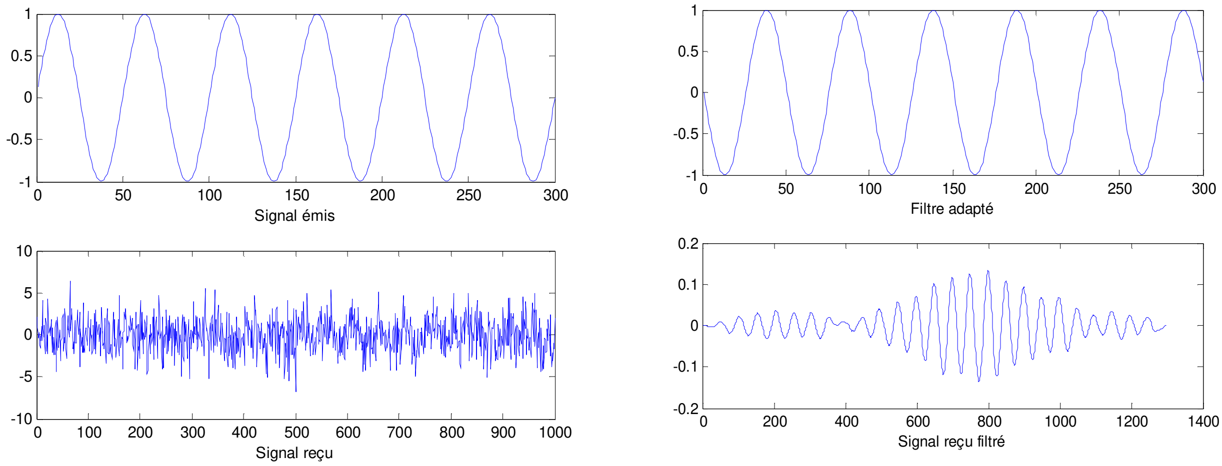
$y(t) = a.x(t - T_{AR}) + b(t)$. où T_{AR} correspondant au temps d'aller-retour ($T_{AR} = 2d/v$)

On utilisera alors comme filtre adapté le filtre adapté à $x(t)$, soi t$h(t) = x^*(T_0 - t)$

La sortie de ce filtre sera l'intercorrélation des signaux $y(t)$ et $x(t)$. On obtient alors :

$R_{yx}(t\text{-}T_0) = a.R_{xx}(t - T_0 - T_{AR}) + R_{bx}(t - T_0)$.

Sachant que l'autocorrélation est maximale en 0, l'intercorrélation sera maximale pour $t = T_0 + T_{AR}$ ce qui nous permettra de déterminerT_{AR}.



Remarques

- Le choix du signal 'x'est important : Il est souhaitable que le max de sa fonction d'autocorrélationR_{xx} soit facile à identifier (pic bien visible comme pour la fonction triangle)

-Dans le cas où le signal est sinusoïdal, le filtre adapté est un passe bande idéal centré sur la fréquence du signal (détection synchrone).

Exercice d'Application (Examen 2014/2015)

Soit $x(t) = 1 - t/T$ avec t $0 \leq t \leq T$

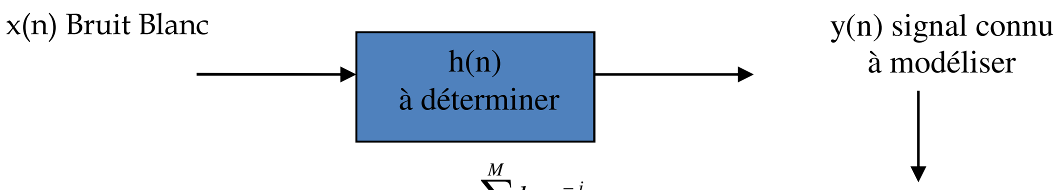
On utilise ce signal pour déterminer la distance d'un objet. Le signal reçu par le recepteur aprèsréflexion sur l'objet est :$y(t) = \alpha x(t - T_D) + b(t)$ où α est une constante réelle positive et$b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance σ^2. On veut maximiser le rapport signal sur bruit

1. Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre $h(t)$ telle que $\int h(t)^2 dt = 1$ (prendre $T_0 = T$).
2. Donner le rapport signal sur bruit après filtrage.
3. Exprimer l'inter-corrélation temporelle $R_{yx}(t - T_0)$ en fonction de l'auto-corrélation de $x(t)$et de l'inter-corrélation des signaux $b(t)$ et $x(t)$
4. Comment déterminer le temps T_D?
5. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le filtrage optimal pour un signal déterministe dont on ignore l'expression?

3. Application 2 : Processus générateurs AR, MA et ARMA

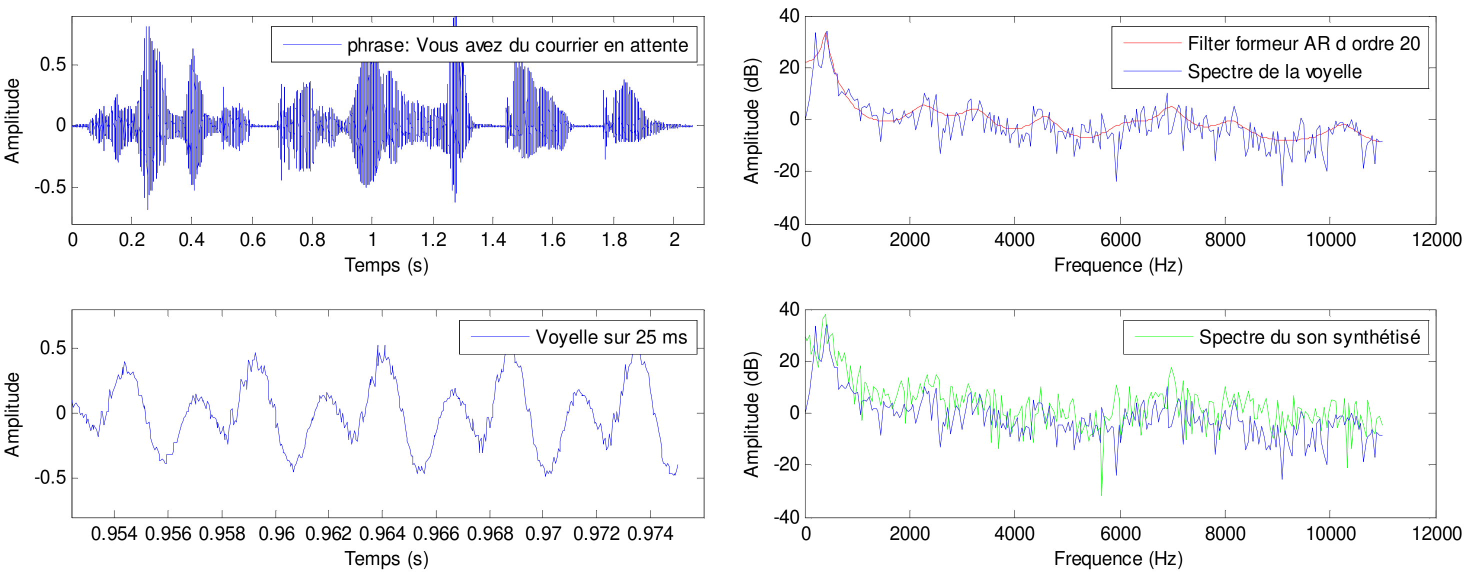
Nous avons vu précédemment qu'un signal aléatoire peut être modélisé (synthétisé) comme la réponse d'un filtre linéaire à une excitation sous forme de bruit blanc tel que $|H(f)|^2 = S_x(f)/\sigma_b^2$. Ce filtre formeur H(f) est aussi dit processus générateur. Ces paramètres associés à la variance du bruit σ_b^2 constituent le modèle mathématique correspondant au signal aléatoire. Le concept de processus générateur de signal a été particulièrement développé et appliqué avec des filtres numériques. Ce sont les modèles de signaux les plus utilisés en traitement statistique du signal (estimation, prédiction...).Selon la nature du filtre, on peut obtenir différents modèles de signaux (AR,MA, ARMA, etc.)

Exemple : Lors d'un appel par GSM (téléphone portable), le portable qui fait office d'un micro- ordinateur regroupant différentes fonctionnalités dont l'analyse, la synthèse, le codage, etc. va nous permettre de modéliser la parole (aléatoire) en opérant un codage LPC par tranches de dizaines de ms. Elle consiste à retrouver les paramètres du filtre formeur *h(n)* pour chaque tranche *y(n)* enregistrée et analysée. Ce sont ces paramètres (a_i et b_j) qui seront transmis pour produire un signal de synthèse approchant le signal original y(n).



$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i}} \qquad\qquad S_y(f) = \sigma_b^2 |H(f)|^2$$

Ci-dessous la phrase "vous avez du courrier en attente" échantillonnée à une fréquence fe =22050 (45531 échantillons) et un zoom sur une voyelle de durée 25 ms (500 échantillons).



En comparant l'allure du filtre formeur H(f) à celle de Sy(f), on note que l'on retrouve l'allure générale du spectre de la voyelle, notamment les fréquences dont la puissance est maximale. Sachant que le spectre de la voyelle comporte 500 valeurs et que le filtre H(f) équivalent est obtenu à partir de 20 coefficients, il vaut mieux transmettre 21 coefficients (20 a_i + variance du bruit) que 500 valeurs.

C'est ainsi que les modèles autorégressifs sont d'un emploi de plus en plus répandu en traitement du signal : codage et transmission par prédiction linéaire, synthèse de parole, reconnaissance, etc.

Remarque : Le signal de parole est un processus aléatoire non-stationnaire à long terme, mais il est considéré comme stationnaire dans des fenêtres temporelles d'analyse de l'ordre de 20 à 30ms. Cette propriété de stationnarité à court terme permet donc une analyse et modélisation progressive du signal de parole Pour éviter toutes pertes d'information, on veillera à prendre des fenêtres chevauchantes.

Modèle auto-régressif (AR)

Les signaux autorégressifs sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre purement récursif. Ce filtre est donc de réponse impulsionnelle infinie.

$$H(z) = 1 \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}\right)$$

A partir de H(z), on peut déterminer l'équation aux différences : $y(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)$

Cela signifie que le signal y(n) est supposé être prédictible en fonction d'un certain nombre de ses valeurs antérieures.

Sachant que x(n) est un bruit blanc alors d'où $R_x(k) = \sigma^2 \delta(k)$

- $\mu_x = E\{x(n)\} = 0$
- $R_{xx}(0) = E\{x(n)^2\} = \sigma^2$
- $R_{xx}(k) = E\{x(n)x(n-k)\} = 0 \quad pour \quad k \neq 0$

Calculons alors $R_{yy}(k)$

$$R_{yy}(k) = E\{y(n)\,y(n-k)\} = E\{x(n)\,y(n-k)\} - \sum_{i=1}^{N} a_i E\{y(n-i)\,y(n-k)\}$$

$$= E\left\{x(n)\sum_{k'} x(n-k-k')\,h(k')\right\} - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i) = \sum_{k'} E\{x(n)x(n-k-k')\}h(k') - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$$

$$= \sum_{k'} R_{xx}(k+k')\,h(k') - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i) = R_{xx}(k)h(0) + R_{xx}(k+1)h(1) + ... - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$$

-Si k=0, $R_{yy}(0) = R_{xx}(0).h(0) - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(-i) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$

- Pour k=1 à N, $R_{yy}(k) = 0 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$

On peut utiliser une forme matricielle : R. $\underline{a}$ = $\underline{S}$ (Rappelons que pour un signal réel $R_{yy}(k)=R_{yy}(-k)$

$$\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & \ldots\ldots & R_{yy}(N) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & \ldots\ldots & R_{yy}(N-1) \\ & & \ldots\ldots & \\ R_{yy}(N) & R_{yy}(N-1) & \ldots\ldots & R_{yy}(0) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ . \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

R est la matrice d'autocorrélation dont le terme général r_{ij} ne dépend que de la différence *i-j* (Matrice de Toeplitz). La résolution de ces équations dite de Yule-Walker permet de connaître les paramètres du filtre et la variance du bruit blanc.

Remarques :

- Nous ne disposons pas d'un processus aléatoire mais d'une seule réalisation soit *y(n),* il n'est pas donc pas possible de calculer l'auto-corrélation statistique $R_{yy}(k)$. Cette dernière sera remplacée par l'autocorrélation temporelle en faisant l'hypothèse que le processus est ergodique (voir exo 1 du TP n°4).

- Il existe divers algorithmes (Burg, Levinson) qui permettent d'estimer assez rapidement les a_i et σ sans passer par l'inversion matricielle. Tout comme il est possible de déterminer l'ordre N adéquat (critère AIC).

Exemple d'application

1. On considère le modèle auto-régressif (AR) d'ordre 1 tel que : $x(n)=-a_1.x(n-1)+b(n)$

- Déterminer les équations de Yule-Walker pour ce modèle
- En supposant que x(n) est connu, déterminer les paramètres du modèle.
- Déterminer les $R_x(k)$ (les $a_i$sont supposés connus)

Réponses :

- ($a_1=-Rx(1)/Rx(0)$ $\sigma^2=Rx(0)(1-a_1^2)$)
- ($Rx(0)= \sigma^2/(1-a_1^2)$ $Rx(1)=-a_1\sigma^2/(1-a_1^2)$$Rx(k)=(-a_1)^k\sigma^2/(1-a_1^2)$)

2. Refaire le même travail pour un modèled'ordre 2 tel que : $x(n)=-a_1.x(n-1)-a_2.x(n-2)+b(n)$

Réponses :

- $a_1=Rx(1)[Rx(2)-Rx(1)]/[Rx(0)^2-Rx(1)^2]$ $a_2=[Rx(1)^2-Rx(0)Rx(2)]/[Rx(0)^2-Rx(1)^2]$
- $\sigma^2=Rx(0)+Rx(1)^2[Rx(2)-Rx(0)]/[Rx(0)^2-Rx(1)^2]+Rx(2)[Rx(1)^2-Rx(0)Rx(2)]/[Rx(0)^2-Rx(1)^2]$
- $Rx(1)=-a_1Rx(0)/(a_2+1)$ $Rx(2)=(-a_2+a_1^2/(1+a_2))Rx(0)$$Rx(0)=(1+a_2)\sigma^2/(1+a_2- a_1^2–a_1^2-a_2^3+a_2a_1^2)$

Modèle à moyenne ajustée (MA)

Les signaux à moyenne mobile sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre purement transverse.

Ce filtre est aussi appelé filtre à réponse impulsionnelle finie : $H(z)=\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}$

Le signal *y(n)* est supposé pouvoir s'écrire comme une combinaison linéaire d'échantillons décorrélés entre eux, ce qui peut se formaliser comme une combinaison linéaire d'échantillons d'un bruit blanc *x(n).*

On a donc : $y(n)=\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i)$

et $\mu_y = E\{y(n)\} = \sum_{i=0}^{M} b_i \mu_x = \mu_x \sum_{i=0}^{M} b_i = \mu_x . H_f(0)$

On cherche les paramètres du filtre qui génèrent y(t) à partir de x(t), bruit blanc centré :

$$R_{yy}(k) = E\{y(n)y(n-k)\} = E\left\{\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i).\sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j-k)\right\}.$$

$$R_{yy}(k) = \sum_{i=0}^{M} b_i.\sum_{j=0}^{M} b_j E\{x(n-i).x(n-j-k)\} = \sum_{i=0}^{M} b_i.\sum_{j=0}^{M} b_j R_{xx}(j+k-i)$$

- Si j+k≠i $\Rightarrow R_{yy}(k)=0$
- Sinon $\Rightarrow R_{yy}(k)=\sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$

Le problème est non linéaire en fonction des coefficients, il faut un algorithme de programmation non linéaire pour obtenir b_i à partir des R_{yy} *(k*). Cependant, l'algorithme de Durbin permet d'approcher la solution optimale avec de bons résultats. Le principe de cet algorithme consiste à identifier le modèle MA d'ordre M avec un modèle AR d'ordre N>>M (voir exo 2 du TP n°4). En effet, tout modèle MA peut être identifié à un modèle AR d'ordre infini: $\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} = 1/\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}$

Exemple

On considère le modèle à moyenne ajustée (MA) :

A. d'ordre 1 tel que x(n)=e(n)+b_1. e(n-1)

- Calculer μ_x.
- En supposant que x(n) est connu, déterminer les paramètres du modèle.
- Connaissant les paramètres du modèle, déterminer les R_x(k)

B. d'ordre 2 tel que : $x(n)=e(n)+b_1.\ e(n-1)+b_2.\ e(n-2)$

- Calculer μ_x.
- Connaissant les paramètres du modèle, déterminer les $R_x(k)$

Réponses

$\mu_x = 0$ $Rx(0)=(1+ b_1^2).\sigma^2$ $Rx(1)=b_1.\sigma^2$ $Rx(k)=0$ pour $k\geq 2$

$b_1=(Rx(0)\pm sqrt(Rx(0)^2-4Rx(1)^2)/2Rx(1)$ $\sigma^2=2/(Rx(0)\pm sqrt(Rx(0)^2-4Rx(1)^2)$

$Rx(0)=(1+ b_1^2+ b_2^2).\sigma^2$ $Rx(1)=(b_1+ b_1\ b_2).\sigma^2$ $Rx(2)=b_2.\sigma^2 Rx(k)=0$ pour $k\geq 3$

<u>*Remarque*</u> : Il est très important de remarquer que nous ne disposons que d'une seule réalisation du signal aléatoire à modéliser *y(n)*, de ce fait l'auto-corrélation statistique $R_{yy}(k)$ est obtenu de l'auto-corrélation temporelle en considérant le processus ergodique.

Modèle ARMA

Les signaux ARMA sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre récursif appelé aussi filtre à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I). Ces signaux sont une combinaison des signaux AR etMA. La fonction de transfert du filtre présente un numérateur et un dénominateur:

Soit $y(n) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)$ $\qquad H(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} \Big/ \left(1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}\right)$

La corrélation statistique de y(n) s'écrit alors : $R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i) + \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$

C'est une équation non linéaire en a_i et b_j.

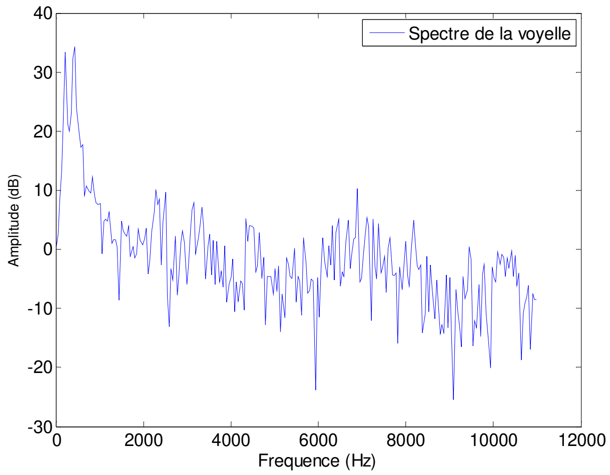
La modélisation ARMA peut se décomposer en une modélisation AR suivie d'une modélisation MA. Le modèle AR présente une simplicité de calcul par rapport aux modèles MA et ARMA du fait où les coefficients AR sont solutions d'un système linéaire d'équations. Alors que la détermination des coefficients MA et ARMA requiert la résolution d'équations non linéaires. Cependant, le modèle ARMA permet de modéliser aussi bien les minima que les maxima de la DSP et est donc moins restrictif que le modèle AR.

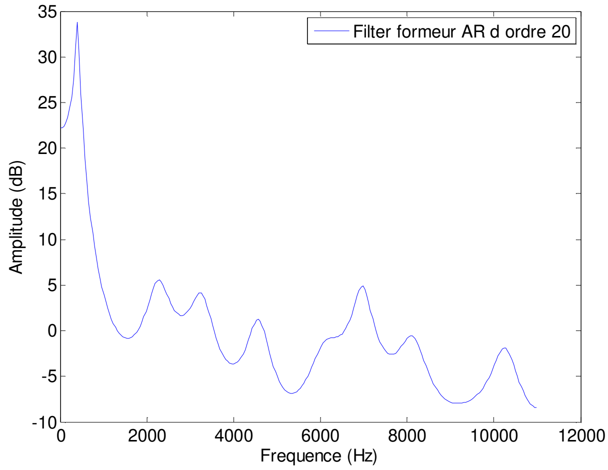
Les applications des modèles AR, MA, ARMA sont nombreuses, entre autres :

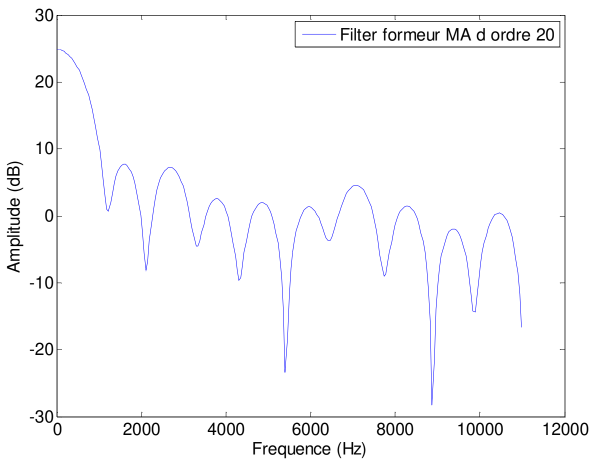
- la modélisation et la prédiction de série temporelle dite séries chronologiques Une série chronologique est une suite formée d'observations au cours du temps que l'on cherche à modéliser pour la prédiction de données futures. Ainsi, en finance, cela permet de modéliser le cours des devises ou du pétrole. Alors qu'en météorologie, les cela permet de faire des prévisions sur la température ou les précipitations. Dans chacun des cas, on essaiera à partir d' un échantillon de données de construire le meilleur modèle qui s'ajuste ces données.

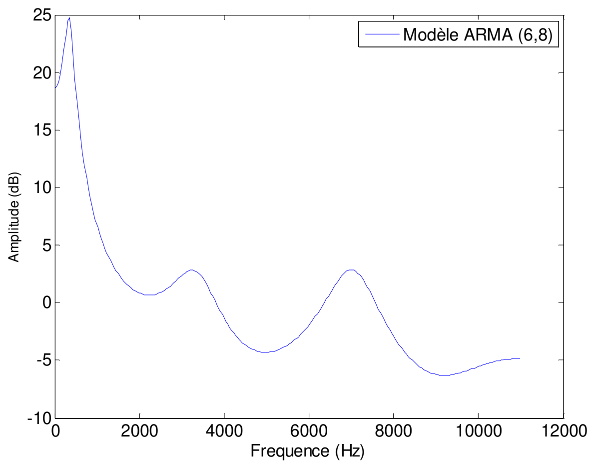
- l'estimation du spectre d'un signal aléatoire, etc. Cette dernière application est basée sur l'identification des paramètres du modèle considéré: Le modèle AR est bien adapté aux signaux composés de raies pures dans du bruit blanc. Alors que le modèle MA est bien adapté aux signaux dont la puissance est nulle dans certaines bandes de fréquences.

Exemple : Reprenons à nouveau l'exemple de parole, pour lequel, nous avons testé les trois variantes





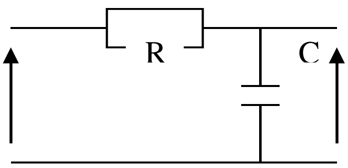




Nous n'irons pas plus loin, dans le cadre de ce cours, le but n'étant que d'introduire les notions de modélisation et prédiction linéaire.

TD n° 4 : Filtrage et Modélisation des signaux aléatoires

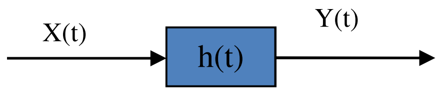
1. L'entrée x(t) du circuit est un bruit blanc de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \sigma_x^2\delta(\tau)$



- Déterminer la densité spectrale de la sortie y(t), notée $S_y(f)$
- Déterminer la fonction d'autocorrélation de la sortie y(t), notée $R_y(\tau)$ ainsi que sa puissance
- Remplacer R par une self L et C par une résistance et reprendre les questions

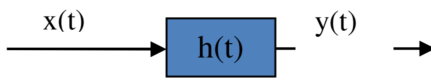
2. Soit X(t) = A + b(t) un signal réel aléatoire, où A est une constante réelle et b(t) est un bruit blanc de densité spectrale de puissance σ_b^2, et soit un filtre moyenneur de réponse impulsionnelle:

$$h(t) = \frac{1}{T}\prod_T (t - T/2)$$



- Exprimer l'autocorrélation statistique du signal d'entrée $R_{xx}(t,\tau)$. X(t) est-il SSL ?
- Déterminer la moyenne statistique de y(t).
- Montrer que $R_{yy}(\tau) = \frac{\sigma^2}{T}\Lambda_T(\tau) + A^2$ et en déduire σ_y et μ_y.
- Prendre A=2 et tracer X(t) et Y(t).

3. On considère le schéma ci-contre où x(t)=s(t)+b(t) avec s(t) = $\prod_1(t)$ et b(t) est un bruit blanc Gaussien centré de variance 1



- Déterminer la densité de probabilité de x(t) . x(t) est-il SSL ?

On considère b'(t) et s'(t) les sortes correspondant respectivement à b(t) et s(t).

- Calculer $S_{b'}(f)$ et $S_{s'}(f)$ en fonction de H(f)

On veut maximiser le rapport signal sur bruit (SNR):

- Déterminer et tracer h(t) pour k=2 et T_0=2.Calculer alors le SNR.
- Quelle loi de probabilité suit y(t) (justifier).
- Donner un exemple concret de l'utilisation de ce type de filtre
- Si s(t) est déterministe et inconnu, quel filtre utilise-t-on ?

4. On dispose d'un signal reçu qui est la version bruitée, retardée et atténuée d'un signal d'intérêt s(n). Le bruit b(n) est supposé blanc gaussien de variance σ^2. Le problème est de déterminer l'amplitude A et le retard $n_0$dans le signal reçu x(n) = A.s(n -n_0) + b(n). Sachant que le rapport signal-à-bruit est maximum en sortie du filtre adapté de réponse h(n) = s(-n).

- Vérifier que la sortie y(n) de ce filtre s'exprime comme la somme de deux fonctions de corrélation.
- Calculer la variance $\sigma_{b'}^2$du bruit de sortie.
- On prend pour s(n) une impulsion rectangulaire de largeur L, traceralors un exemple de signal reçu et de sortie du filtre adapté.

5. Soit le signal aléatoire x(t) SSL dont la DSP est donnée par Sx(f)=$\sigma^2 B \prod_B(f)$

- Déterminer l'autocorrélation statistique de x(t)
- En déduire la moyenne et la variance statistique de x(t).

Ce signal est transmis à travers un SLIT dont la fonction de transfert H(f) = $\prod_A(f)$ avec A <B

- Le signal de sortie est-il aléatoire? (Justifier) SSL? (Justifier)
- Déterminer Sy(f) et en déduire Ry(τ) puis les moments statistiques d'ordre 1 de y(t).

6. Soit un signal aléatoire y(n) SSL et ergodique dont l'autocorrélation temporelle $\overline{R}_y(k) = \alpha^{|k|}$ avec $0<\alpha<1$

- Identifier le modèle linéaire adéquat (AR ou MA) pour y(n).
- En supposant que le système h(n) est filtre purement récursif, donner le schéma du modèle en définissant l'entrée, le système, et la sortie.
- Rappeler les hypothèses nécessaires liées à l'emploi de ce modèle.
- On considère que le modèle est d'ordre 1, déterminer ses paramètres.

7. On considère le filtre linéaire à temps discret défini par $y(n) = x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$.
où X(n) et Y (n) désignent respectivement les processus aléatoires réels d'entrée et de sortie du filtre où b1 et b2 sont 2 coefficients réels. On suppose que x(n) est une suite de variables aléatoires centrées**,** indépendantes et de varianceσ^2**.**

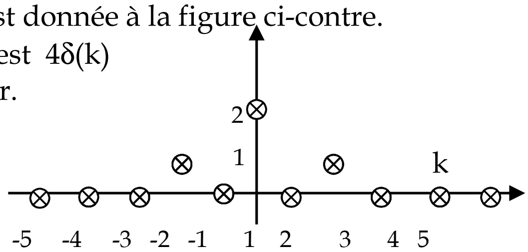
- Donner l'expression de Rx(k) et Sx(f) puis donner l'expression de Ry(k) et tracer la pour $b_1=1$ et $b_2=-1$.
- Connaissant la DSP du signal y(n), sur quoi se base-t-on pour le choix du modèle ?

8. Soit un processus AR défini par : $y(n)=-a_1\, y(n-1) - a_2\, y(n-2) + x(n)$ où x(n) bb décorrélé de variance 1

- Calculer $\mu_y(n)$ puis sans calcul, expliquer pourquoi y(n) est SSL.
- Montrer que pour k>0, $Ry(k)=-a_1\, Ry(k-1)-a_2\, Ry(k-2)$
- Déterminer $a_1$et a_2

9. On veut modéliser le signal y(n) dont l'autocorrélation statistique est donnée à la figure ci-contre.
Ry(k). On suppose que l'autocorrélation statistique du signal d'entrée est 4δ(k)

- o Déterminer les moments statistiques d'ordre 1 du signal à modéliser.
- o S'agit-il d'un modèle AR ou MA? Justifier
- o Déterminer l'ordre du modèle
- En supposant que 2 coefficients sont égaux, à partir des valeurs de Ry(k), déduire que l'un des coefficients est nul puis déterminer les coefficients de ce modèle puis donner l'équation aux différences liant y(n) et x(n)



Solutions

1. $H(f)=1/(1+2\pi jfRC)$, $S_y(f)= \sigma_x^2/(1+4(\pi fRC)^2 R_y(\tau)=\sigma_x^2/2RC\, e^{-|\tau|/RC}$, $P=R_y(0)=\sigma_x^2/2RC$, interro1 16/17

2.$R_{xx}(t,\tau)=A^2+\sigma_b^2\delta(\tau)=fct(\tau)$ $\mu_x(t)=A \Rightarrow SSL$ $H(f)=sinc(fT)e^{-\pi jfT}$ $\mu_y(t)=A$ filtre moyenneur

3. x(t) Gaussien de moyenne s(t) et de variance 1. x(t) non stationnaire $S_{b'}(f)=|H(f)|^2$ $S_{s'}(f)=|H(f)^2|sinc^2(f)$
h(t)= $2\prod_1(2-t)$ SNR=1 y(t) Gaussien Radar ou Sonar Passe-bas (moyenneur)

4.$y(n)=A.R_s(n-n_0)+ R_{bs}(n)$ $\sigma_{b'}^2=R_{b'}(0)$ $S_{b'}(f)=\sigma_b^2|H(f)|^2 \Rightarrow R_{b'}(0)=\sigma_b^2 \int_{-1/2}^{1/2} |H()f|^2 df$

5. $R_x(\tau)=\sigma^2 B^2 sinc(B\tau)$,$\mu_x=0$,$\sigma_x^2=\sigma^2 B^2$, x(t) SSL+h(t) SLIT⇒y(t) SSL, $S_y(f)= \sigma^2 B \prod_A(f)$, $R_x(\tau)=\sigma^2 AB sinc(A\tau)$

6. Modèle AR ($R_y(k)\neq 0$) x(n) entrée bb, y(n) signal aléatoire à modéliser h(n) filtre formeur (modèle math) entrée bb + ergodisme $a_1= - \alpha$ $\sigma_x^2=1-\alpha^2$

7.$R_x(k)=\sigma_x^2\delta(k)$ $S_x(f)=\sigma_x^2$ MA d'ordre 2 $R_y(0)=1+b_1^2+b_2^2 R_y(1)=b_1(1+b_2)$ $R_y(2)= b_2 R_y(k)= 0$ pour $k\geq 0$

8. $\mu_y(n)=0$ entrée bb SSL ⇒sortie SSL voir cours (page 41) ou Interro1 14/15 **9.** Voir examen 17/18

Exercices supplémentaires

1. Soit Y(t) un processus aléatoire défini par Y(t) = X(t+1) - X(t-1), où X(t) est un processus aléatoire stationnaire de moyenne nulle. Montrer que $S_Y(f) = 4 . S_X(f) . \sin^2(2\pi f)$

2. On considère le signal $x(n) = g(n)\cos(2\pi k_0 n/N+\varphi)$ défini pour $n\in [0,N-1]$, et où g(n) est une fonction aléatoire SSL, indépendante de φ v.a uniforme ente 0 et 2π .

- Calculez l'autocorrélation de x(n)
- Déduisez en sa densité spectrale de puissance, en fonction de la DSP de g, $S_g(f)$.

3. On considère la transmission de deux symboles :

$s_0(t)=A \qquad t\in[0,T]$

$s_1(t)=-A \qquad t\in[0,T]$

à travers un canal à bruit blanc additif Gaussien. Le signal reçu s'écrit : $x(t)= s_i(t)+b(t)$ où b(t) est un bruit blanc centré de DSP σ_b^2

- Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre adapté h(t) correspondant à $s_0(t)$ telle que $\int h(t)^2dt=1$
- Même question pour $s_1(t)$.
- Donner le rapport signal sur bruit, dans chaque cas.

On note $y_{si}(t)$, la sortie du filtre correspondant à $s_i(t)$,

- Montrer que pour b(t) elle s'écrit : $y_b(T) = \dfrac{1}{\sqrt{T}}\displaystyle\int_0^T b(t)dt$
- Déterminer la moyenne et la variance de $y_b(T)$
- Dans l'hypothèse où le bruit blanc est Gaussien, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y= y_{si}(t)+y_b(t)$

4. On considère un signal déterministe s(t) qui modélise une impulsion (par exemple radar/sonar). Cette impulsion est réfléchie sur une cible et on suppose que le signal reçu en retour (par exemple sur l'antenne de réception) s'écrit :

$x(t) = s(t - \tau) + b(t)$

où $\tau \geq 0$ représente un retard et b(t) est un bruit blanc centré. Un traitement est appliqué au signal x(t) en réception afin de maximiser le critère de "rapport signal sur bruit". Plus précisément, on applique à x(t) un filtre dont la réponse impulsionnelle est notée h(t) et la réponse en fréquence est notée H(f).

- Rappeler comment s'exprime l'énergie E_s du signal s(t) ?
- Si y(t) est la sortie du filtre h(t) lorsque x(t) est en entrée, justifier en deux mots que l'on puisse écrire $x'(t) = s'(t - \tau) + b'(t)$ où s'(t) et b'(t) sont les sorties du même filtre h(t) avec respectivement s(t) et b(t) en entrée.
- Exprimer s'(t) en fonction de H(f) et S(f) et en déduire $s'(0) = \int H(f)S(f)\, df$.
- On note $N_0/2$ la densité spectrale de puissance de b(t).

(a) Que vaut la densité spectrale de puissance de b'(t) (notée $S_{b'}(f)$) ?

(b) En déduire la puissance de b'(t). Que vaut $E\{|b'(\tau)|^2\}$?

On désire maximiser le critère "rapport signal sur bruit" en sortie du filtre à l'instant τ par un filtrage adapté.

- Donner l'expression de h(t),H(f) et du RNS.

5. Expliquer le filtrage adapté

- Que permet-il de faire?

- Donner un exemple : Prendre un signal, le tracer puis tracer le signal bruité, le filtre adapté et la sortie après le filtrage adapté.
- Quelles hypothèses fait-on sur le bruit?

6. Soit $x(t) = t$ avec $0 \leq t \leq T$

On utilise ce signal pour déterminer la distance d'un objet. Sachant que le signal reçu y(t) par le recepteur est retardé de T' et bruité par un bruit blanc Gaussien de densité spectrale de puissance σ^2:

1. Tracer approximativement y(t).
2. Déterminer l'expression générale de la réponse impulsionnelle du filtre *h(t)* (dont l'énergie vaut 1) permettant de maximiser le rapport signal sur bruit.
3. Tracer h(t) en fonction de $T_0 = 2T$ et $k = \sigma^2$, puis z(t) la sortie du filtre (prendre T'=10).
4. Donner le rapport signal sur bruit après filtrage.
5. Pourquoi ce filtrage est dit, en général, optimal et, en particulier, adapté?

7. Soit le système LIT suivant : x(t) → $\boxed{h(t)}$ → y(t)

A] On fournit à ce système en entrée $x_1(t)+x_2(t)$ deux signaux aléatoires décorrélés SSL.

1.Exprimer $E\{y(t)\}$

2. Exprimer $Rx_{1x2}(t,\tau)$ puis $S_y(f)$

B] On considère que $x_1(t)= \Pi_2(t)$ et que $x_2(t)$ est un bruit blanc de variance 0.25. On veut maximiser le rapport signal sur bruit.

1. Exprimer et tracer h(t) causal.
2. Tracer le signal de sortie y(t)
3. Calculer le SNR après filtrage

8.Les signaux x(n) et y(n) ont été obtenus en filtrant, au moyen d'un filtre à réponse impulsionnelle finie, un bruit blanc b(n) gaussien centré de variance σ^2.

A]L'équation de filtrage est la suivante : x(n) = 2.b(n) + 0.5.b(n -1) -0.2.b(n - 2) + 0.1.b(n - 3)

- Calculez, en fonction de σ^2, les coefficients d'autocorrélation d'ordre 0,1,2,3 du signal x(n) .
- On notera Rxx (0), Rxx (1), Rxx (2), Rxx (3) ces coefficients.
- La répartition des niveaux d'amplitude du signal x(n) est elle gaussienne (sans justifier)?

B]y(n) = b(n) - b(n - 2)

- Donnez la TZ de la réponse impulsionnelle du filtre qui a permis d'obtenir y(n) à partir de b(n).
- Placez les zéros de ce filtre sur un cercle unité, quelles sont la ou les fréquence(s) coupées par ce filtre ?
- Tracez approximativement sa réponse en fréquence.

C]On considère maintenant le coefficient d'intercorrélation Rxy(k), entre les signaux x(n) et y(n) donné par Rxy(k) = E[x(n) y(n - k)*].

Calculez Rxy (0), Rxy (1), Rxy (2), Rxy(-1), Rxy(-2)

9.On considère un signal aléatoire stationnaire x(n) et l'on suppose connu ses coefficients d'autocorrélation :

$R(0) = 3\sigma^2$, $R(1) = 2\sigma^2$, $R(2) = \sigma^2$, $R(3) = 0$

- On cherche le filtre MA d'ordre 3 de ce signal. Identifiez les paramètres du filtre.

- Si le signal x(n) a été obtenu par filtrage d'un bruit blanc gaussien de variance σ^2 par un filtre à réponse impulsionnelle finie de fonction de transfert $H(z) = 1+ a.z^{-1} + b.z^{-2}$, en déduire les valeurs de a et b.

10. Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est $y(n)=0.5\ (x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3))$

- Expliquer la notion de filtre formeur puis identifier ce modèle linéaire AR ou MA
- Donner la moyenne, l'autocorrélation et la DSP de son entrée *x(n).*
- Calculer et tracer $R_{yy}(k)$ puis déterminer $S_{yy}(f)$

11. Les signaux x(n) et y(n) ont été obtenus en filtrant, au moyen d'un filtre à réponse impulsionnelle finie, un bruit blanc b(n) gaussien centré de variance σ^2.

$x(n) = 2.b(n) + 0.5.b(n-1) - 0.2.b(n-2) + 0.1.b(n-3)$ $\qquad$ $y(n) = b(n) - b(n-2)$

- Identifier les 2 modèles puis pour chacun, calculer et tracer les coefficients d'autocorrélation
- x(n) et y(n) sont-ils Gaussiens (justifier)
- Calculer les intercorrélations Rxy(k), et Ryx(k) et commenter
- Donner quelques applications des modèles AR,MA, ARMA

12. Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est $y(n)= - \alpha\ y(n-1) - \beta\ y(n-2) + x(n)$

- Identifier l'ordre du modèle linéaire AR.
- Déterminer les paramètres du modèles, on suppose que $R_{yy}(k)=2*0.5^{|k|}$

13. Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est $y(n)= \alpha\ y(n-1) + x(n)$

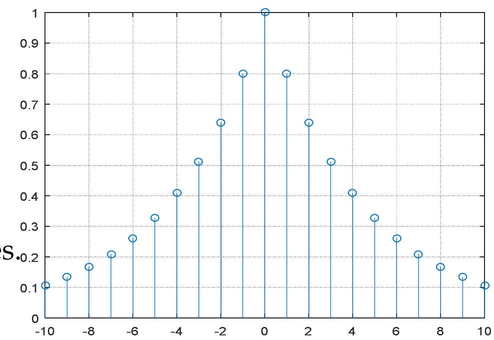
- Identifier l'ordre du modèle linéaire AR.
- Déterminer la moyenne de y(n) et montrer que $R_{yy}(k)=\alpha^k\ R_{yy}(0)$, déduire une condition sur α.
- Montrer que $R_{yy}(0)=R_{xx}(0)/(1-\alpha^2)$
- Tracer $R_{yy}(k)$ (Prendre $R_{xx}(0)=\sigma^2=1$).
- Citer 2 applications concrètes des modèles AR.

14. Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est $y(n)= 0.25\ y(n-1) - 0.25\ y(n-2) + x(n)$

- Identifier ce modèle linéaire AR ou MA (Justifier)
- Déterminer la moyenne de y(n) et donner l'expression de $R_{yy}(k)$.
- Calculer et tracer $R_{yy}(k)$ (Prendre $R_{xx}(0)=\sigma^2=1$).

15. On veut modéliser le signal y(n) SSL dont la corrélation statistique n'a été tracée que de -10 à 10. Elle est donnée à la figure ci-contre.

- S'agit-il d'un modèle AR ou MA? Justifier
- Donner les propriétés statistiques du signal d'entrée.
- On suppose que le modèle est d'ordre 1, déterminer ses paramètres.
- Expliquer la notion de filtre formeur et son utilité en téléphonie



Solutions

2. $Rx(m)=Rg(m)\cos(2\pi k_0 m/N)/2$ $\quad Sx(f)=[Sg(f-k_0)+Sg(f+k_0)]/4$

3. Interro1 14/15 **4.** Interro2 15/16 **5.** Ratt 15/16 **6.** Examen 15/16 **7.** Examen 16/17

8. $Rx(0)=(b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2).\sigma^2$ $\quad Rx(1)=(b_0b_1+b_1b_2+b_2b_3).\sigma^2$ $\quad Rx(2)=(b_0\ b_2+ b_1\ b_3).\sigma^2$ $\quad Rx(3)=(b_0\ b_3).\sigma^2 Rx(k\geq4)=0$

$H(z)=(z^2-1)/z^2$ $\quad Rxy(0)=2.2$ $\quad Rxy(1)=0.4$ $\quad Rxy(2)=-0.2$ $\quad Rxy(3)=0.1$ $\quad Rxy(-1)=-0.5$ $\quad Rxy(-2)=-2$

9. $b_0=1$ $b_1=1$ et $b_2=1$ et par identification, on trouve a=1 et b=1

10. MA, $\mu x=0$ et $Sx(f)=\sigma^2$ $\quad Ry(0)=\sigma^2$, $Ry(1)=Ry(-1)=0.75\ \sigma^2$, $Ry(-2)=Ry(2)=0.5\ \sigma^2$, $Ry(-3)=Ry(3)=0.25\ \sigma^2$, $Ry(k>3)=0$. $\quad Sy(f)=\sigma^2\ (1+1.5\cos(4\pi f)+\cos(6\pi f) + 0.5\cos(8\pi f))$

11. Interro2 15/16 **12.** Ratt 15/16 **13.** Examen 15/16 **14.** Ratt 14/15 **15.** Examen 16/17

TP n° 4 : Filtrage et Modélisation des signaux aléatoires

Ce TP a pour objectif :
- D'étudier comment sont transformés les signaux aléatoires, ou plus exactement leurs caractéristiques, lors d'un filtrage linéaire. Assimiler la notion de filtre formeur.
- Aborder une application directe qui est le filtrage adapté pour la détection d'un signal connu noyé dans du bruit blanc en augmentant le SNR.
- Modéliser un signal aléatoire par les modèles AR et MA (par approximation AR) et d'en extraire les informations utiles. Puis, une application d'identification sera envisagée.

Exercice 1

On veut simuler l'émission et la réception d'un signal radar. On suppose que le signal émis s(n) est un signal sinusoïdal et que le signal reçu x(n) est une version bruitée (bruit blanc) atténuée et retardée du signal émis.

```
clc; clear all; close all;
%Signal émis de longueur L
L = 300; t = (1 :L)'; f0=0.02; s=sin(2*pi*f0*t);
%Signal reçu
N=1000;  var = 4; bruit = sqrt(var)*randn(N,1); Retard = 500; A=0.8;
x= bruit;  x(Retard+t) = A*x(Retard+t)+s;
figure; subplot(211); plot(s);  xlabel('Sig émis'); subplot(212); plot(x); xlabel('Sig reçu');
% Création du Filtre adapté
for i=0:L-1
h(i+1)=s(L-i);
end
figure; subplot(211); plot(s);xlabel('Sig émis');
subplot(212); plot(h); xlabel('Filtre adapté');
% Filtrage
y = conv(h,x); y = y/(length(y)); figure; subplot(2,1,1); plot(x); xlabel('Signal reçu');
subplot(2,1,2); plot(y); xlabel('Signal reçu filtré');
tems_aller_retour=find(y>=max(y))-L
```

1. Montrer que pour $y(t) = a.x(t - T_{AR})+b(t)$ où b(t) est un bb, on obtient lors d'un filtrage adapté($h(t) = x^{*}(T_0 - t)$) en sortie l'expression suivante $R_{yx}(t\text{-}T_0) = a.R_{xx}(t - T_0\text{-}T_{AR})+R_{bx}(t\text{-}T_0)$.
2. Que représentent A, s et x?
3. Arrive-t-on à identifier la partie comportant la sinusoïde dans le signal reçu? pourquoi?
4. Expliciter la boucle. Quel est, alors, le lien entre x et h ?
5. Expliquer l'instruction `tems_aller_retour=find(y>=max(y))-L`
6. Commenter le programme plus particulièrement les figures.Quel est le but de ce programme ?
7. Tester d'autres signaux utiles (par ex : `s = ones(L,1)`) et commenter. Pour détecter le temps d'aller-retour, lequel des 2 signaux vous paraît préférable?
8. Faire varier la puissance du bruit (var=2 puis 4 en gardant une moy=0) et commenter.
9. Simuler le processus de l'aide au stationnement en mettant ce programme dans une boucle pour un Retard de 700 à 0 avec un pas de 50 et rajouter à la fin les instructions : `pause(tems_aller_retour/500);beep;` dans la boucle.

Exercice 2 :Télécharger le fichier 'vous avez du courrier en attente.wav' et le placer dans le même répertoire que votre programme commençant comme suit :

```
clc; clear all; close all;
nom_fich = uigetfile('*.wav', 'Selectionner le fichier son');
% Lire, écouter et afficher le son complet
[x,fe]=wavread(nom_fich);sound(x,fe); t=(0:length(x)-1)/fe; subplot(2,1,1);plot(t,x);
legend('Son');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude');
% lire, écouter et afficher une partie du son qui correspond à une voyelle
N1=21000;N2=21500;[y,fe]=wavread(nom_fich,[N1 N2]);sound(y,fe)
N=length(y);t=(N1:N2)/fe; subplot(2,1,2);plot(t,y);
legend('Voyelle sur 25 ms');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude');
% Afficher le spectre
Sy=fft(y); f=(0:fe/N:fe/2-1/N);figure;plot(f,20*log10(abs(Sy(1:length(f)))+eps));
legend('Spectre'); xlabel('Frequence (Hz)'); ylabel('Amplitude (dB)');
```

I. Nous allons commencer par **déterminer les paramètres du** modèle soit l'étape de **modélisation**

```
% Déterminer et afficher les coefficients de prédiction linéaire
P=20;           % Nbre de coefficicents du modèle AR>2
R= autocorr(y,P); C = toeplitz(R(1:P));  B = -R(2:P+1); a = inv(C)*B; a = [1 a'];
sigma= sum(a.*R');
% Visualisation de la réponse fréquentielle du filtre formeur
[h,f]=freqz(1,a,length(f),fe);
figure; plot(f,20*log10(abs(h(1:length(f)))+eps),'r',f,20*log10(abs(Sy(1:length(f)))),'b');
xlabel('Frequence (Hz)'); ylabel('Amplitude (dB)')
legend('Filter formeur AR d ordre 20','Spectre de la voyelle')
```

II. Entamons la partie **synthèse** en ayant comme **données de départ les paramètres du modèle (*a_i* et sigma**). Donc à partir de σ^2 et des coefficients AR 'a' trouvés, synthétisons et écoutons le son 'zz' .

```
%Synthèse du signal modélisé à partir des coefficients AR
noise = sqrt(sigma)*randn(N,1); son_synt= filter(1,a,noise);
son_synt = son_synt/max(son_synt); %Normalisation
y = y/max(y);figure;  t=t-P/fe; plot(t,y);
legend('Voyelle à modéliser');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude');
hold on; plot(t,son_synt,'g');
legend('Voyelle synthétisée');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude'); sound(son_synt,fe)
```

1. L'autocorrélation R_{yy} intervenant dans les équations de Yule-Walker est-elle statistique ou temporelle ? Qu'en est-il de celle calculée dans ce programme? Commenter.
2. Visualiser le son modélisé et le son synthétisé ainsi que leurs spectres en db sur le même graphe.
3. Modifier P et commenter les graphes précédents.

III. Rajouter les lignes suivantes et donner une application possible.

```
r=roots(a);  r=r(imag(r)>0.01);  % Racines du dénominateur et Recherche des pôles positifs
req_form=sort(atan2(imag(r),real(r))*fe/(2*pi));  % convert en Hz et trier
for i=1:length(freq_form)
fprintf('Formant %d Frequence %.1f\n',i,freq_form(i));
end
```

4. Pourquoi utilise-t-on le modèle AR pour trouver les fréquences principales au lieu du signal 'y'?

IV. Sachant qu'un modèle MA peut être obtenu en **identifiant le modèle MA d'ordre M avec un modèle AR d'ordre P>>M** :

$$\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} = 1/\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}$$

5. Modifier le programme précédent en rajoutant l'instruction suivante au bon endroit: `b=impz(1,a,P);`
6. Expliquer comment on s'est servi de cette instruction pour obtenir les b_i.
7. Faire la modification suivante `son_synt= filter(b,1,noise);` et expliquer pourquoi
8. Observer les spectres de la voyelle modélisée et synthétisé et commenter.