Chapitre 5 : Estimations statistique

Supposons que l'on veuille connaître le poids 'p' ou la taille 'T' que devrait avoir un enfant de 4 ans. Pour ce faire, on prendra un échantillon d'enfants de 4 que l'on pèsera et dont on mesurera la taille. Une moyenne sur ces mesures nous fournira une estimation $\hat{p}$ du poids une estimation $\hat{T}$ de la taille. Cet échantillon devra bien sûr être le plus grand possible et le plus hétérogène possible (plusieurs ethnies). L'estimation de la durée moyenne d'une communication téléphonique est très utile aux opérateurs de téléphonie pour ajuster les prix et offres en conséquence ou pour la gestion du trafic. Autre exemple : les intentions de vote. Dans chacun des cas, un échantillon est considéré pour représenter la population.

1. Estimateur

Dans de nombreuses situations, on ne dispose pas directement de mesures sur la variable d'intérêt mais que d'une observation liée à notre variable inconnue. Le but des techniques d'estimation est d'utiliser les observations pour extraire de l'information sur la grandeur d'intérêt. Ceci doit fait de la meilleure façon qui soit et implique plusieurs choix dont la relation mathématique entre l'observation et la variable à estimer.

Dans les problèmes d'estimation, on a, en général, affaire à deux catégories de variables:

$\underline{X}$: Un vecteur de variables inconnues que l'on cherche à déterminer

$\underline{Y}$: Un vecteur de variables mesurées (observation ou échantillon) liées à x.

Déterminer **X** à partir de **Y**(et donc en fonction de **Y**) consiste à traiter de manière déterministe les mesures **Y** pour obtenir une grandeur $\hat{X}$, proche de**X**, soit :$\hat{X} = fct(Y)$.

On peut distinguer les deux cas suivants :

-X et Y sont aléatoire (estimateurs de Bayes).

- Si X est déterministe et Y aléatoire (estimateurs de Fisher)

Un estimateur est donc une valeur $\hat{X}$ calculée sur un échantillon Y tiré au hasard (dit aussi observations), ce qui fait de $\hat{X}$ une variable aléatoire possédant une moyenne et une variance.

Exemple

Considérons que l'on veuille estimer la valeur d'une résistance R (voir Exo 1 du TP n°5). On procède comme suit : On réalise N expériences indépendantes où l'on mesure le courant I(k)passant par la résistance et la tension U(k) à ses bornes. Ces mesures de courant et de tension sont toutes bruitées par un bruit dont on ignore la densité de probabilité.

Observations : $Y = (I(1), U(1), I(2), U(2), \ldots, I(N), U(N))$

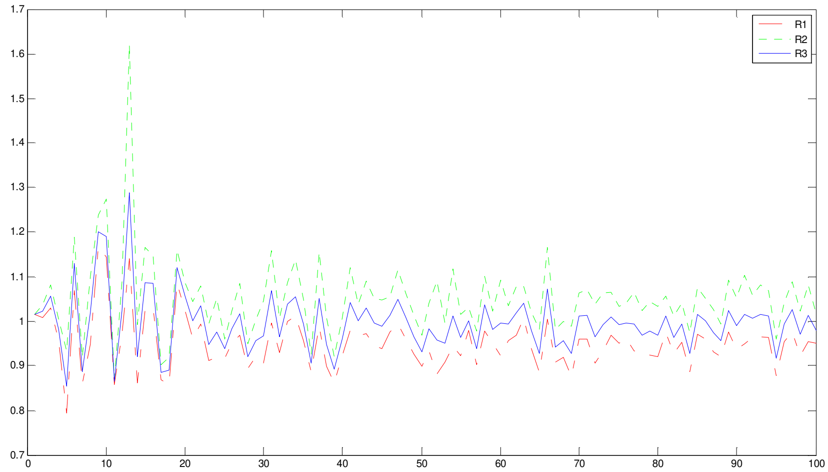
Variable à estimer : $X = R$

Bien que X et Y ne soient pas supposés avoir une densité de probabilité, on peut construire différents estimateur de R en fonctions des observations U(k) et I(k)

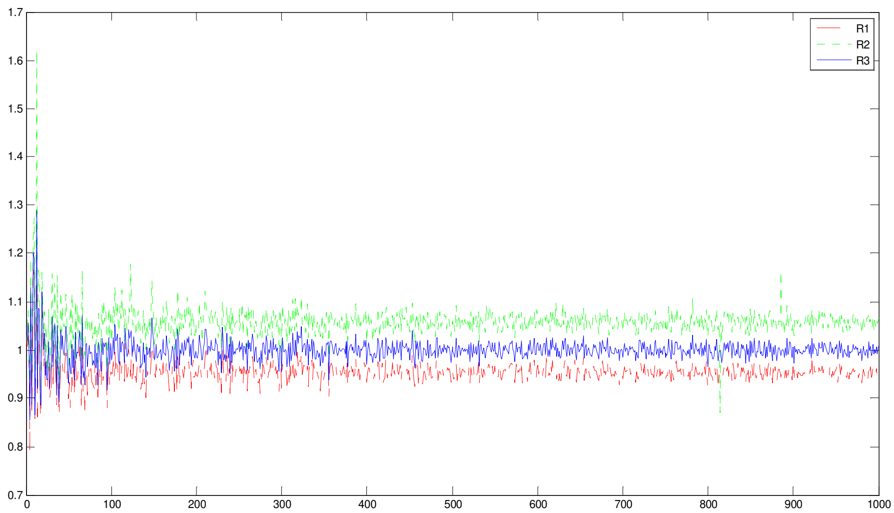
Estimateur 1 : $$\hat{R}_1 = \frac{\sum_{k=1}^{N} U(k) I(k)}{\sum_{k=1}^{N} I^2(k)}$$

Estimateur 2 : $$\hat{R}_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{U(k)}{I(k)}$$

Estimateur 3 : $$\hat{R}_3 = \frac{\sum_{k=1}^{N} U(k)}{\sum_{k=1}^{N} I(k)}$$



Ces figures montrent l'évolution de l'estimée d'une résistance R=1 en fonction du nombre de mesures pour U=I=1. Ci-contre une estimation pour N=100 et ci-bas pour N=1000



On remarque que le premier estimateur donne des valeurs comprises entre 0.9 et 1. Le deuxième fournit une estimation proche de 1 et 1.2 Ils sont donc tous deux fortement biaisés. Le troisième estimateur est quant à lui non biaisé.

Ainsi, pour pouvoir déterminer d'une façon constructive une règle d'estimation, il faut définir un critère qui évalue la qualité des résultats, et définir l'estimée comme l'application de Y en X qui optimise ce critère (minimiser une erreur ou une distance, dite aussi fonction de coût). Deux mesures de qualité de l'estimation sont largement utilisées, il s'agit du biais et de la variance.

2. Propriétés des estimateurs

Le biais est la moyenne de l'écart et lavariance est la puissance de l'écart (mesure les fluctuations de l'estimateur autour de la valeur souhaité).

L'estimateur $\hat{x}$ a pour biais $b = E\{\hat{x} - x\}$ et pour variance: $\sigma^2 = E\{(\hat{x} - E\{\hat{x}\})^2\} = E\{\hat{x}^2\} - E\{\hat{x}\}^2$

- Si x est déterministe, alors le biais est $b = E\{\hat{x}\}$ -x

- Si x est aléatoire, alors le biais vaut $b = E\{\hat{x}\} - \mu_x$

❑ Le biais indique la valeur moyenne de l'erreur d'estimation, trois cas sont possibles:

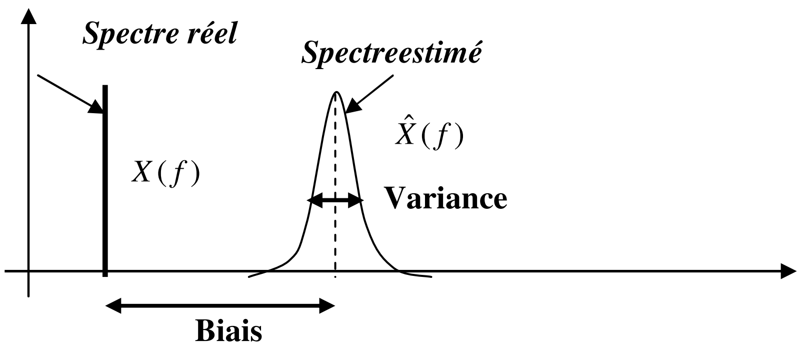
• $E[\hat{x}\}$ =x ou $\mu_x$pour toutes les valeurs possibles du paramètre. On dit alors que l'estimée est non-biaisée ;

• $E[\hat{x}\}$ =x+$b$ou μ_x+b. Si$b$est indépendant de x, dans ce cas l'estimateur a un biais constant et connu, qui peut toujours être éliminé ;

• $E[\hat{x}\}$ =x+ b(x) , c'est-à-dire, on a un biais qui dépend de x(qui est inconnu).

❑ La variance doit être aussi petite que possible, de façon à que l'estimée soit concentrée autour de la vraie valeur du paramètre.

❑ Plus b et σ^2 sont faibles, meilleur est l'estimateur (estimateur non biaisée à variance minimale). Malheureusement, la diminution de l'un provoque l'augmentation de l'autre. Dans ces conditions, un estimateur biaisé pourrait être préférable, si le biais est faible, à un estimateur non biaisé mais de très grande variance. C'est le compromis biais-variance , on peut démontrer que $b^2 = E\{\hat{x} - x\}^2 - \sigma^2$ où $E\{\hat{x} - x\}^2$ est l'erreur quadratique moyenne.



❑ On dit qu'un estimateur est *consistant* s'il tend vers la vraie valeur du paramètre quand le nombre d'observations tend vers infini (comportement asymptotique) :

$$\lim_{N \to +\infty} b_N = \lim_{N \to +\infty} \sigma_N = 0$$

❑ Si l'estimateur est non biaisé, nous avons une borne *inférieure de la variance* (borne de Cramer Rao). Si la variance atteint la borne de CR, on dit que l'estimateur est *efficace.* Autrement dit, un estimateur non-biaisé est appelé efficace si sa variance dans est plus petite que celle de n'importe quel autre estimateur non-biaisé.

Remarque: Dans ce qui suit, on parlera de variables x_i iid (indépendantes et identiquement distribuées). L'exemple classique est celui du lancé de dé : Les variables aléatoires représentent chaque résultat des lancers (0 pour face et 1 pour pile) suivent toutes la même loi de Bernoulli. Bien que les lancers soient successifs, le résultats d'un lancé donné ne dépend pas des résultats précédents et n'aura aucune influence sur les prochains lancés (pas de lien de dépendance)

Ce sont des variables aléatoires qui suivent toutes la même loi de probabilité (donc même moyenne et même variance) et sont indépendantes.

On en déduit les propriétés suivantes:

- $E\{x_i\}=m \ \forall i$
- $E\{(x_i-m)^2\}=\sigma^2$
- $E\{(x_i-m)(x_k-m)\}=0$ pour $k\neq i$ (indépendants et centrés)

Exemple d'application

Supposons que l'on observe N échantillons indépendants $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ d'une variables aléatoire Y de moyenne $m= E\{Y_i\}$ et de variance $\sigma^2=E\{Y_i^2\}-m^2$.

1. On désire estimer X=m (déterministe) en supposant σ^2 connue. Pour cela, on étudie les deux estimateurs suivants :

$$X_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i \qquad X_2=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i.Y_i$$

- Biais de $X_1= E\{\hat{X}_1\}-X=0$ - Variance de $X_1=\sigma^2/n$

- Biais de $X_2= E\{\hat{X}_2\}-X=0$ - Variance de $X_2=2\sigma^2(2n+1)/3n(n+1)$

2. On désire estimer $X= \sigma^2$ en supposant m connue. Pour cela, on étudie les deux estimateurs suivants :

$$X_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-m)^2 \text{ et } X_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_Y)^2$$

- Biais de $X_1= E\{\hat{X}_1\}-X=0$ - Biais de $X_2= E\{\hat{X}_2\}-X=(n-1).\sigma^2/n$

3. Estimateurs des moyennes statistiques

Les quantités $E[x]$,$E[x]^2$, ,$Sxx(f)$,... sont impossibles à calculer sur un ordinateur car elles nécessiteraient un nombre de points infini. Sur calculateur, on ne dispose que d'une séquence discrète et finie de N points. En réalité, on calcule des estimées de ces grandeurs en supposant généralement le signal stationnaire et ergodique. On remplace alors le calcul des moyennes statistiques par des moyennes temporelles.

A.Estimation de Moyenne

Soit N échantillons (x_0, x_1, …..,x_{N-1}) indépendants et identiquement distribuées (même loi avec même paramètre) d'un signal aléatoire stationnaire. On définit l'estimée $\hat{m}$ de E{x}

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k$$

On remarque donc qu'on remplace la moyenne statistique par la moyenne temporelle sur la séquence finie. Cet estimateur est non biaisé. En effet, du fait que le signal soit iid , ∀k;E [x_k} = m, alors :

$$E\{\hat{m}\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} E\{x_k\} = \frac{1}{N}.N.m = m \quad \Rightarrow \quad b\{\hat{m}\} = 0$$

Pour lavariance d'estimation, on obtient :

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \mathrm{var}\{\hat{m}\} = E\left\{(\hat{m} - E\{\hat{m}\})^2\right\} = E\left\{\hat{m}^2\right\} - E\{\hat{m}\}^2$$

$$= E\left\{\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k - m\right)^2\right\} = E\left\{\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} m\right)^2\right\} = \frac{1}{N^2} E\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1}(x_k - m)\right)^2\right\}$$

Sachant que les x_k sont indépendants et que E{x_k-m}=0, alors : $\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}(x_k - m)^2 = \sigma^2 / N$

Cet estimateur est consistant, puisque pour N→∞, biais et variance tendent vers 0.

B. Estimateurs de variance

Selon que l'on connaisse ou non la moyenne, on utilisera l'un des deux estimateurs suivants :

$$\hat{\sigma}_1^{\,2} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k - m)^2 \qquad\qquad \hat{\sigma}_2^{\,2} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k - \hat{m})^2$$

Calculons le biais des deux estimateurs

- Pour le premier, on a : $E\left\{\hat{\sigma}_1^{\,2}\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} E\left\{(x_k - m)^2\right\} = \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad b_{\hat{\sigma}_1^2} = 0$

- Pour le deuxième, on a : $E\left\{\hat{\sigma}_2^{\,2}\right\} = \frac{1}{(N-1)}\sum_{k=0}^{N-1} E\left\{(x_k - \hat{m})^2\right\} = \frac{1}{(N-1)}\sum_{k=0}^{N-1} E\left\{(x_k - m + m - \hat{m})^2\right\}$

$$E\left\{\hat{\sigma}_2^{\,2}\right\} = \frac{1}{(N-1)}\sum_{k=0}^{N-1} E\left\{\left(x_k - m + m - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_j\right)^2\right\} = \frac{1}{(N-1)}\sum_{k=0}^{N-1} E\left\{\left((x_k - m) - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(x_j - m)\right)^2\right\}$$

Sachant que $E\{(x_k - m)\} = 0$, on a :

$$E\{\hat{\sigma}_2{}^2\} = \frac{1}{(N-1)}\sum_{k=0}^{N-1}\left(E\{(x_k - m)^2\} + \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(x_j - m)\right)^2 - \frac{2}{N}E\{(x_k - m)^2\}\right)$$

$$= \frac{1}{(N-1)}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sigma^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}E\{(x_k - m)^2\} - \frac{2\sigma^2}{N}\right) = \frac{1}{(N-1)}\sum_{i=0}^{N-1}\left(.\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{N} - \frac{2\sigma^2}{N}\right) = \frac{N\sigma^2}{(N-1)}\left(\frac{N-1}{N}\right) = \sigma^2$$

Les deux estimateurs ne sont pas biaisés puisque on obtient la vraie valeur à chaque fois.

C. Estimateurs de la corrélation

Dans le cas discret, la fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire x; supposé ergodique, est définie par : $R_{xx}(k) = E\{x(n)x^*(n-k)\} = E\{x(n)x^*(n-k)\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{n=+N}x(n)x^*(n-k)$

A partir d'un échantillon (x_0, x_1, …..,x_{N-1}) indépendants et identiquement distribuées, plusieurs estimateurs sont alors possible:

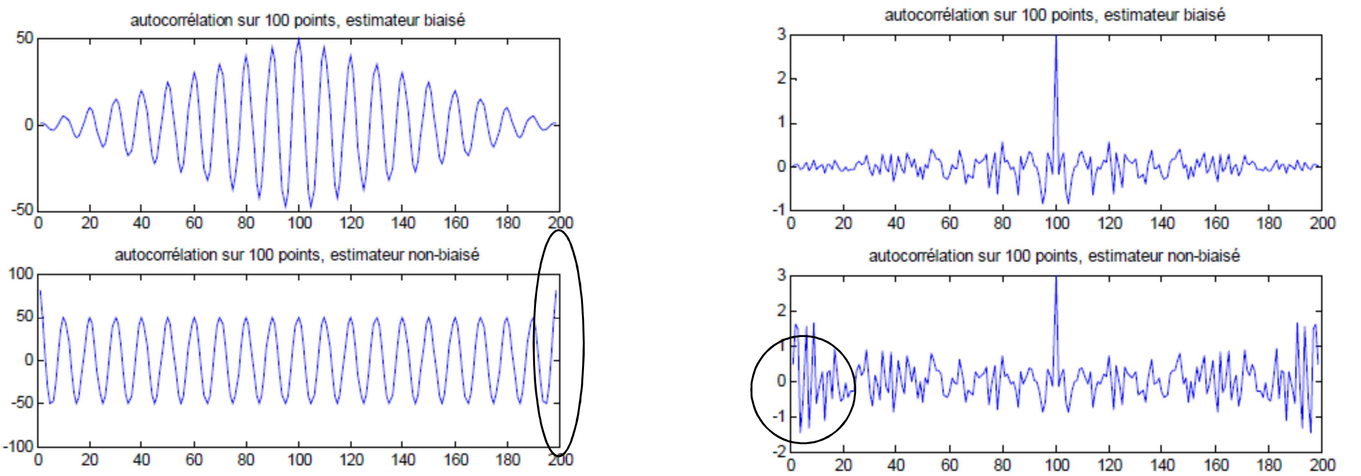
$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=k}^{N-1}x(n)x^*(n-k) \qquad \hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=k}^{N-1}x(n)x^*(n-k)$$

Le premier estimateur est biaisé car on ne tient pas compte du nombre d'échantillons disponibles qui varie avec le pas k. Le deuxième en tient compte, il est non biaisé. En effet :

$$E\{\hat{R}_{xx}(k)\} = \frac{1}{N-k}\sum_{n=k}^{N-1}E\{x(n)x^*(n-k)\} = \frac{1}{N-k}\sum_{n=k}^{N-1}R_{xx}(k) = R_{xx}(k)$$

On peut démontrer que la variance de cet estimateur tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Cet estimateur est donc consistant.

On observe par contre que lorsque k approche du nombre d'échantillons N, la variance de l'estimateur non biaisé devient excessive (voir exemple pour un bruit blanc et une sinusoïde).Alors que celle de l'estimateur biaisé varie beaucoup moins. C'est une des raisons pour lesquelles cet estimateur est souvent utilisé par la suite, malgré son biais.



D. Estimateurs de la densité spectrale

a.Méthode du périodogramme

Supposons que l'on dispose d'une séquence de N points du signal aléatoire : x [$x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$}.

Soit donc la séquence y_k obtenue à partir de la séquence x_k pondérée par la fenêtre f_k : $y_k = x_k . f_k$

La transformée de Fourier calculée sur la séquence finie sera donc convoluée avec lespectre de la fenêtre rectangulaire c'est-à-dire un sinus cardinal. Rappelons que les propriétés spectrales du sinuscardinal ne sont pas bien adaptées à l'analyse spectrale du signal (lobes secondaires importants). Pour y remédier, on emploie des fenêtres de pondérations(Hamming, Hanning, Kaiser,etc.)

La méthode du périodogramme à prendre la TF d'une réalisation :

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{N}|Y(f)|^2 \qquad avec \qquad Y(f) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi jfk}$$

D'où

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} y_l e^{-2\pi jfl} \sum_{m=0}^{N-1} y_m e^{2\pi jfm} \; \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} y_l\, y_m\, e^{-2\pi jf(l-m)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=k}^{N-1} y_l\, y_{l-k}\, e^{-2\pi jfk} = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}_{yy}(k) e^{-2\pi jfk} = TF\left(\hat{R}_{yy}(k)\right)$$

Le calcul de l'espérance de $\hat{S}_{xx}(f)$ donne :

$$E\left\{\hat{S}_{xx}(f)\right\} = E\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}_{yy}(k) e^{-2\pi jfk}\right\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=k}^{N-1} y_l\, y_{l-k}\, e^{-2\pi jfk}\right\}$$

$$E\left\{\hat{S}_{xx}(f)\right\} == \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=k}^{N-1} E\{y_l\, y_{l-k}\} e^{-2\pi jfk} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N-k}{N} R_{yy}(k)\, e^{-2\pi jfk} = S_{yy}(f) * N \sin c(fN)^2$$

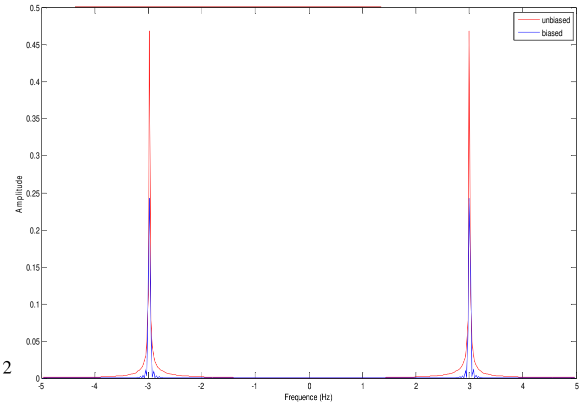
Le périodogramme est un estimateur biaisé. Le périodogramme est donc en moyenne la convolution du véritable spectre avec la transformée de Fourier de la fenêtre triangulaire. Néanmoins, lorsque N $\rightarrow \infty$, le biais devient nul. La variance est pratiquement indépendante de N et proportionnelle au spectre :$\simeq$ $Sx(f)^2$

Afin de diminuer la variance de cet estimateur, on peut utiliser un périodogramme moyenné. Cela consiste à séparer le signal en K tranches (de longueur N/K), à calculer le périodogrammesur chaque tranche et à faire la moyenne. Du fait des K moyennages, la variance est presque divisée par K : néanmoins, les tranches étant plus courtes, la résolution diminue. En pratique, un taux de recouvrement de 40% donne de bons résultats. Au delà, l'indépendance entre les tranches n'est plus respectée.

b. La méthode du corrélogramme consiste à calculer d'abord l'estimée de $Rxx(k)$ de la fonction d'autocorrélation puis à prendre pour estimée de la densité spectrale la TF de cette estimée.

$$\hat{S}_{xx}(f) = TF\left[\hat{R}_{xx}(k)\right]$$

Les corrélogrammes présentent chacun un extrema pour la fréquence normalisée 3 qui est bien la fréquence de la sinusoïde étudiée. Il ressort également de ces courbes que le corrélogramme non-biaisé permet de mieux faire ressortir la fréquence de la sinusoïde mais au dépend d'une plus grande variance sur les bords.



c) Dans cette méthode, on recherche un modèle AR, MA ou ARMA pour la séquence x_k. Dans le cas d'un modèle auto-régressif $x_k = a_1x_{k-1}+....+a_rx_{k-r}+u_k$

$$\hat{S}_{xx}(f) = \left| \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{r} a_k e^{-i2\pi fk}} \right|^2 u_0$$

4. *Estimateurs*

Le but des techniques d'estimation est d'utiliser les observations *X* (aléatoires) pour extraire de l'information sur la grandeur d'intérêt *Y*. Suivant que *Y* soit déterministe ou aléatoire, on fera appel à différentes techniques. Ainsi :

- ❑ Pour estimer une variable certaine, dans le cas le plus général, on souhaite que l'estimateur soit non biaisé, on cherche donc l'estimateur à minimum de variance dont le plus connue est le maximum de vraisemblance (MV) basée sur l'emploi de la probabilité des valeurs observées *p(X/Y)*. Si on autorise un biais, on cherche alors à minimiser l'erreur quadratique moyenne.
- ❑ Lorsque *Y* la variable aléatoire à estimer est aléatoire, on aura recours aux estimateurs Bayesiens. Plusieurs cas de figures sont alors possibles :

- Lorsqu'on suppose *p(Y)* connue, on utilisera en fonction de la fonction de coût à minimiser, différents estimateurs tels celui du maximum à postériori (MAP).

- Si seules sont connues les moments d'ordre 1 et 2 de *p(Y)*et *p(X),* on utilise alors souvent l'estimateur linéaire non-biaisé à variance minimale. Le filtre de Wiener en est un exemple.

❑ Dans le cas où on ne possède aucune information statistique sur *X* et *Y* et que la seule dont on dispose est que *X* est une mesure bruitée de *fct(Y),* on adoptera l'estimateur des moindres carrés pour estimer *Y* qui s'affranchit de tout cadre probabiliste.

Estimateur linéaire à variance minimale

Il consiste à chercher une estimée $\hat{y}$ de y qui soit une fonction linéaire des observations, c'est-à-dire:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{n} h_i x_i = h^T x$$

Dans le cas de l'estimation en moyenne quadratique, le filtre *h* doit alors être déterminé de telle sorte que la variance de l'erreur d'estimation E{(y-$\hat{y}$)²} soit minimale :

$$\mathrm{E}\left\{(y-\hat{y})^2\right\} = \mathrm{E}\left\{(y-h^T x)^T (y-h^T x)\right\} = E\left\{y\, y^T\right\} - E\left\{y^T h^T x\right\} - E\left\{h\, x^T y\right\} + E\left\{h\, x^T h^T x\right\}$$

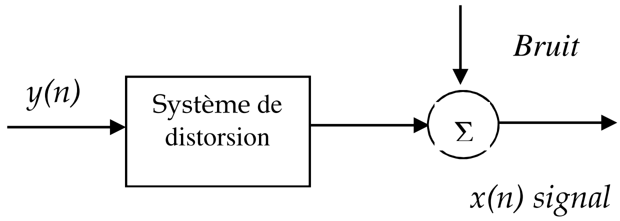
On commence par dériver par rapport à h puis on annule la dérivée, ce qui nousdonne

$$-E\{y^T x\} - E\{x^T y\} + 2h\ E\{x^T x\} = 0 \Rightarrow h = E\{y^T x\} / E\{x^T x\} = R_{yx} / R_{xx}$$

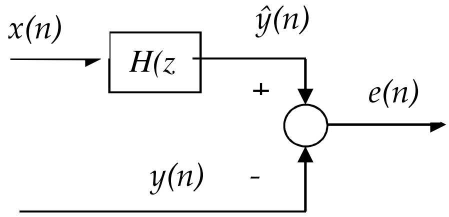
Application : **Filtre de Wiener**

Dans de nombreuses applications, les signaux temporels sont entachés d'un bruit que l'on souhaite supprimer ou du moins réduire. Comme le signal utile aléatoire occupe les mêmes bandes de fréquences que le signal parasite, on ne peut recourir au filtrage classique. Le filtre de Wiener apporte une solution à ce problème lorsque le processus est stationnaire. Les filtres de Wiener sont dits optimum au sens du critère de l'erreur quadratique moyenne entre leur sortie et une sortie désirée. .

La figure suivante illustre un problème courant d'estimation linéaire. *y(n)* correspond au signal aléatoire stationnaire qui nous intéresse mais n'est pas directement accessible. Seul *x(n)* l'est, il est obtenu après passage de *y(n)* dans un système linéaire suivi de l'addition d'un bruit aléatoire stationnaire *bb(n).*



Le problème qui se pose est comment retrouver *y(n)*à partir de *x(n).* Une solution consiste à filtrer *x(n)* de telle sorte que la sortie $\hat{y}(n)$ soit la plus proche possible de *y(n).* On peut mesurer la qualité de l'estimation par*e(n)* défini par : $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$



On cherche donc un filtre qui minimisera l'erreur. Il est pratique de chercher à minimiser $e^2(n)$ car c'est une fonction quadratique facilement dérivable. Par ailleurs, étant donné que les signaux sont aléatoires, la fonction coût à minimiser est l'erreur quadratique moyenne (MSE) définie par : $\xi(n) = E(e^2(n))$

Si on suppose que le filtre recherché H est un filtre RIF de longueur N, on peut en calculer les coefficients par résolution d'un système linéaire d'équations. $\mathrm{h} = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{N-1}]^T$

Le signal estimé $\hat{y}(n)$ peut alors s'écrire : $\hat{y}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)$

Rappelons que l'on cherche à minimiser $\xi(n) = E\{e^2(n)\} = E\left\{\left(y(n) - \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)\right)^2\right\}$

Pour en obtenir le minimum, il suffit de chercher de dériver et d'annuler la fonction coût par rapport aux variables b_i de la réponse impulsionnelle du filtre. La dérivée de la fonction coût par rapport au *j*ème point de la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$\frac{\partial \xi}{\partial b_j} = E\left\{\frac{\partial}{\partial b_j}\{e^2(n)\}\right\} = E\left\{2e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial b_j}\right\} = E\left\{2e(n)\frac{\partial}{\partial b_j}\{-b_j\ x(n-j)\}\right\}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial b_j} = -E\{2e(n)\,x(n-j)\} = -E\left\{2\left(y(n) - \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)\right)x(n-j)\right\}$$

En faisant l'hypothèse que les signaux *x(n)* et *y(n)* sont stationnaires, et en annulant la dérivée, on trouve : $R_{yx}(j)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i R_{xx}(j-i)$

Ce qui pour les différentes valeurs de *j*, nous donne le système d'équations suivantes à résoudre :

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \ldots\ldots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \ldots\ldots & R_{xx}(N-2) \\ & & \ldots\ldots & \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \ldots\ldots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{yx}(0) \\ R_{yx}(1) \\ . \\ R_{yx}(N-1) \end{bmatrix}$$

Il faut noter que l'obtention des coefficients du filtre repose sur la connaissance de la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée et de l'intercorrélation entre les signaux d'entrée et de sortie désirée.

<u>*Exemple 1*</u> : On suppose que l'observation $x(n)=y(n)+bb(n)$et que le bruit additif *bb(n)* est centré et non corrélé au signal. Simplifions les équations de Wiener-Hopf en conséquences:

$R_{yx}(k)=E\{ y(n)\ [\ y(n-k)+bb(n-k)\ ]\ \}= R_{yy}(k)$

$R_{xx}(k)=E\{(y(n)+bb(n))(y(n-k)+bb(n-k))\}= R_{yy}(k)+R_{bb}(k)$

Soit le système à résoudre suivant :

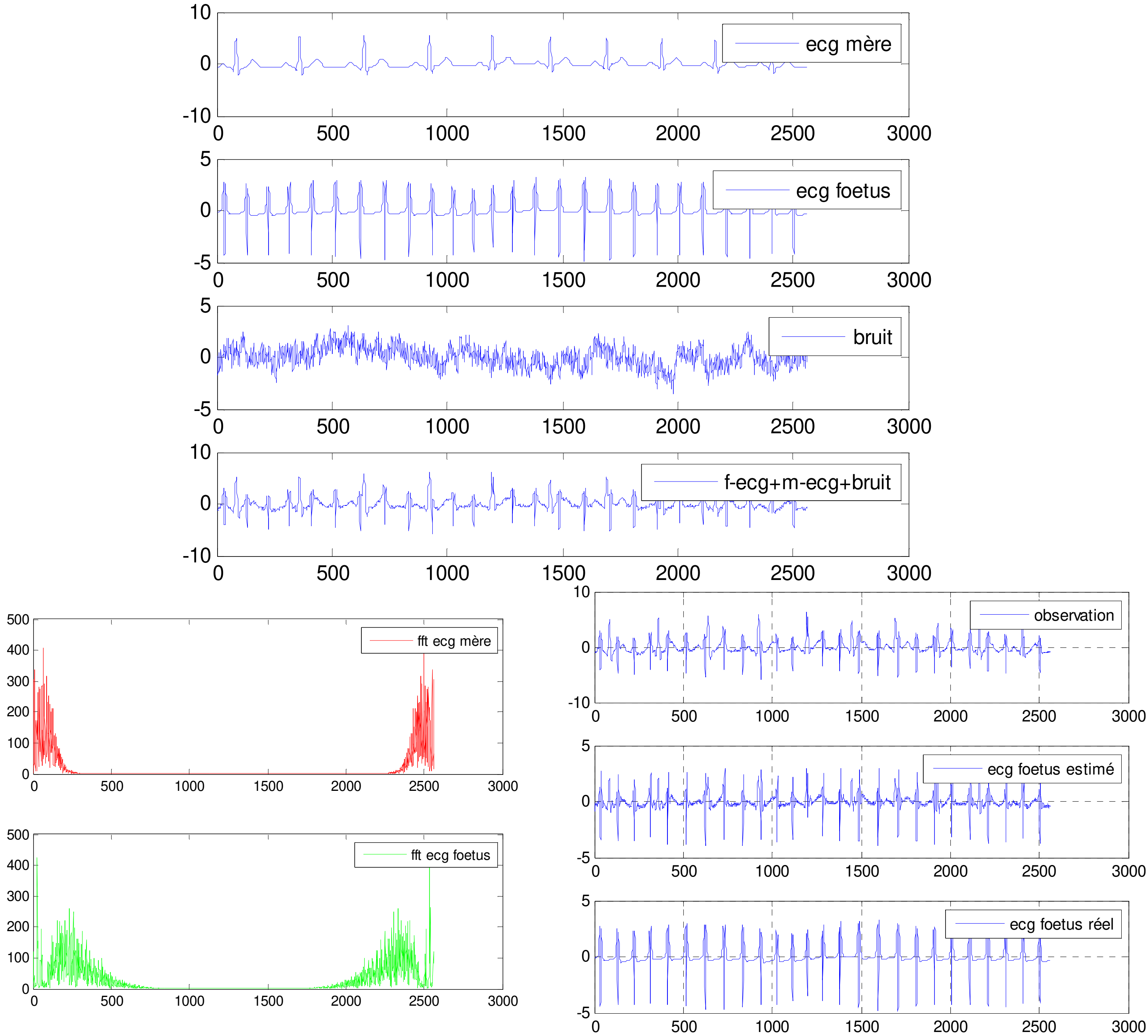
$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \ldots\ldots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \ldots\ldots & R_{xx}(N-2) \\ & & \ldots\ldots & \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \ldots\ldots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0)-R_{bb}(0) \\ R_{xx}(1)-R_{bb}(1) \\ . \\ R_{xx}(N-1)-R_{bb}(N-1) \end{bmatrix}$$

<u>*Exemple 2:*</u> On suppose que l'observation $x(n) = y(n) + bb(n)$

Le signal à estimer *y(n)*a pour la fonction d'autocorrélation $R_y(k)=\alpha^{|k|}$ $0<\alpha<1$. Il est décorrélé du bruit blanc *bb(n)* de variance σ_b^2. Cherchons h(n)tel que $H(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} 1+\sigma_b^2 & \alpha \\ \alpha & 1+\sigma_b^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad H(z)=\frac{1}{\left(1+\sigma_b^2\right)^2-\alpha^2}\left[(1+\sigma_b^2-\alpha^2)+\alpha\sigma_b^2 z^{-1}\right]$$

<u>*Exemple 3*</u>: Comme illustration du filtrage de Wiener, on prend souvent la mesure de l'activité cardiaque d'un fœtus à l'aide d'un électrocardiogramme (ECG) pris au niveau de l'abdomen de la mère (le signal *x(n))* et qui va naturellement être perturbé par l'ECG de celle-ci auquel se rajoute le bruit thermique des électrodes et des équipements électroniques. Pour retrouver l'ecg du foetus, on réalise une deuxième mesure fournissant l'ECG de la mère (le signal bb). On peut employer alors le filtre de Wiener pour estimer le signal *y(n)* représentant l'ECG du foetus.



On peut observer que les TF des deux signaux ecg (mère et foetus) occupent la même plage de fréquences. A partir des auto-corrélations de l'ECG mesuré sur l'abdomen *x(n)* et celui de la mère *bb(n)*, on retrouve les paramètres b_i du filtre qu'on appliquera à x(n) pour obtenir une estimée de y(n) soit l'ECG foetal.

Remarque

Quand les fonctions d'auto et d'intercorrélation ne sont pas connues (cas le plus courant), alors on va approcher le filtre optimal de Wiener en utilisant une boucle de retour et un algorithme de minimisation: c'est ce que l'on appelle **le filtrage adaptatif**. Dans ce cas, on remplacera la connaissance des fonctions de corrélation par une phase d'apprentissage permettant de modifier itérativement la réponse impulsionnelle du filtre.

TD n°5 : Notions d'estimation et Filtrage de Wiener

1. Les éléments d'une population possèdent un caractère X qui suit une loi de probabilité dont la densité est donnée par :

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{kx^3}{\theta^4} & si\ 0 < x < \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$$ Où k =cste et θ>0 est le paramètre inconnu.

- Déterminer la constante k.
- Montrer que l'estimateur $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ de θ est biaisé et en déduire un non biaisé.

2. Soit $(X_1, X_2, \ldots\ldots X_N)$ avec N>10 un échantillon aléatoire issu d'une population suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. $p(x)=p.\delta(x-1)+(1-p).\delta(x)$. Considérons les trois estimateurs du paramètre p :

$$\widehat{p}_1 = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i - 1\right)/N \qquad \widehat{p}_2 = \frac{1}{N/2}\sum_{i=1}^{N/2} X_{2i} \qquad \widehat{p}_3 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$$

- Comparer les trois estimateurs (consistance)

3. Soit $(X_1, X_2, \ldots\ldots X_N)$ une population de moyenne μ et de variance σ^2. On considère les deux estimateurs de la moyenne :

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \mu_2 = \sum_{i=1}^{N} a_i X_i / \sum_{i=1}^{N} a_i \qquad a_i \geq 1$$

- Montrer que ces deux estimateurs sont non biaisés.
- Lequel sera le plus favorable à un étudiant ?

4. Soient $(X_1, X_2, \ldots\ldots X_N)$, N variables aléatoires indépendantes suivant des lois de poisson de paramètre λ. Soient les estimateurs suivants du paramètre λ suivant :

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \qquad \hat{\lambda}_2 = \frac{x_1 + x_N}{2}$$

- Que signifient le biais et la variance pour un estimateur ?
- Calculer biais et variance des 2 estimateurs.
- Lequel est le plus efficace et pourquoi ?

5. On considère un processus de la forme $X(n) = \theta + W(n)$ où $W(n)$ est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance 1 tel que $W(n)$ et $W(j)$ sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que θ suit une loi $N(0,\sigma^2)$ indépendante de $W(n)$ $n \in Z$.

- Caractériser le filtre de Wiener permettant d'estimer θ à partir de $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-p+1}$.
- Calculer les coefficients du filtre.

6. On considère un processus de la forme $X(n) = b(n) + \alpha b(n-1) + W(n)$ où $W(n)$ est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 tel que $W(n)$ et $W(j)$ sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que $b(n)$ est une variable aléatoire uniforme à valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendante de$(W(n))_{n\in Z}$ et que de même, $b(n)$ et $b(j)$ sont indépendants si $n \neq j$ ($P(b(n) = 1) = P(b(n) = -1) = 1/2$.

- Construire un filtre qui estime b(n) .

7. On désire dé-bruiter un signal de parole z(n) corrompu par du bruit additif b(n) indépendant du signal sonore et ce, par filtrage de Wiener. On suppose connues quelques valeurs d'autocorrélation pour les deux signaux telles que :
$R_{ZZ}[0] = 1.5$; $R_{ZZ}[1] = 0.5$; $R_{ZZ}[2] = 0.25$; $R_{ZZ}[3] = 0.125$; $R_{ZZ}[4] = 0.0625$
$R_{bb}[0] = 1$; $R_{bb}[1] = 0.25$; $R_{bb}[2] = 0.0625$; $R_{bb}[3] = 0.015625$
-Pourquoi ne peut-on pas employer un filtre adapté ou un filtre moyenneur ?
-Donner les équations de Wiener-Hopf permettant d'estimer z(n).
-Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{z}(n)$.
-Exprimer H(z).

8. On considère un problème d'estimation de bruit b(n).
Le signal observé est $x(n) = s(n) + b(n) - b(n-1)$.
On suppose que le signal s(n) est centré avec $R_{ss}(n)=0.8^{|n|}$et qu'il est décorrélé du bruit dont l'autocorrélation est $R_{bb}(n)=0.8\delta(n)$.

- Déterminer les moyennes statistiques de s*(n)* et *b(n).*
- Quand à-t-on recours au filtre de Wiener?
- Donner les équations de Wiener-Hopf permettant d'estimer *b(n)*
- Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{b}(n)$.
- Exprimer $\hat{b}(n)$

Solutions

1. k=4 b=(4θ/5)-θ $\theta = \frac{5}{4N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

2. $p(x)=p\delta(x-1)+(1-p)\delta(x)$ $\mu_x=p$ $\sigma_x^2=p(1-p)$

- p_1	b=1/N	$\sigma^2=p(1-p)/N$	(=0	N→∞)	consistant
- p_2	b=0	$\sigma^2=2.p(1-p)/N$	(=0	N→∞)	consistant
- p_3	b=0	$\sigma^2=p(1-p)/10$	(≠0	N→∞)	non consistant

p_1 meilleur estimateur pour N→∞

3.μ_1 voir cours μ_2 : b=0 ,$\sigma^2= \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\sigma^2 / \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$

4. $b_{\lambda 1}=0$ $b_{\lambda 2}=0$ $\sigma_{\lambda 1}^2=\sigma^2/N$ $\sigma_{\lambda 2}^2=\sigma^2/2$ Le premier (variance plus petite pour N>2)
5. $R_{xx}(0)=1+\sigma^2$ $R_{xx}(k>0)= \sigma^2$ $R_{\theta x}(k)=\sigma^2$ $b_i=\sigma^2/(N\sigma^2+1)$
6. $R_{xx}(1:3)=(1+\alpha^2+\sigma^2, \alpha, 0)$ $R_{bx}(1:3) =(1, 0, 0)$
7. µz=0, µb=0, signal (parole) aléatoire,
8. µs=0, µb=0 , Sb(f)=0.8. Quand signal utile et bruit occupent même plage de fréquences.
$b_1=1/3$ et $b_2=-1/3$.

Exercices supplémentaires
1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale B(16; p), où p est un paramètreinconnu. On se propose d'estimer p a l'aide d'un échantillon de taille n de X : (x_1; .....;x_N). On se propose d'étudier les estimateurs suivants :

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \hat{p}_2 = \frac{1}{16N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \hat{p}_3 = \frac{1}{16}\left(X_1 + \frac{1}{N-1}\sum_{i=2}^{N} X_i\right)$$

- Lesquels sont sans biais, consistants.

- Lequel doit-on employer de préférence?

On rappelle que pour une loi Binomiale B(n; p) de paramètre n et p, moyenne et variance sont les suivants $m = np$ $\sigma^2 = np(1-p)$

2. Soit D la variable aléatoire représentant la durée d'une communication téléphonique. On suppose que la loi de D est la loi Uniforme U sur [0,θ], pour θ> 0. On veut estimer θ, pour cela, on observe un n échantillon : soit les durées D_i de N communications. Etudier l'estimateur suivant : $\hat{\theta} = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} D_i$

- Calculer son biais, sa variance, est-il consistant?

3.Soient σ_1^2, σ_2^2,.......σ_N^2 les N variances obtenues à partir de N échantillons aléatoires i.i.d. de tailles respectives n_1, n_2, ...n_N.

On considère l'estimateur de la variance suivant :$\hat{\sigma}^2 = \frac{n_1\sigma_1^2+n_2\sigma_{2+}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + n_N\sigma_N^2}{n_1+n_1+ \ldots\ldots n_N}$

- Est-ce un estimateur biaisé?
- S'il est biaisé, en proposer un non biaisé.

On rappelle que $E\{\hat{\sigma}_i^{\,2}\} = \{(x_i - \hat{m})^2\} = \{(x_i - m + m - \hat{m})^2\} = (n_i - 1)\sigma^2 / n_i$ (voir cours p.52)

4. Soient les variables aléatoires X_1 et X_2 i.i.d. de moyenne μ et de variance σ^2. Comparer les deux estimateurs de μ suivants:

- $\hat{\mu}_1 = \frac{X_1+X_2}{2}$ $\hat{\mu}_2 = \frac{aX_1+bX_2}{a+b}$ avec a et b réels.

5. Soient (x_1, x_2, ...x_N) des échantillons indépendants correspondant à une population dans la moyenne est μ et de variance σ^2 . On considère les 2 estimateurs suivants de la moyenne:

$\widehat{\mu_1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ $\widehat{\mu_2} = ax_1 + (1-a)x_2$ où $0 \le a \le 1$

- Calculer le biais et la variance de chaque estimateur.
- Etudier leur consistance.
- Lequel vous semble préférable (Justifier) ?

6. On considère un processus de la forme X(n) = S(n) − 2S(n-1) + S(n-2) + W(n) où W(n) est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 tel que W(n) et W(j) sont indépendants si n≠j. On suppose que S(n) suit une loi N (0,1) indépendante de (W(n)) n∈Z et que de même, S(n) et S(j) sont indépendants si n ≠ j.

- Donner l'équation de Wiener–Hopf permettant de calculer les coefficients du filtre(anti causal) de Wiener d'ordre 3 permettant d'estimer S(n-2) à partir de X(n) , X(n-1) et X(n-2) .

-Vérifier que si σ = 0, la solution est : S(n-2) = -(X(n) + 3X(n-1) + X(n-2))/5

7. On considère une observation x(n)=s(n)+w(n) où w(n) est un bruit blanc de variance σ^2 indépendant de x(n). On suppose aussi que le signal utile x(n) est centrée et réduit et que les x(n) sont indépendants.

- Dans quel cas, utilise-t-on le filtre de Wiener ?
- Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 3 permettant de retrouver le signal utile $\hat{s}(n)$.
- Donner l'expression de $\hat{s}(n)$ en fonction de x(n).

8. On considère un problème d'estimation d'un signal θ bruité.

Le signal observé est $x(n) = \theta + b(n)$.

On suppose que θ suit une loi uniforme sur $[-\theta_0, \theta_0]$ et qu'elle est décorrélée du bruit *b(n)* qui possède une DSP qui vaut σ^2.

- Que signifie θ et b(n) sont décorrélés ? quel est le lien avec l'indépendance?
- Calculer la moyenne et la variance de *b(n)*. Est-il SSL?
- Déterminer le filtre de Wiener d'ordre N permettant de retrouver le signal utile θ .
- Exprimer H(z) puis θ.

9. On considère un problème d'estimation d'un signal s(n) bruité..
Le signal observé est $x(n) = \alpha s(n) + b(n)$.
On suppose que s(n) et b(n) sont SSL et décorréles et que le bruit possède une DSP $S_{bb}(f)=0.25$.

- Rappeler les conditions d'applications du filtrage de Wiener
- Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{s}(n)$. On supposera que $R_{ss}(k)=2*0.5^{|k|}$
- Exprimer H(z) puis $\hat{s}(n)$

10. On considère un problème d'estimation d'un signal s(n) bruité et ayant subi un écho.
Le signal observé est $x(n) = s(n) + 0.5\,s(n-1) + b(n)$.
On suppose connue l'autocorrélation du signal utile et qu'elle a pour expression $0.5^{|k|}$ et l'on suppose que le signal utile est décorrélé du bruit dont l'autocorrélation est $R_{bb}(k)=0.25^{|k|}$.

1. Déterminer les moyennes statistiques de x*(n)* et *b(n)*
2. Donner les équations de Wiener-Hopf permettant d'estimer *s(n)*
3. Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{s}(n)$.
4. Exprimer $\hat{s}(n)$ et commenter

Solutions

1. $b_{\hat{p}1} = 15p$, $\sigma^2_{\hat{p}1} = \frac{16}{N}p(1-p) b_{\hat{p}2} = 0$, $\sigma^2_{\hat{p}2} = \frac{1}{16N}p(1-p) b_{\hat{p}3} = p$, $\sigma^2_{\hat{p}3} = \frac{N}{16(N-1)}p(1-p)$ le 2ème

2. $b_{\hat{\theta}} = 0$ $\sigma^2_{\hat{\theta}} = \frac{\theta^2}{3N}$

3. $b_{\widehat{\sigma^2}} = \sigma^2 - \frac{N\sigma^2}{n_1+n_1+ \dots\dots n_N} \hat{\sigma}'^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{1-\frac{N}{n_1+n_1+ \dots\dots n_N}}$.

4.même que exo3 **5**. Interro 2 17/18

6. Solutions données dans énoncés respectifs

7. Estimer un signal aléatoire stationnaire (le débruiter).
$R_{xx}(0)=1+\sigma^2$, $R_{xx}(k>0)= 0$,$R_{Sx}(k)=1$, $R_{sx}(k>0)= 0$ $\hat{s}(n) = \frac{1}{1+\sigma^2}x(n)$

8. E{ θ . b(n)} = $\mu_\theta . \mu_b$ Indépendants⇒Décorrélés $\mu_b=0$ et $\sigma_b^2=\sigma^2$ $b_i=\sigma^2/(N\sigma^2+1)$ voir exo 6
9. Signaux : utile et observation stationnaires et conjointement stationnaires connus
$R_{xx}(k)=\alpha^2R_{ss}(k)+ R_{bb}(k)$ $R_{sx}(k)=\alpha R_{ss}(k)$
10. même que 7

TP n° 5 : Notions d'estimation et Filtrage de Wiener

Buts : -Aborder les notions d'estimation ainsi que les propriétés des estimateurs (biais, variance) à travers un exemple

- étudier les estimateurs de la moyenne, de la variance, de la corrélation et de la DSP.
- Application du filtrage de Wiener

Exercice 1: On reprend les 3 estimateurs de la valeur d'une résistance R donnés comme suit :

$$\hat{R}_1 = \frac{\sum_{k=1}^{N} U(k)I(k)}{\sum_{k=1}^{N} I^2(k)} \qquad \hat{R}_2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{U(k)}{I(k)} \qquad \hat{R}_3 = \frac{\sum_{k=1}^{N} U(k)}{\sum_{k=1}^{N} I(k)}$$

Le programme suivant permet de simuler des courants et tensions bruitées et d'étudier les 3 estimateurs.

```
clc;clear all; close all;
randn('state', sum(100*clock));N=1000; it=1:N;R=1;
for k=2:N
    U=1+0.22*randn(1,k); I=1+0.22*randn(1,k);
R1(k)=sum(U.*I)/sum(I.^2);     R2(k)=sum(U./I)/k;     R3(k)=sum(U)/sum(I);
end
figure; plot(it(1:100),R1(1:100),'-.r',it(1:100),R2(1:100),':g',it(1:100),R3(1:100),'-b');
legend('R1','R2','R3');
figure; plot(it,R1,'-.r',it,R2,':g',it,R3,'-b');legend('R1','R2','R3');
for k=2:N
biais_R1(k)=mean(R1(1:k))-R;biais_R2(k)=mean(R2(1:k))-R;biais_R3(k)=mean(R3(1:k))-R;
end
figure ;subplot(311); plot(biais_R1); grid; legend('Biais de R1');
subplot(312); plot(biais_R2); grid; legend('Biais de R2');
subplot(313); plot(biais_R3);grid; legend('Biais de R3');
for k=2:N
var_R1(k)=var(R1(1:k));var_R2(k)=var(R2(1:k));var_R3(k)=var(R3(1:k));
end
figure ;subplot(311); plot(var_R1); legend('Var R1');
subplot(312); plot(var_R2); legend('Var R2');subplot(313); plot(var_R3);legend('Var R3');
```

1. Expliquer toutes les boucles.
2. Etudier le biais et la variance de chaque estimateur. Conclure.
3. Lesquels sont consistants? Lequel est le plus efficace?

Exercice 2: Utiliser le programme ci-dessus pour construire les estimateurs de la moyenne et de la variance

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \qquad \hat{\sigma}_1^{\,2} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k - m)^2 \qquad \hat{\sigma}_2^{\,2} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k - \hat{m})^2$$

1. Prendre m=1 et σ^2=2. Etudier le biais, la variance et la consistance de l'estimateur de la moyenne
2. Quelle est la différence entre les deux estimateurs de la variance ?
3. Comparer les 2 estimateurs de la variance sur les 100ères valeurs. Quel est le biais de chacun d'eux ?
4. Que remarque-t-on lorsque N augmente ? Les 3 estimateurs sont-ils efficaces?

Exercice 3 : Les deux estimateurs classiques de la fonction d'autocorrélation sont donnés par :

$$\hat{R}_{kk}(k) = \hat{R}_{kk}(-k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k} x(n)x(n+k) \qquad et \qquad \hat{R}_{kk}(k) = \hat{R}_{kk}(-k) = \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k} x(n)x(n+k)$$

```
clc; clear all; close all;
randn('state', sum(100*clock));
N = 200; f0=1; Fe=5*f0; Te=1/Fe; t=(1:N)*Te; m=0; v=2;tt=(-N+1:N-1)*Te;ff=Fe/2*(-N+1:N-1)/N;
bb=m+sqrt(v)*randn(1,N);Rbb1=xcorr(bb,'unbiased');Rbb2=xcorr(bb,'biased');
ss=cos(2*pi*f0*t); Rss1=xcorr(ss,'unbiased');Rss2=xcorr(ss,'biased');
figure ; subplot(2,1,1); plot(tt,Rbb1); subplot(2,1,2) ; plot(tt,Rbb2);
figure ; subplot(2,1,1); plot(tt,Rss1); subplot(2,1,2) ; plot(tt,Rss2);
figure;plot(ff,abs(fftshift(fft(Rss1)/N)),'r',ff,abs(fftshift(fft(Rss2)/N)),'b');
legend('unbiased','biased'); xlabel('Frequence (Hz)'); ylabel('Amplitude');
```

1. Calculer le biais des 2 estimateurs.
2. Des 2 estimations classiques de l'autocorrélation pour le bruit laquelle paraît la plus satisfaisante?
3. Même question pour l'autocorrélation de la sinusoide
4. Observer la DSP dans chaque et commenter en justifiant les différences (amplitude, lobes secondaires, etc.)

Exercice 4 : Il existe différentes méthodes d'estimation de la densité spectrale de puissance. Les méthodes les plus couramment utilisées sont :

- Périodogramme simple: $\hat{S}_{xx}(f)=\frac{1}{N}\left|X_T(f)\right|^2$ Corrélogramme: TF de la corrélation $\hat{S}_{xx}(f)=TF\left[\left\{\hat{R}_{xx}(k)\right\}\right]$
- Périodogramme moyenné **et** Périodogramme moyenné avec recouvrement (overlapping)

```
clc; close all; clear all;
N = 1024;    Te = 1/N;  Fe=N;    t = (0:N-1)*Te;  f1 = 100; f2 = 150; A1 = 2; A2=1.2; A3=4;
x = A1*cos(2*pi*f1*t) + A2*cos(2*pi*f2*t)+A3*randn(1,N); figure;plot(t,x);
% periodogramme
Sx1=abs(fft(x).^2)/N; ff1= Fe*(0:N/2-1)/N;
% spectre de l'autocorrélation
Rx=xcorr(x,'biased'); Sx2=fft(Rx); N2=length(Rx); ff2=Fe*(0:N2/2-1)/N2;
% Méthode de welch
T=256; SXXF=[];k=1;
for ii=1:T:N-T
    xt=x(ii+1:ii+T); Sx3(k,:)=abs(fft(xt,N)).^2/T;   k=k+1;
end
Moy_Sx3=mean(Sx3);
% Périodogramme moyenné avec recouvrement
T=256; Sx4=[];k=1;
for ii=1:T/2:N-T
    xt=x(ii+1:ii+T); Sx4(k,:)=abs(fft(xt,N)).^2/T;   k=k+1;
end
Moy_Sx4=mean(Sx4);
%affichage
figure; plot(ff1,Sx1(1:N/2),'b',ff2,abs(Sx2(1:N2/2)),'r');
legend('Périodo','Correlogramme'); xlabel('Frequence (Hz)'); ylabel('Amplitude');
AXIS([min(ff2) max(ff2) min(Sx1) max(Sx1)]);
figure; plot(ff1,Sx1(1:N/2),'b',ff1,Moy_Sx3(1:N/2),'r');
legend('Périodo','Périodogramme moyenné'); xlabel('Freq(Hz)'); ylabel('Amplitude');
figure; plot(ff1,Sx1(1:N/2),'b',ff1,Moy_Sx4(1:N/2),'r');
legend('Périodo','Périodogramme moyenné avec recouv'); xlabel('Freq(Hz)'); ylabel('Amp');
figure; plot(ff1,Moy_Sx3(1:N/2),'b',ff1,Moy_Sx4(1:N/2),'r');
legend('Périodo moyenné','Périodo moyenné avec recouv'); xlabel('Freq (Hz)'); ylabel('Amp');
```

1. Comparer les 4 techniques en faisant varier A1, A2 et A3 et commenter.
2. Rapprocher les fréquences et observer.
3. Commenter les quatre techniques d'estimation de la DSP en faisant varier N.
4. Quelle est l'avantage et l'inconvénient du moyennage?

Exercice 5: L'extraction d'ECG du fœtus se fait à partir de plusieurs électrodes placées en différents endroits du ventre de la mère ; mais les enregistrements obtenus sont des mélanges de l'ECG du fœtus noté (FECG) et celui de la mère noté (MECG) auquel se rajoute le bruit thermique des électrodes et des équipements électroniques d'où l'emploi du filtre de Wiener.

```
load mecg1.mat; load fecg1.mat; load noise1.mat; fe=256;
bb=0.1*noise1; mm=mecg1; obs=mecg1+fecg1+bb;
figure; subplot(411);plot(mecg1);legend ('ecg mère');
subplot(412);plot(fecg1);legend ('ecg foetus');
subplot(413);plot(noise1);legend ('bruit');
subplot(414);plot(obs);legend ('observation=fecg+mecg+bruit');
figure; subplot(211); plot(abs(fft(mecg1)),'r'); legend ('fft ecg mère');
subplot(212);  plot(abs(fft(fecg1)),'g');  legend ('fft ecg foetus');
% Détermination de l'ECG du foetus avec comme donnée l'observation et l'ECG
de la mère
%===== Détermination des coefficients du filtre
Ncoeff= 25; N=length(obs);
Rxx= xcorr(obs);Rxx=Rxx(N:N+Ncoeff-1);
Rmm= xcorr(mm); Rmm=Rmm(N:N+Ncoeff-1); Rbb= xcorr(bb); Rbb=Rbb(N:N+Ncoeff-1);
C = toeplitz(Rxx); D= Rxx-Rbb-Rmm; b = C\D;
%=====estimation du Signal
fecg1_est=filter(b,1,obs);
%===== Affichages
figure; subplot(311); plot(obs); legend ('observation');grid
subplot(312); plot(fecg1_est);legend ('ecg foetus estimé'); grid
subplot(313); plot(fecg1);legend ('ecg foetus réel'); grid
```

1. Pourquoi a-t-on utilisé l'instruction `D= Rxx-Rbb-Rmm; ?`
2. Quelles lignes du programmes faut-il changer pour retrouver l'ECG de la mère.