Signaux Aléatoires et Processus Stochastiques

(Support de cours)

Master 1 : Systèmes de Télécommunications

Faculté d'Electronique et d'Informatique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Site perso : http://perso.usthb.dz/~akourgli/

e-mails: akourgli@usthb.dz , assiakourgli@gmail.com

Programme

Chapitre 1. Notions de corrélation et de convolution (2 Semaines)

1. Rappels sur les systèmes linéaires et invariants dans le temps
2. Stabilité et causalité
3. Energie et Puissance
4. Notion de corrélation
5. Applications fondamentales des méthodes de corrélation
6. Filtre RII et RIF

Série d'exercices n°1

TP n°1 : Convolution et Corrélation

Chapitre 2. Notions de variables aléatoires (2,5 Semaines)

1. Variables aléatoires et probabilités

- Probabilité individuelle et probabilité conjointe

- Notion d'indépendance

2.Moments statistiques

3.Lois de probabilité usuelles (discrètes et continues)

4.Vecteurs aléatoires

- Lois de distribution marginales

- Changements de variables

- Covariance et coefficient de corrélation

- Cas du vecteur aléatoire Gaussien

Série d'exercices n°2

TP n°2 : Variables et Vecteurs aléatoires

Chapitre 3. Processus stochastiques et Signaux Aléatoires (2,5 Semaines)

1. Espérances ou Moments d'une fonction aléatoire

- Statistiques d'ordre 1 (moyenne, variance, etc.)

- Statistiques d'ordre 2 (corrélation et covariance)

3. Processus stationnaires

- Stationnarité au sens large et au sens strict

- Propriétés de la fonction de corrélation

- Puissance et DSP

- Bruit Blanc

4. Processus ergodiques

5. Exemples de processus stochastiques (Processus de Poisson, Gaussien et Markovien)

6. Statistiques d'ordre supérieur (Moments et cumulants, Polyspectres, processus non gaussiens,etc.)

Série d'exercices n°3

TP n°3: Processus aléatoires (Stationnarité et Ergodisme)

Chapitre 4 : Filtrage linéaire des signaux aléatoires (3 Semaines)

1.Processus aléatoires et SLIT

- Moyenne et autocorrélation

- Densité spectrale

- Formule des interférences

- Notion de filtre formeur

2. Filtrage adapté et Filtrage optimal

3. Modèles AR, MA, ARMA

Série d'exercices n°4

TP n°4 : Filtrage des signaux aléatoires

Chapitre 5 : **Estimation statistique et Estimation Spectrale**

- Propriétés des estimateurs (biais, variance, efficacité, etc.)

- Estimation des moments statistiques

- Estimation spectrale (périodogramme, corrélogramme)

- Filtrage de Wiener

Série d'exercices n°5

TP n°5 : Estimation et Filtrage de Wiener

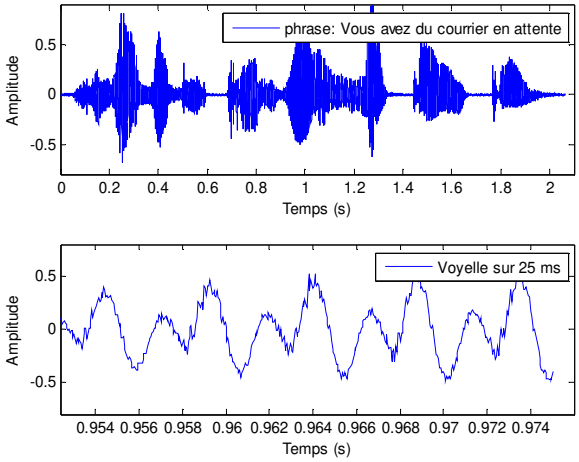
Chapitre 1. Notions de corrélation et convolution

Introduction

Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Il sert de vecteur à une information. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Les signaux sont des grandeurs électriques variant en fonction du temps $x(t)$ obtenues à l'aide de capteurs. Sur le plan analytique : Un signal sera une fonction d'une variable réelle, en général le temps.

Exemples :

- Onde acoustique : délivré par un micro (parole, musique, …)
- Signaux biologiques : EEG, ECG
- Tension aux bornes composant électronique
- Signaux géophysiques : vibrations sismiques
- Finances : cours du pétrole
- Images, Vidéos



Remarque: Tout signal physique comporte une *composante* aléatoire (perturbation externe, bruit, erreur de mesure, etc …). **Le bruit** est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.). La différentiation entre le signal et le bruit est artificielle et dépend de l'intérêt de l'utilisateur : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur des télécommunications par satellites et un signal utile pour les radioastronomes.

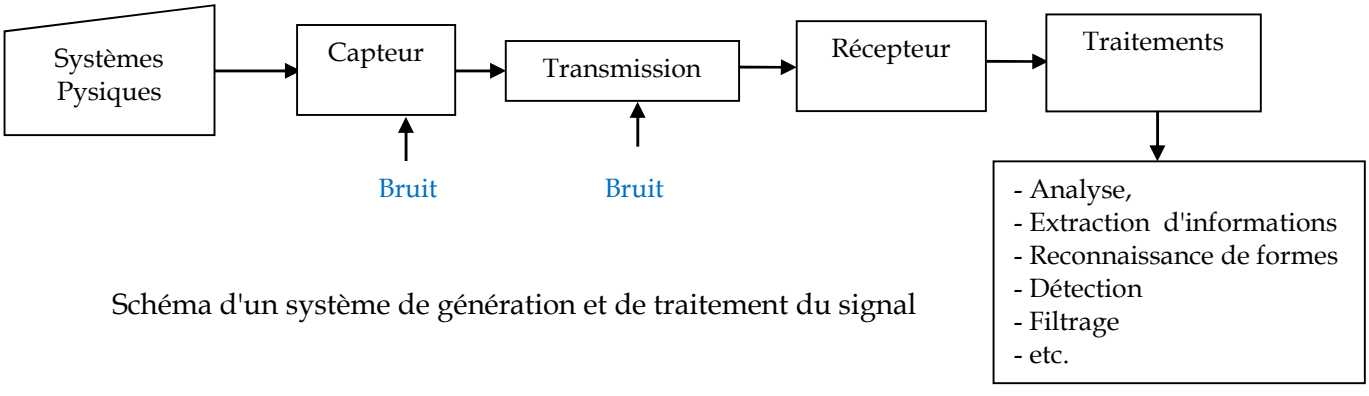


Schéma d'un système de génération et de traitement du signal

Les fonctions du traitement du signal peuvent se diviser en deux catégories : l'élaboration des signaux (incorporation des informations) et l'interprétation des signaux (extraction des informations). Les principales fonctions intégrées dans ces deux parties sont les suivantes [1]:

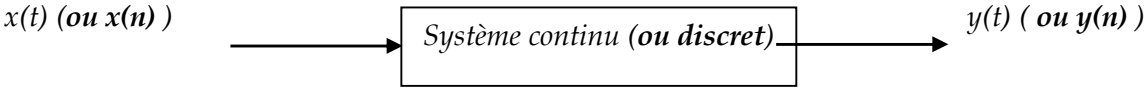
Élaboration des signaux : synthèse, modulation, codage/compression, etc.

Interprétation des signaux : filtrage, détection, identification, analyse, mesure, etc.

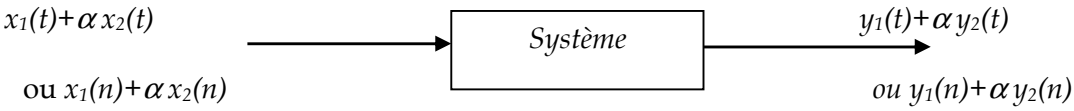
1. *Théorie des systèmes linéaires et invariants dans le temps (SLIT) discrets et continus*

Un système linéaire est un modèle de système qui applique un opérateur linéaire à un signal d'entrée. C'est une abstraction mathématique très utile en automatique, traitement du signal, mécanique et télécommunications. Les systèmes linéaires sont ainsi fréquemment utilisés pour décrire un système non linéaire en ignorant les petites non-linéarités.

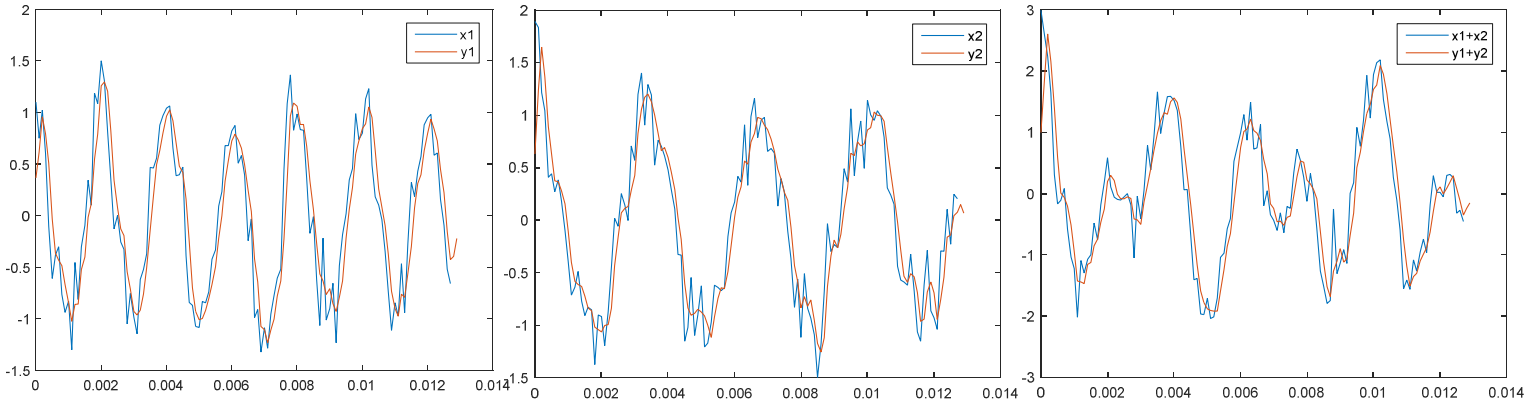
Un système est continu si à une entrée continue $x(t)$, il fournit une sortie continue $y(t)$. Un système discret fera correspondre à une suite d'entrées discrètes $x(n)$ une suite de sorties discrètes $y(n)$.



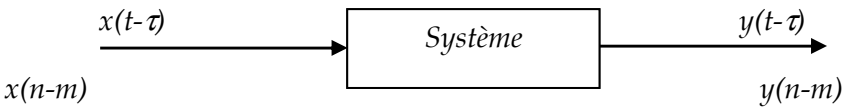
- Le système sera dit linéaire si quand on applique une entrée k x(t) (*ou* $k.x(n)$) , la sortie sera k.y(t) (*ou* $k.y(n)$). Si deux entrées$x_1(t)$ et $x_2(t)$ engendrent deux sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$ alors $x_1(t) + x_2(t)$ engendrera $y_1(t) + y_2(t)$. (*De même, dans le cas discret : si deux entrées* $x_1(n)$ *et* $x_2(n)$ *engendrent deux sorties* $y_1(n)$ *et* $y_2(n)$ *) alors* $x_1(n) + x_2(n)$ *engendrera* $y_1(n) + y_2(n)$)



Exemple



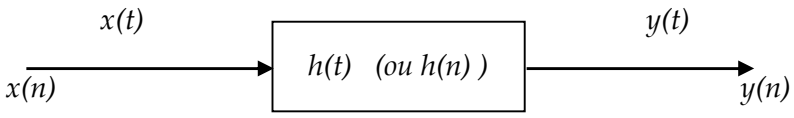
- S'il y a invariance dans le temps, une translation de l'entrée $x(t) \Rightarrow x(t-\tau)$ ($ou x(n) \Rightarrow x(n-m)$) se traduira par une même translation dans le temps de la sortie $y(t) \Rightarrow y(t-\tau)$.($ou y(n) \Rightarrow y(n-m)$).



Si le système est invariant, cela implique que le système réagit de la même façon quel que soit l'instant auquel nous appliquons ses excitations. Cette propriété exprime que la caractéristique du système ne dépend pas de l'origine du temps, on parle encore de stationnarité.

Convolution

Si les hypothèses de linéarité et d'invariance temporelle sont vérifiées, on peut caractériser le système par sa réponse impulsionnelle h(t) (*ou h(n)*).



On peut en déduire l'effet d'une entrée quelconque sous la forme d'une convolution. Cette dernière est l'opération de traitement de signal la plus fondamentale. Elle indique que la valeur du signal de sortie à l'instant t *(ou* n *)*est obtenue par la sommation (intégrale) pondérée des valeurs passées du signal d'excitation *x(t) (ou x(n)).* La fonction de pondération est précisément la réponse impulsionnelle*h(t) (ou h(n))*:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

La réponse impulsionnelle *h(t)* (*ou h(n)*)est le signal qu'on obtient en sortie *y(t)=h(t)*(ou *y(n)=h(n)*) si on applique en entrée une impulsion "de Dirac" *x(t)=δ(t)* (*ou x(n)=δ(n)*). Ainsi, le Dirac est l'élément neutre de l'opération de convolution:

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$\delta(n) * x(n) = x(n)$$

Quelques propriétés du Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_o)dt = x(t_0)$$

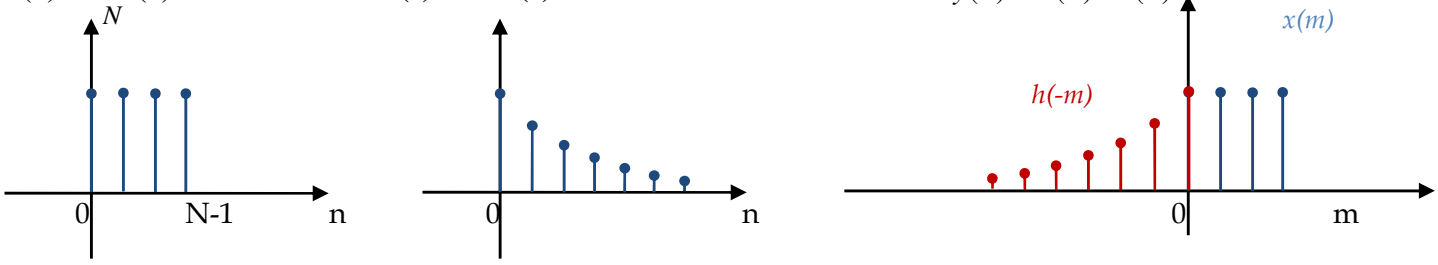
$$x(t)\delta(t-t_o) = x(t_o)\delta(t-t_o)$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

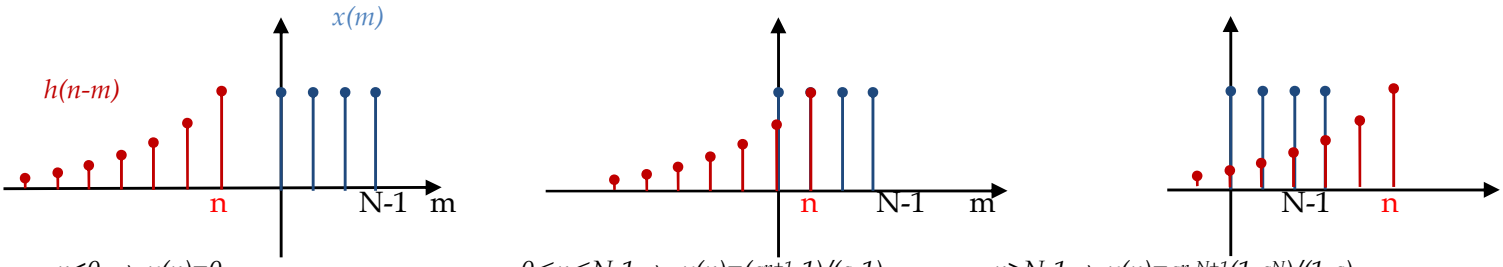
Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la somme du produit$x(\tau)h(t-\tau)$*(ou* $x(m)h(n-m)$) . Le signal $h(t-\tau)$ *(ou h(n-m)*) est simplement le signal initial$h(\tau)$ (*ou h(m)*), retourné dans le temps pour donner $h(-\tau)$ (ou *h(-m)*) puis translaté de t (*ou* n). En calculant alors l'ensemble des produits obtenus en faisant « glisser » h, c'est-à-dire pour tous les décalages de t *(oun*) , on obtient le produit de convolution pour tout t (*ou* n).

Exemple 1 : (en discret)

$x(n) = rect(n)$ $h(n)=a^n U(n)$ $0<a<1$ $y(n) = x(n) * h(n)$

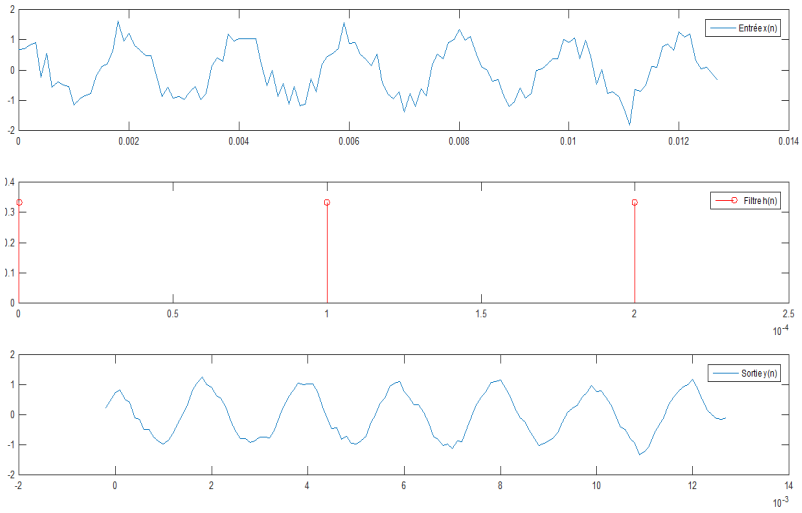


On distingue 3 cas :



$n<0 \Rightarrow y(n)=0$ $0\leq n\leq N-1 \Rightarrow y(n)=(a^{n+1}-1)/(a-1)$ $n>N-1 \Rightarrow y(n)=a^{n-N+1}(1-a^N)/(1-a)$

Exemple 2 :(Voir TP n°1)



$$h(t) = \frac{1}{T}\prod_T(t) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\,d\tau$$

$$h(n) = \frac{1}{N+1}\prod_{N+1}(n) \Rightarrow y(n) = \frac{1}{N+1}\sum_{m=-N/2}^{N/2} x(n+m)$$

Exemple 3: Soit le signal x(n) = {2, -1, 3} et h(n) = {1, 2, 2, 3}

Calculer y(n)=x(n)*h(n)

Pour des séquences finies, on peut utiliser la méthode des colonnes

Y(n)={2, 3, 5, 10, 3, 9}

h[n]	=	1	2	2	3		
x[n]	=	2	-1	3			
		2	4	4	6		
			-1	-2	-2	-3	
				3	6	6	9
		2	3	5	10	3	9

Remarques

Si on applique à un SLIT une entrée sinusoïdale réelle ou complexe de fréquence f_0, alors, la sortie sera une sinusoïde dont l'amplitude et la phase pourront être modifiées mais qui conservera la même forme

(une sinusoïde) et la même fréquence f_0. On dit que les sinusoïdes sont les fonctions propres des SLIT.

Un système linéaire invariant est un système dont le comportement dans le temps, peut-être décrit par :

- soit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants: $\sum_{i=0}^{M} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{N} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$

- soit par une équation aux différences,pour le cas discret: $\sum_{i=0}^{M} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} b_i x(n-i)$,

2. *Stabilité et causalité*

Une contrainte importante pour la formalisation de nombreux problèmes est de respecter la notion de *causalité* (les effets ne peuvent pas précéder la cause). Dans le cas des SLIT, cette causalité se traduit par le fait que pour: $h(t) = 0$ *pour* $t<0$ (*ou* $h(n) = 0$ *pour* $n<0$).

$x(t) = 0,\ t < t_0$ alors $y(t) = 0,\ t < t_0 \quad \Rightarrow \qquad h(t) = 0,\ t < 0$,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

Ce qui noud donne en discret :

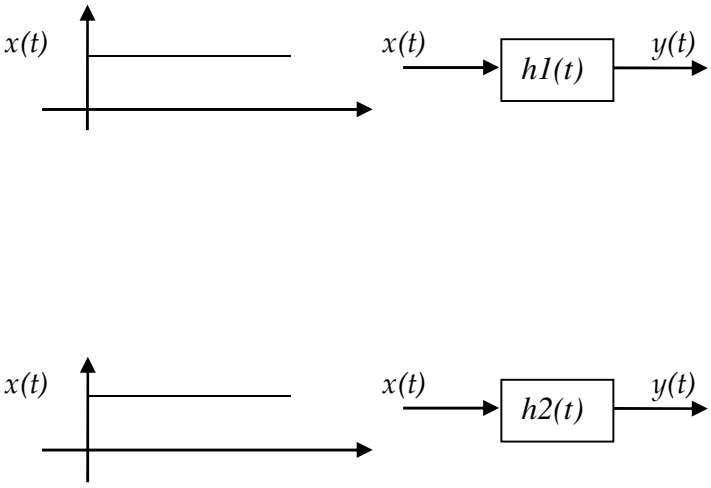
$x(n) = 0,\ n < n_0$ alors $y(n) = 0,\ n < n_0 \qquad \Rightarrow \qquad h(n) = 0,\ n < 0$,

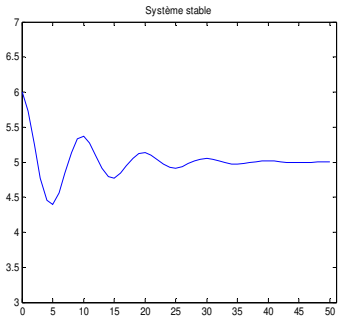
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{+\infty} x(n-m)h(m)$$

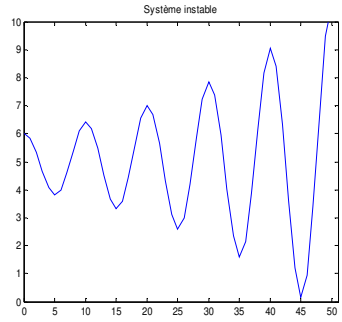
- si h et x sont causaux $y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(n-m)x(m)$

<u>*Remarque*</u>:Nous pouvons envisager mémoriser les signaux d'entrée et faire un traitement de ceux-ci en temps différé, les systèmes utilisés ne sont plus alors nécessairement causaux car pour élaborer la sortie à l'instant t_i(*ou* n_i), nous disposons en mémoire des entrées aux instants suivants. C'est souvent le cas en traitement d'image, en traitement de parole effectué après mémorisation du signal à traiter.

Une autre notion fondamentale est la *stabilité* des systèmes. La propriété de stabilité des systèmes bouclés est non seulement une performance mais une exigence pour le bon fonctionnement d'une boucle d'asservissement ou de régulation. Une boucle instable est une boucle inutilisable. La définition la plus courante de cette stabilité est la suivante :







On dit qu'un système est stable si, en lui appliquant une entrée bornée quelconque, la sortie reste bornée, ce qui implique dans le cas des SLIT:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < M \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n} |h(n)| < \infty$$

Remarque *:Pour le reste, les définitions seront données pour le cas discret.*

3. Energie et puissance

Toute transmission d'information s'accompagne de transferts d'énergie. En effet, les signaux continus ou discrets sont essentiellement caractérisés par l'énergie ou la puissance qu'ils véhiculent. Ce sont les seules grandeurs physiques auxquelles sont sensibles les détecteurs. Beaucoup de capteurs physiques mesurent une énergie ou une quantité quadratique. Par exemple, les capteurs optiques mesurent une intensité, les compteurs d'électricité mesurent une énergie, etc. Compte tenu de la définition fondamentale, l'énergie du signal entre les instants t et t+dt est : $|x(t)|^2$ dt (puissance instantanée multipliée par le temps).

Soit un signal x(n) à temps discret, tel que $\sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$ existe et converge. Alors le signal est dit à énergie finie et la valeur de cette somme est appelée énergie du signal :

$$E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Exemples:

x(n) = Rect(n/N) énergie finie. x(n) = a (constante) et x(n) = A sin($2\pi f_0 n$) ne sont pas à énergie finie

Pour un signal périodique, cette somme ne converge pas. On peut néanmoins définir la puissance d'un signal x(n) périodique de période N par :

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{-N/2}^{N/2-1}|x(n)|^2 \qquad \text{ou} \qquad P_x = \frac{1}{2.N}\sum_{-N}^{N-1}|x(n)|^2$$

Dans le cas général, on parle de signaux à puissance moyenne finie définie par:

$$P_x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{-N/2}^{N/2-1}|x(n)|^2 \qquad \text{ou} \qquad P_x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2.N}\sum_{-N}^{N-1}|x(n)|^2$$

Exemples:

Signal continu x(t)=a, A sin($2\pi f_0 t$) , signaux périodiques,échelon unité, peigne de Dirac.

Il existe des signaux ni périodiques, ni d'énergie finie, pour lesquels la puissance ne peut être définie, comme par exemple la rampe x(n)=n. Il s'agit là de définitions mathématiques, en pratique, un signal mesuré ne l'est jamais sur un intervalle de temps infini. On peut commencer à visualiser un signal à un instant qu'on prendra comme origine des temps, et dans ce cas on arrêtera son examen au bout d'un temps T_{obs} :

$$E_x = \sum_{n=0}^{Nobs}|x(n)|^2$$

Remarque

Signal à énergie finie ⇒ puissance nulle

Signal à puissance finie ⇒ énergie infinie

Le calcul de l'énergie ou la puissance permet d'obtenir une première caractérisation du signal. Par ailleurs, la théorie du signal a largement développé des méthodes d'étude basées sur la corrélation pour caractériser le comportement temporel du signal.

Exercice d'application :

Calculer l'énergie et la puissance des signaux: $\prod_7(n)$,A cos($2\pi f_0 n$) .

4. Corrélation et auto-corrélation

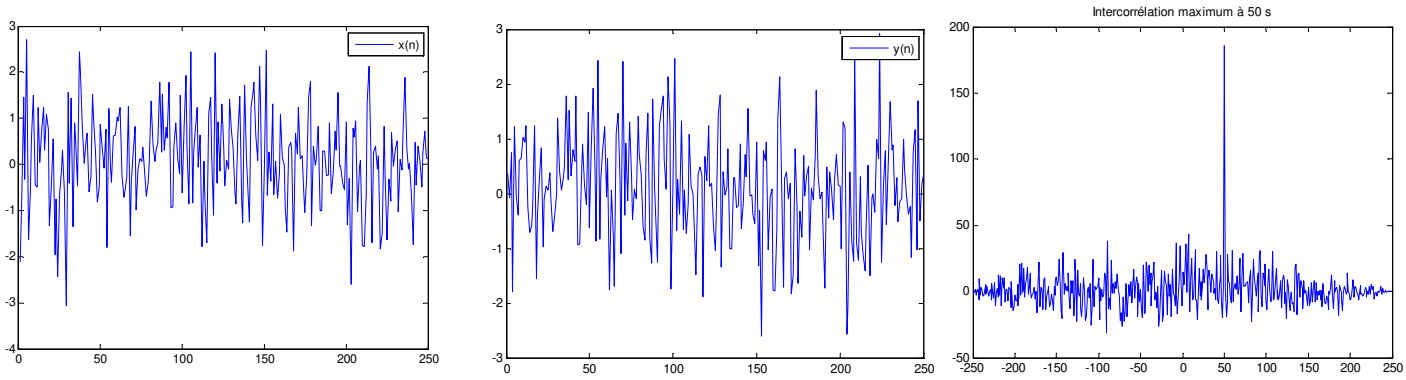
La fonction de corrélation permet de mesurer le degré de ressemblance entre deux signaux en fonction d'un décalage. Considérons x(n) et y (n) deux signaux d'énergie finie, la fonction d'intercorrélation $R_{x,y}(k)$ est définie par: $R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,y^*(n-k)$

L'inter-corrélation entre x(t) et y(t) atteint un maximum pour un retard k si x(n)=y(n-k)

Pour des signaux à puissance moyenne finie, elle vaut : $R_{xy}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n)\,y^*(n-k)$

Exemples

Soient un signal aléatoire et sa version décalée de 50s. On remarque que les signaux se ressemblent le plus quand y(n) est décalé de 50 secondes.



Pour l'auto-corrélation, on remplace y(n) par x(n) on obtient l'expression de l'auto-corrélation pour les signaux à énergie finie: $R_{xx}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-k)$

L'auto-corrélation permet de détecter des régularités, des profils répétés dans un signal comme un signal périodique perturbé par beaucoup de bruit (Voir TP n°1)

Propriétés :

- Pour k= 0, on retrouve l'énergie du signal $R_{xx}(0) = E_x$ et $R_{xx}(k)$ est maximale en k=0

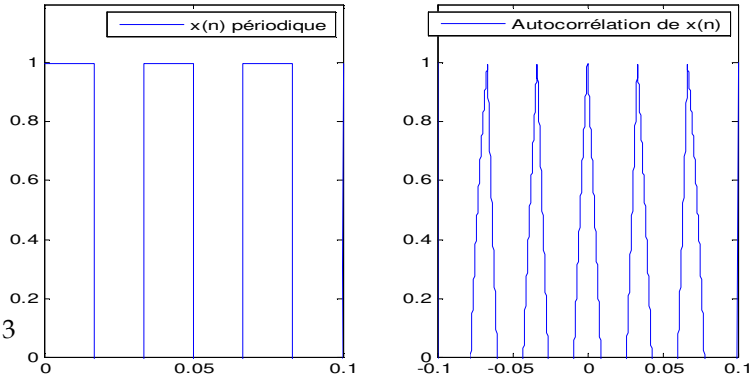
- Si x(n) est réel, l'auto-corrélation est réelle et paire.

- L'auto-corrélation d'un signal de durée N aura une taille 2*N-1

Auto-corrélation des signaux périodiques : Le calcul sur une seule période suffit. L'auto-corrélation d'un signal périodique est-elle même périodique. Par définition, le signal périodique ressemble parfaitement à lui-même, décalé d'une ou plusieurs périodes.

- signaux périodiques

$$R_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n)\, x^*(n-k)$$

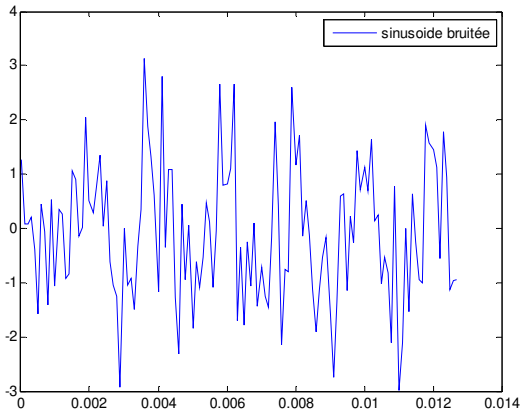


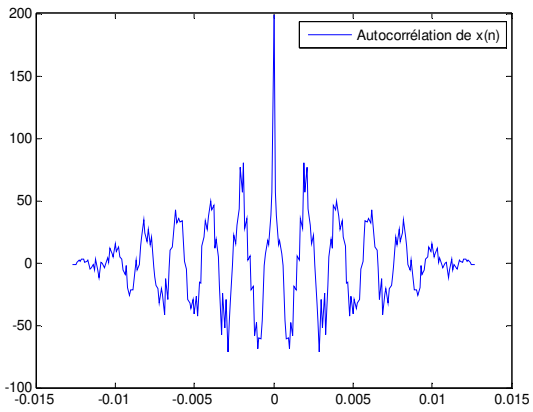
Exercice d'application Soit le signal x(n)=(n+1) pour n=0 à 3

Calculer l'auto-corrélation de x et déduire son énergie

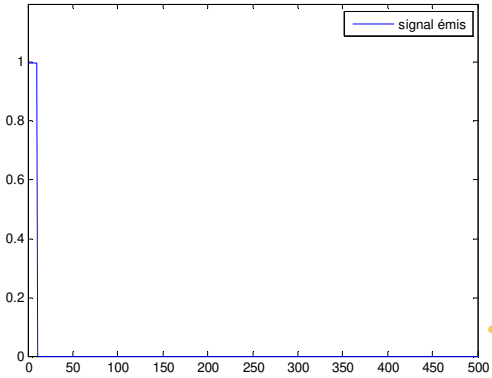
5. Applications fondamentales des fonctions de corrélation

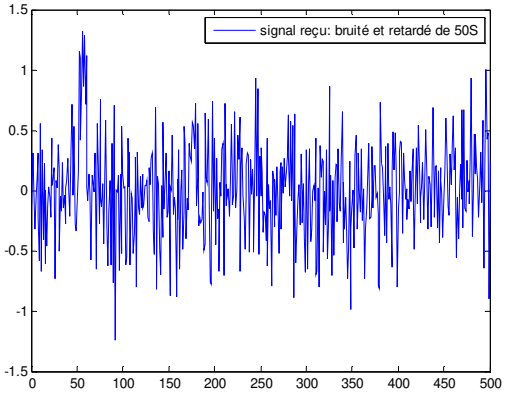
Extraction d'un signal noyé dans du bruit, mesure d'un temps ou retard, détection d'un signal périodique (Voir TP n° 1).L'exemple ci-dessous illustre l'auto-corrélation d'un signal sinusoïdal d'amplitude 1 noyé dans du bruit Gaussien de variance 1.

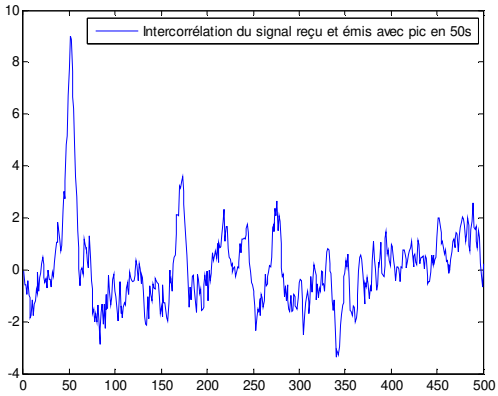




La corrélation est largement utilisée dans les systèmes radar. Ainsi, pour détecter un avion, on envoie une impulsion, puis on reçoit une version retardée, atténuée et bruitée de cette impulsion . L'intercorrélation du signal reçu et émis présentera un pic à l'instant correspondant au retard.

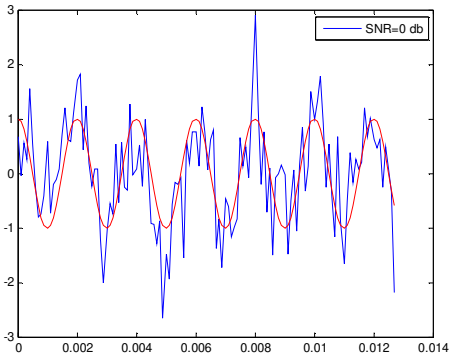


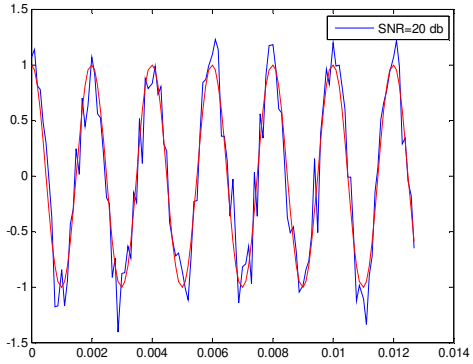




Remarque: La notion de bruit est relative, elle dépend du contexte. Le rapport signal/bruit désigne la qualité de la transmission d'une information par rapport aux parasites. Il est défini par:

$SNR_{db}=20\ Log(P_S/P_B)$





6. Filtres à réponses impulsionnelles finies ou infinies (RIF et RII)

- Si les a_i sont ≠ de 0, le système est dit récursif (RII), il est non récursif s'il ne dépend que des $x(n-i)$ (RIF)

- Si le système est à réponse impulsionnelle de durée finie (RIF), alors : $y(n)=\sum_{m=0}^{K} h(m)x(n-m)$

Dans ce cas, le système numérique est une fenêtre centrée sur les K plus récents échantillons.

- Si le système est à réponse impulsionnelle de durée infinie (RII) : $y(n)=\sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n-m)$

Dans ce cas, il est nécessaire de connaître tous les échantillons présents et passés, le système à une mémoire de longueur infinie.

*Exemple*1 $y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_2x(n-2)+.....+a_kx(n-k)$ est l'équation aux différence finies d'un filtre RIF

avec comme réponse impulsionnelle $h(n)=\delta(n)+a_1\delta(n-1)+a_2\delta(n-2)+.....+a_k\delta(n-k)$ qui, on peut le constater,est bien finie.

Exemple 2 $y(n)=x(n)+a_1y(n-1)$ est l'équation aux différence finies d'un filtre RII

avec $y(n-1)=x(n-1)+a_1y(n-2) \Rightarrow y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_1^2y(n-2)$

de même $y(n-2)=x(n-2)+a_1y(n-3) \Rightarrow y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_1^2x(n-2))+a_1^3y(n-3)$

$\Rightarrow y(n)=x(n)+a_1x(n-1)+a_1^2x(n-2))+a_1^3x(n-3)+a_1^4x(n-3)+.....+a_1^my(n-m)$

En poursuivant le procédé à l'infini $y(n)$ dépend d'une infinité de $x(n-k)$ ce qui en fait un filtre RII.

Exemple d'application

Les séquences $x(n)$ (réel) et $y(n)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie d'un système discret. Pour chaque cas, identifiez celles représentant

a) des systèmes linéaires, b) des systèmes causals, c) des systèmes invariants aux translations de n,

d) des systèmes assurément ou possiblement stables (en fonctions des constantes)

1. $y(n) = x(n) + bx(n-1)$ 2. $y(n) = x(n) + bx(n+1)$ 6. $y(n) = b^{x(n)}$ b : constante réelle

3. $y(n) = nx(n)$ 5. $y(n) = x(n)e^n$ 7. $y(n) = |x(n)|$

4. $y(n) = x(n)\sin(2\pi f_0 n)$

a) Tous sauf 6 et 7 b) Tous sauf 2

c) Les systèmes 1, 2, 6 et 7 d) 1 (b finie), 2 (b finie), 4, 6 (b finie) et 7.

Série n° 1

1. Représenter les signaux suivants pour les cas continus et discrets

$\prod_{5}(n-1)$, $\prod_{N+1}(n-1)$, n.U(n), (n-2).U(n-3), (-n+3)U(n-2)U(-n+3), e^{-an}.U(n-1) où N est pair

2. Donner l'expression du signal échelon U(n) en fonction du signal signe Sgn(n).

3. Les signaux suivants sont-ils à énergie finie, à puissance moyenne finie, ou ni l'un, ni l'autre ? Calculer, dans chaque cas, l'énergie totale et la puissance moyenne totale (a>0).

- Arect(n/N+1) Asin(2πf$_0$n) Asin(2πf$_0$n).U(n) U(n)
- n.U(n) Ae^{-an}u(n) Ae^{-an}

4. Calculer la sortie y(n) lorsque : x(n) =δ (n–n$_0$) +δ(n–n$_1$) et h(n) = e^{-an}

5. Soit le signal échelon f(n)= E$_0$ U(n), d'amplitude E$_0$.

- Représenter graphiquement et calculer le produit de convolution de f(n) par lui-même (auto-convolution).
- Faire de même pour le cas continu

6. Calculer l'autocorrélation des signaux suivants pour les cas continus et discrets

- Arect(n/N) Asin(2πf$_0$n) 5 δ$_N$(n) Bcos(2πf$_0$n)

7. Soit le signal x(n)=e-an U(n) transmis à travers le système h(n) dont la réponse impulsionnelle est h(n) est donnée par h(0)=h(1)=h(2)=1/3.

- Calculer l'énergie et la puissance du signal d'entrée
- Calculer et tracer l'autocorrélation de h(n)
- Déterminer le signal y(n) résultant de la convolution numérique x(n)*h(n).

8. Etudier la linéarité, la causalité, l'invariance et la stabilité des systèmes définis par les équations aux différences finies:

	Linéarité	Invariance	Causalité	Stabilité
y(n)= 2 .n. x(n-1)				
y(n)+y(n+1)=2 x(n+1)^2				
y(n)= |x(n-1)-0.5x(n+1)|				
y(n)=1/e^n. x(n)				

Solutions

2. U(n)=1/2(sgn(n)+1)

3. E=A^2.(N+1) Pm=0, E=∞ Pm=A^2/2, E=∞Pm=A^2/4, E=∞ Pm=1/2
E=∞ Pm=∞, E=A^2/(1-e^{-2a}) Pm=0 , E=∞ Pm=∞, E=2A^{2}N(1+N) Pm=0

4. $x(n) = e^{-a(n-n0)} + e^{-a(n-n1)}$

5. f(n)*f(n)= E$_0^2$.(n+1) pour n≥0 et 0 ailleurs

6. A^{2}N.Λ$_N$(k) A^2/2.cos(2πf$_0$k) 25δ$_N$(k) B^2/2.cos(2πf$_0$k)

7. E=1/(1-e^{-2a}) P=0 R$_h$(0)=1/3, R$_h$(±1)=2/9, R$_h$(±2)=1/9 y(n)=1/3 (x(n)+x(n-1)+x(n-2)

8. O-N-O-N N-O-O-N N-O-N-O O-N-O-N

Exercices supplémentaires

1. Donner l'expression du signal x(n) = Arect[(n-n_0)/N+1]=A $\prod_{N+1}(n-n_0)$ à l'aide du signal signeseulement. Justifier graphiquement la solution trouvée (N supposé pair).

2. Soient Calculer $x_1(n)*x_2(n)$ avec(a,b)$\in \Re^+ et$ a > b $x_1(n)=e^{-a.n}.U(n)$ $x_2(n)=e^{-b.n}.U(n)$

3. Calculer et esquisser graphiquement pour les cas $n_0 < n_1$ et $n_0 > n_1$ le produit de convolution z(n) = x(n)*y(n) pour les cas suivants :

X(n) = A[δ(n+n_0) + δ(n-n_0)] et Y(n) = B δ(n) + ½B[δ(n+n_1) + δ(n-n_1)]

4. La fonction triangulaire est définie de la manière suivante: $E^2 N.\Lambda_N(n)=\begin{cases} E^2(n+1+N) & -N\le n\le 0 \\ -E^2(n-1-N) & 0\le n\le N \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

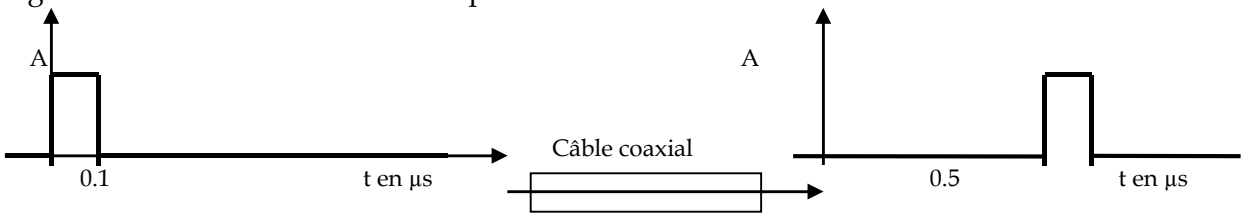
- Vérifier analytiquement et graphiquement la relation $E^2.N.\ \Lambda_N(n) = E.\Pi_{N+1}(n) * E.\Pi_{N+1}(n)$,
- En déduire l'auto-corrélation du signal et son énergie (devoir à rendre)

5. Soient x(n) et h(n) deux signaux numériques provenant respectivement de l'échantillonnage d'un signal x et de la réponse impulsionnelle h d'un système :

x(n)={0,0,0,0.5,1.5,0.5,1.5,0,0,0} et h(n)={0.5,0.5}

- Calculer l'énergie de chaque signal
- Calculer et tracer l'autocorrélation de h(n)
- Calculer la séquence y résultant de la convolution numérique x(n)*h(n).
- Interpréter ces résultats du point de vue des plages de fréquences éliminées et conservées.
- Quel est le signal d'entrée qui permettrait de connaître le signal h(n) ?
- Proposer un signal h(n) permettant de réaliser un filtrage passe haut du signal x(n)

6. On désire déterminer la vitesse de propagation d'une impulsion dans un câble coaxial sans perte. L'intensité est alors une fonction de la longueur de câble traversé 'l' et du temps 't'. Les mesures relevées donnent l'évolution de cette intensité pour l=0 correspondant au signal en entrée du câble et pour une longueur l =100m en fonction du temps.



- A partir de la figure ci-dessus, écrire les 2 signaux sous forme de 2 portes de mêmes amplitude et largeur en déterminant le centre de chacune (décalage).
- Calculer la fonction de corrélation entre les 2 signaux.
- Montrer que la détection du maximum de la fonction de corrélation permet de calculer la vitesse de propagation dans le câble. Calculer cette vitesse.

Solutions

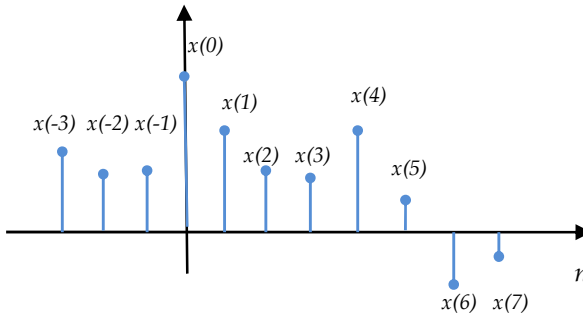
1. x(n)= A/2 [sgn(n-(n_0-N/2))- sgn(n-(n_0+N/2+1))] **2.** $x(n)=\begin{cases} 0 & n<0 \\ e^{-bn}\dfrac{1-e^{(b-a)n+1}}{1-e^{(b-a)}} & n>0 \end{cases}$

3. X(n)*Y_1(n)=AB[δ(n+n_0) + δ(n-n_0)]+AB/2[δ(n+n_0+n_1) + δ(n-n_0-n_1)+ δ(n-n_0+n_1) + δ(n-n_0-n_1)]

5. Voir interro1 S1 2016/2017 **6**. Voir examen S1 2017/2018

TP n°1 : Analyse temporelle des SLID (sous Matlab)
Convolution, Energie, Puissance et Corrélation

I. Rappels



Un signal discret s(n) est une suite de N échantillons régulièrement espacés de Te secondes: x(0),x(Te),x(2Te),……, x((N-1)Te) où Fe=1/Te est la fréquence d'échantillonnage. Le tracé graphique d'un signal discrétisé en temps peut s'effectuer simplement à l'aide de la fonction stem sous matlab.

- L'énergie d'un signal x(n) est fournie sous matlab par **sum(x.^2).** Concernant la puissance moyenne, il faut diviser l'énergie par le nombre d'éléments de x(n).
- Pour la corrélation et la convolution, on utilisera, respectivement, les fonctions **xcorr** et **conv.** A noter que la convolution ou la corrélation de x et h de durée respective N et M est un signal y(n) de durée (N+M-1)
- La fonction **b=m+ s*randn(N,1)** permet de générer un vecteur bruit b de distribution pseudo normale (Gaussienne) de taille N de moyenne m et de variance s^2 dont la puissance est $P_s = m^2 + s^2$.

II. Exemples à tester avant le TP

1. Le programme suivant permet de générer un Dirac en 0 : δ(n) =1 pour n=0 et vaut 0 ailleurs

```
clc ; clear all ; close all ;
t=-10:10;
x=[zeros(1,10),1,zeros(1,10)];
stem(t,x);
axis([-10 10 -0.5 1.5]);
title('Dirac');
xlabel('n');ylabel('Amplitude');
```

2. Le programme suivant permet de générer un échelon U(n)=1 pour n≥0 et 0 pour n<0

```
clc ; clear all ; close all ;
t=-20:20;
x=[zeros(1,20),ones(1,21)];
stem(t,x);
title('Echelon unite');
xlabel('n');ylabel('Amplitude');
```

3. Pour générer N=128 échantillons d'une sinusoïde de fréquence f_0=1000, on peut procéder de la façon suivante, choisir une fréquence d'échantillonnage : Fe = 8000 (le pas de temps Te=1/Fe) Créer le vecteur des temps : t = (0:N-1)Te. Te. Calculer les échantillons: x = cos(2*pi*t*f_0) ; Puis, regarder le résultat : plot(x) ou plot(t,x).

Ce qui nous donne :

```
clc ; clear all ; close all ;
N=128;  fo=1000; Fe=8000; Te=1/Fe;
t=(0:N-1)*Te;  x=cos(2*pi*fo*t);
plot(t,x) ;
figure; plot(x);
figure; stem(t,x);
```

III. Programmes à réaliser

1. Le programme suivant permet de créer une porte de largeur 1s, centrée en 2,5 s, d'amplitude 4, échantillonnée avec Te=0.1s avec N=50 et de calculer son auto-corrélation et son énergie.

```
clc ; clear all ; close all ;
Te=0.1; N=50; A=4;
t=(0:1:N-1)*Te;
x=A*[zeros(1,20),ones(1,10),zeros(1,20)];
subplot(2,2,1);plot(x);
subplot(2,2,2);plot(t,x);
subplot(2,2,3);stem(t,x);
Rx= xcorr(x); tt=(-N+1:1:N-1)*Te;
subplot(2,2,4);plot(tt,Rx);
Energie=sum(x.^2)
```

- Quelle est la différence entre plot(x) et plot(t,x)?
- Quelle est la différence entre plot et stem?
- Utiliser le workspace pour visualiser la taille et le contenu des vecteurs t, tt, x et Rx. Commenter
- Calculer l'auto-corrélation théorique et comparer avec Rx.
- Retrouve-t-on les propriétés de l'auto-corrélation?
- Calculer l'énergie théorique et comparer avec Energie 1

2. Commenter le programme suivant :

```
clear all; close all; clc;
N=500; x=zeros(N,1);x(1:10)=1;
figure; plot(x);axis([0 N 0 1.2]);legend('signal émis');
y=circshift(x,50);
y=y+0.4*randn(N,1);
figure; plot(y);legend('signal reçu: bruité et retardé de 50s')
Ryx=xcorr(y,x);Ryx=Ryx(N:end);
figure; plot(Ryx);
```

-Induire un autre retard et observer.
- Changer la puissance du bruit et commenter.
- Donner un exemple d'application de ce programme.

3. Soit le programme ci-dessous

```
clc ; clear all ; close all ;
N=128;  fo=500; f1=300; Fe=10000; Te=1/Fe; T=3;
t=(0:N-1)*Te; X=cos(2*pi*fo*t)+0.3*randn(1,N);
h=(1/T)*ones(T,1); t_h=(0:T-1)*Te;
subplot(3,1,1);  plot(t,X);  legend('Entrée x(n)');
subplot(3,1,2);  stem(t_h,h,'r'); legend('Filtre h(n)');
Y=conv(X,h);  t_y=(1-T:N-1)*Te;
subplot(3,1,3); plot(t_y,Y); legend('Sortie y(n)');
```

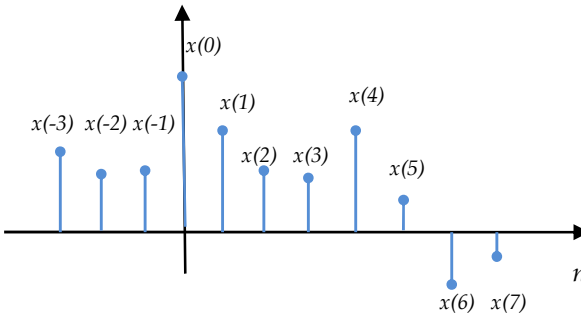
- Commenter le programme. Changer la valeur de T et observer.
- Comment nomme-t-on le signal h? Quel est son rôle?

4.Générer et visualiserle signal *x* composé de 64 échantillons d'une sinusoïde de fréquence f_0 =0.1 avec fe=20.f_0

- Calculer et afficher son auto-corrélation et comparer avec l'auto-corrélation théorique.
- Retrouver les caractéristiques du signal (puissance et fréquence) à partir de l'auto-corrélation.
- Générer le signal z=x+b ou b est un bruit avec (m=0 , s=0.5) . Calculer l'auto-corrélation du bruit et commenter.
- Calculer et visualiser l'auto-corrélation de z pour s=0.5, s=1 puis s=2 en commentant.
- Retrouver dans chacun des cas précédents la fréquence du signal à partir de l'auto-corrélation de *z*.

TP n°1 : Analyse temporelle des SLID (sous Python)
Convolution, Energie, Puissance et Corrélation

I. Rappels



Un signal discret s(n) est une suite de N échantillons régulièrement espacés de Te secondes: x(0),x(Te),x(2Te),……., x((N-1)Te) où Fe=1/Te est la fréquence d'échantillonnage.

Au début du programme python, importer les bibliothèques nécessaires. Pour alléger l'écriture leur donner un nom plus court:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

NumPy est une bibliothèque destinée à manipuler des matrices ou tableaux multidimensionnels ainsi que des fonctions mathématiques opérant sur ces tableaux.
SciPy regroupe un ensemble de bibliothèques Python à usage scientifique avec un environnement très similaire à Matlab. Elle comporte des modules pour l'optimisation, l'algèbre linéaire, les statistiques, le traitement du signal ou encore le traitement d'images. **Scipy** utilise les tableaux et matrices du module **NumPy**.

II. Exemples à tester avant le TP

1. Le programme suivant permet de générer un Dirac en 0 : $\delta(n) = 1$ pour n=0 et vaut 0 ailleurs

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
N=32;
x = np.zeros(N); x[0]=1;
plt.figure(1)
plt.stem(x)
plt.title('Un Dirac.'); plt.grid(True); plt.xlabel('n'); plt.ylabel('Amplitude'); plt.show()
```

2. Rajouter les lignes suivante pour générer un échelon U(n)=1 pour n≥0 et 0 pour n<0

```
x=np.zeros(N); y = np.ones(N); z=np.concatenate((x,y));
plt.figure(2); plt.stem(z)
plt.title('Un Echelon'); plt.grid(True); plt.xlabel('n'); plt.ylabel('Amplitude'); plt.show()
```

3. Générer une sinusoïde de fréquence f_0=1000 et une fréquence d'échantillonnage : Fe = 1200 (Te=1/Fe)

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
N = 128; f0=1000; fe=12000.; Te=1/fe
t = np.linspace(0.0, (N-1)*Te, N) ; x = np.cos(2.0*np.pi*f0*t)
plt.figure(1)
plt.subplot(211); plt.plot(t,x); plt.grid(True); plt.xlabel('Seconde(s)');
plt.ylabel('Amplitude')
plt.subplot(212); plt.stem(t, x); plt.grid(True); plt.xlabel('Seconde(s)');
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()
```

III. Programmes à réaliser

1. Le programme suivant permet de créer une porte de largeur 1s, centrée en 2,5 s, d'amplitude 4, échantillonnée avec Te=0.1s avec N=50 et de calculer son auto-corrélation et son énergie.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
N = 50; A=4; Te=0.1; t = np.linspace(0, N*Te, N)
x = A*np.concatenate((np.zeros(20),np.ones(10),np.zeros(20)))
plt.figure(1)
plt.subplot(221); plt.plot(x); plt.grid(True); plt.xlabel('S'); plt.ylabel('Amp')
plt.subplot(222); plt.plot(t, x); plt.grid(True); plt.xlabel('S'); plt.ylabel('Amp')
plt.subplot(223); plt.stem(t, x); plt.grid(True); plt.xlabel('S'); plt.ylabel('Amp')
plt.show()
tt=np.linspace((1-N)*Te, (N-1)*Te, 2*N-1); Rx=np.correlate(x,x,mode='full');
plt.subplot(224);  plt.title('Autocorr');plt.plot(tt,  Rx);  plt.grid(True);  plt.xlabel('S');
plt.ylabel('Amp')
Energie=sum(abs(x)**2)
```

- Quelle est la différence entre plt.plot(x) et plt.plot(t,x)? et la différence entre plt.plot et plt.stem?
- Utiliser l'explorateur de variables pour visualiser la taille et le contenu des vecteurs t, tt, x et Rx.
- Calculer l'auto-corrélation théorique et comparer avec Rx.
- Retrouve-t-on les propriétés de l'auto-corrélation?
- Calculer l'énergie théorique et comparer avec Energie.

2. Commenter le programme suivant :

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
N = 500; sigma = 0.5 ; mu = 0;
x = np.zeros(N); x[0:9]=1;   y = np.roll(x,50)+ sigma * np.random.randn(N) + mu
Ryx = np.correlate(y,x,mode='full');Ryx=Ryx[N-1:2*N-1]
plt.figure(1); plt.subplot(131); plt.plot(x); plt.title('signal émis')
plt.subplot(132); plt.plot(y); plt.title('signal reçu')
plt.subplot(133); plt.plot(Ryx); plt.title('Intercorrélation entre signal émis et signal reçu');
plt.show()
```

- Induire un autre retard et observer.
- Changer la puissance du bruit et commenter.
- Donner un exemple d'application de ce programme.

3. Soit le programme ci-dessous

```
import numpy as np;import matplotlib.pyplot as plt
N = 128; f0=500; fe=10000.; Te=1/fe; T=3; sigma = 0.3 ;
t = np.linspace(0.0, (N-1)*Te, N); x = np.cos(2.0*np.pi*f0*t)+ sigma * np.random.randn(N) ;
t_h = np.linspace(0.0, (T-1)*Te, T); h = 1.0/T*np.ones(T)
t_y = np.linspace(0.0, (N+T-2)*Te, N+T-1); y = np.convolve (x, h, mode='full')
plt.figure(1);
plt.subplot(311); plt.plot(t,x); plt.grid(True); plt.title('Signal d entrée x(n)')
plt.subplot(312); plt.stem(t_h, h); plt.grid(True); plt.title('Le filtre h(n)')
plt.subplot(313); plt.plot(t_y,y); plt.grid(True); plt.title('Signal de sortie y(n)')
plt.show()
```

- Commenter le programme. Changer la valeur de T et observer.
- Comment nomme-t-on le signal h? Quel est son rôle?

4.Générer et visualiser le signal *x* composé de 64 échantillons d'une sinusoïde de fréquence f_0 =0.1 avec fe=20.f_0

- Calculer et afficher son auto-corrélation et comparer avec l'auto-corrélation théorique.
- Retrouver les caractéristiques du signal (puissance et fréquence) à partir de l'auto-corrélation.
- Générer le signal z=x+b ou b est un bruit avec (m=0 , s=0.5) . Calculer l'auto-corrélation du bruit et commenter. Calculer et visualiser l'auto-corrélation de z pour s=0.5, s=1 puis s=2 en commentant.
- Retrouver dans chacun des cas précédents la fréquence du signal à partir de l'auto-corrélation de *z*.

Chapitre II : Rappels sur les variables et vecteurs aléatoires

Tout signal physique comporte une composante aléatoire qu'il s'agisse d'une perturbation externe telle une tension aléatoire aux bornes d'une résistance ou une perturbation atmosphérique. Le signal utile est lui-même aléatoire si l'on considère le lancer de dés, le loto, les résultats de matchs ou encore les phénomènes météorologiques, etc., ...

Rappelons qu'un signal déterministe possède une formulation mathématique qui permet de connaître sa valeur à tout instant. A contrario, la connaissance de la valeur d'un signal aléatoire à l'instant t ne nous permet pas de connaître sa valeur à $t+\tau$. On ne pourra que faire des prévisions. On dira par exemple qu'il y a 30% de chance que sa valeur reste constante, 20% chance que sa valeur augmente et 50% qu'elle diminue. En fait, on fera appel à des paramètres statistiques définissant les *possibilités* d'évolution du signal. Ainsi, pour étudier l'évolution des phénomènes aléatoires, on a recours à des modèles probabilistes. Ceux-ci tentent de représenter le signal observé par une famille de Variables Aléatoires (VA) indexées par le temps. Chacune de ces VA décrit l'aspect incertain du phénomène à un instant donné.

1. Variables aléatoires et probabilités

Une VA est discrète ou continue suivant que l'ensemble des valeurs possibles de l'expérience aléatoire est respectivement discret ou continu (rien à voir avec le temps). Un exemple du cas discret est donné par le nombre d'étudiants ayant acquis un module. Par contre, le poids ou la taille d'un individu fournit un exemple de VA continue.

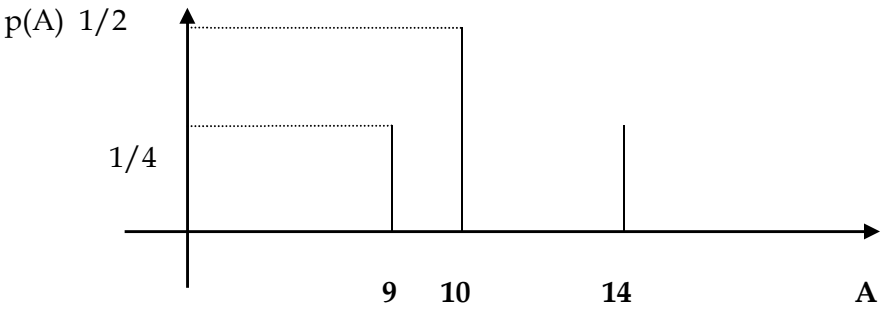
Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs. Cette expression s'appelle *la loi de probabilité* (ou *distribution de probabilité*) de la variable aléatoire p(x) ou prob(xi) dans le cas discret. Quant à la fonction de répartition elle représente la probabilité pour qu'une VAX soit inférieure ou égale à x_i : $F(x_i) = \text{Prob}\,(X \le x_i)$

*Exemple 1:*Le jet de dé.

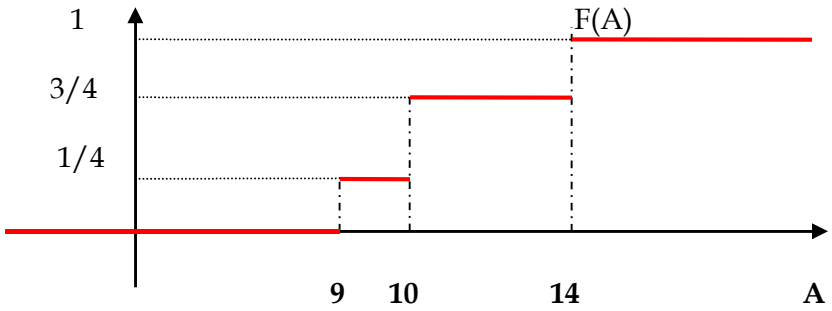
Il y a six valeurs possibles x_i={1,2,3,4,5,6} avec les mêmes probabilités, sachant que $\sum_i prob(x_i) = 1$

alors prob(x_i)=1/6 et $F(x_i) = \sum_{j=-\infty}^{i} prob(x_j) U(x - x_j)$

Exemple 2 : Soient 4 étudiants ayant obtenu les notes suivantes à l'examen : 10, 9, 10, 14 dans un module *A*. Si on cherche la probabilité d'avoir chaque note on trouve : *prob(A=9)=1/4,prob(A=10)=1/2*, *prob(A=14)= 1/4*. On obtient le tracé suivant de *p(A)* :



Si on veut connaître la probabilité d'avoir une note inférieure ou égale à 10 (≤ 10), p(A≤10)=1/4+1/2=3/4. Si on fait ce calcul pour toutes les valeurs A, on obtient la fonction de répartition F(A):



$$\text{Prob}\,(x_j \le X \le x_i) = F(x_i) - F(x_j)$$

Concrètement la fonction de répartition correspond à la distribution des probabilitéscumulées. Le plateau atteint par la fonction de répartition correspond à la valeur deprobabilité 1. Ainsi F(-∞)=0 et F(+∞)=1

Probabilité simple et probabilité conjointe

Il est évident qu'une probabilité n'a de sens que si celle-ci est calculée sur un grand nombre. Imaginons que l'on lance un dé 6 fois, on n'obtiendra surement 6 faces différente, ni même autant de faces pour 12 ou 60 lancés (voir exo n°1 du TP n°1). Ce n'est qu'au bout d'un nombre de lancer très important (N >>) que les 6 faces apparaîtront avec quasi les mêmes probabilités.

Soit donc A un *résultat possible* d'une expérience aléatoire, N le *nombre de réalisation* de l'expérience et $n_A$le *nombre de fois que le résultat A* est apparu, alors la probabilité de l'événement "le résultat de l'expérience est A" :

$$p(A) \overset{déf.}{=} \lim_{N\to+\infty} \frac{n_A}{N}$$

De la même façon, on peut définir la probabilité conjointe : Soient A et B deux événements distincts alors la probabilité que A **et** B aient lieu conjointement est:

$$p(A,B) \overset{déf.}{=} \lim_{N\to+\infty} \frac{n_{AB}}{N}$$

avecn_{AB} = *nombre de fois que A et B sont apparus*

$$p(A,B) = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{n_{AB}}{n_A}\frac{n_A}{N}\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{n_{AB}}{n_A}\right)\cdot\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{n_A}{N}\right) \overset{déf}{=} p(B/A)\cdot p(A)$$

qui peut aussi s'écrire

On appelle *p(B/A)* une probabilité conditionnelle c'est la probabilité que *B* ait lieu *sachant que A a eu déjà lieu*. La formulation de la probabilité conditionnelle*p(A/B)*permet de retrouver le théorème de Bayes :

$$p(A,B) = p(B/A)\cdot p(A) = p(A/B)\cdot p(B)$$

Notion d'indépendance: Supposons que l'on veuille connaître la probabilité qu'il pleuve à Alger (Evènement A) sachant qu'il fait beau / Rio (Evènement B). L'un n'ayant aucune influence sur l'autre (les deux évènements étant indépendants) alors :*p(A/B)=p(A)* de même *p(B/A)=p(B)* d'où*p(A,B)=p(A).p(B)*

Remarque:

Pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'évènement {X = a} est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur. On considère alors la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprisesdans un intervalle [a,b] tel que p(a ≤ X ≤ b).Lorsque cet intervalle tend vers 0, la valeur prise par X tend alors vers une fonction que l'on appelle fonction densité de probabilité ou densité de probabilité : [1]

$$\Pr ob(x \le x_i \le x + \Delta x) = \frac{Valeurs\ entre\ x et\ x+\Delta x}{Nombre\ de\ valeurs} \Rightarrow p_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr ob(x \le x_i \le x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Lorsque $\Delta x \to dx$,l'histogramme devient une fonction *continue* de x $\Rightarrow$ $\text{Prob}\left[x_1 \le x_i < x_2\right] = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$

avec $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$

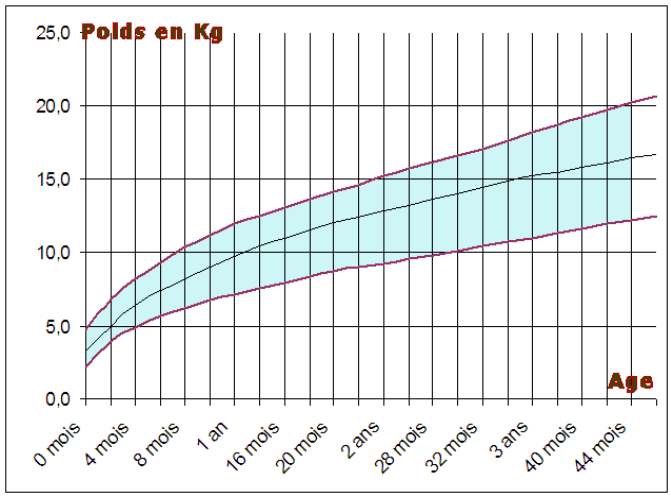
La fonction de répartition est alors la primitive de la fonction densité de probabilité p(x):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\,du \quad \Rightarrow \quad p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

2. Moments statistiques

Le tracé de la densité de probabilité nous fournit une première information sur notre VA que l'on complètera par le calcul de différents paramètres statistiques. Deux d'entre eux sont largement utilisés, il s'agit de la moyenne et la variance.

La valeur moyenne équivaut à la composante continue et la variance aux fluctuations autour de cette moyenne. Ainsi, pour le suivi du poids ou de la taille d'un enfant, on se réfère à la moyenne calculée par tranches d'âge pour plusieurs enfants. L'écart par rapport à cette moyenne (supérieur ou inférieur) permettra de savoir si l'enfant a un poids normal pour son âge ou au contraire est en surpoids ou malnutrition



- Pour une VA discrète, la moyenne et la variance sont données par:

$$m = \mu_x = E\{x\} = \sum_i^N x_i\, p(x_i) \qquad Var = \sigma_x^{\,2} = E\{(x-\mu_x)^2\} = \sum_i^N (x_i-\mu_x)^2\, p(x_i) = \sum_i^N x_i^{\,2}\, p(x_i) - \mu_x^{\,2}$$

- Pour une VA continue x ∈ [a,b], la moyenne et la variance sont données par:

$$m = \mu_x == E\{x\} = \int_a^b x.p(x)dx \qquad Var = \sigma_x^{\,2} = E\{(x-\mu_x)^2\} = \int_a^b (x-\mu_x)^2\, p(x)dx = \int_a^b x^2\, p(x) - \mu_x^{\,2}$$

De façon plus générale, *toute* fonction ***f*** d'une variable aléatoire *x* est une variable aléatoire *f*. La connaissance des lois de probabilités nous permet de déterminer les ***valeurs espérées théoriquement*** - ou ***espérances mathématiques*** - ou encore *moyenne (ou moments) statistique* de *f* :

$$E\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx$$

Propriétés de l'espérance

- E{X+Y}=E{X}+E{Y}

- E{aX}=aE{X} ∀a ∈ R(a étant une valeur déterministe)

- E{a}=a ∀a ∈ R

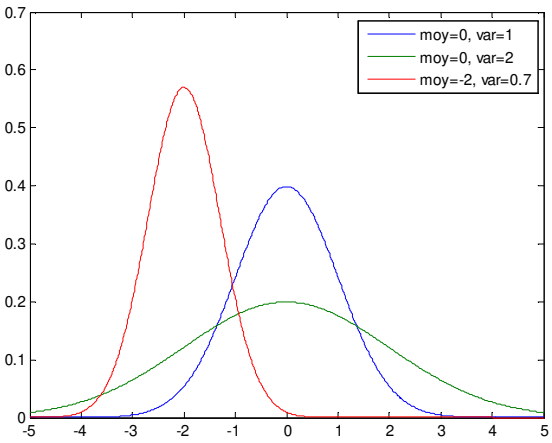
- Si X ≥ 0 alors E{X} ≥ 0

Remarque : Lorsque la moyenne est nulle, on dit que la variable aléatoire est *centrée*, lorsque sa variance vaut 1, on dit qu'elle est *réduite*

3. Lois de probabilité usuelles

Loi Normale ou gaussienne: Une des plus importantes lois car elle permet de modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires. Elle est caractérisée par sa moyenne *m*et sa varianceσ^2.Plus la variance est élevée, plus la courbe est aplatie.

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right)$$

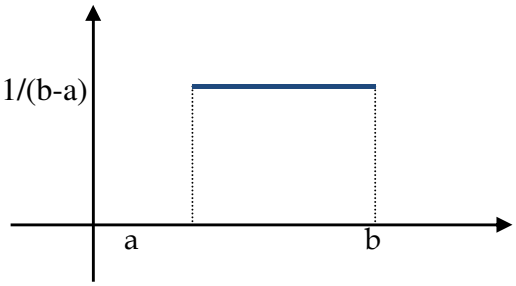


Exemple:

Notes obtenues à un examen par un ensemble d'étudiants. La plus part des notes seront comprises entre 7 et 13. Très peu d'étudiants auront une note >18 ou <0. La loi des notes p(x) est gaussienne du fait que la note d'un étudiant dépende de plusieurs facteurs aléatoires (cours donné,révision ou pas, aptitudes, disponibilités de documents, état moral, etc.)

Loi uniforme : X est uniformément répartie entre a et b veut dire que la probabilité est identique (ou équiprobable) quelque soit la valeur de x sur [a, b] :

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & ailleurs \end{cases} \qquad m = (b+a)/2, \qquad \sigma^2 = (b-a)^2/12$$



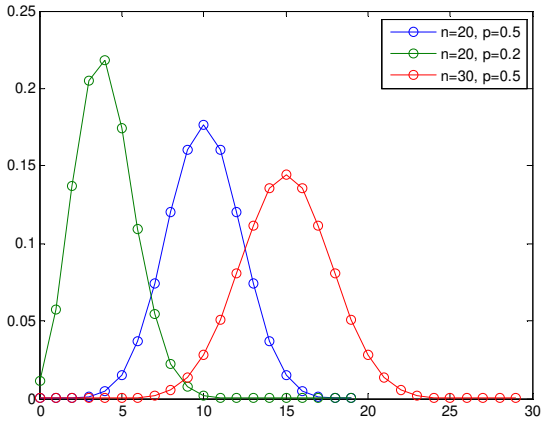
Loi de Bernoulli : La loi de Bernoulli, de paramètre p, est une expérience avec seulement deux issues possibles *a* et *b*avec les probabilités respectives de *p* et (*1-p*). *Exemple*: Résultat pile ou face d'une pièce.

- La densité de probabilité est donnée par : $p_X(x)=p.\delta(x-a) + (1-p) . \delta(x-b)$

- La fonction de répartition par : $F(x) = p . U(x-a) + (1-p) . U(x-b)$

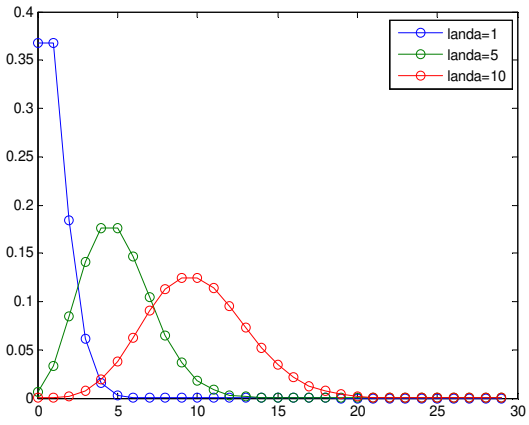
Loi Binomiale : de paramètre (*n,p*), c'est la répétition de *n* expériences de Bernoulli. Soit un évènement A associé à une expérience. Cet évènement a une probabilité p de survenir. On reproduit n fois l'expérience et on s'intéresse à la VA X qui donne le nombre de succès de l'évènement Aau cours des n essais.

$$p_X(x) = C_n^x p^x (1-p)^{(n-x)} \; C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad m = np \qquad \sigma^2 = np(1-p)$$



Loi de Poisson : La loi de Poisson est appelée la loi des événements rares, elle dépend d'un paramètre λ; elle trouve son utilité pour la description du comportement d'événements dont les chances de réalisation sont faibles. De nos jours, elle est très utilisée dans les télécommunications (pour compter le nombre de communications dans un intervalle de temps donné), le contrôle de qualité statistique (nombre de pièces défectueuses), etc.

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x \ge 0, \lambda > 0 \qquad m = \lambda, \qquad \sigma^2 = \lambda$$

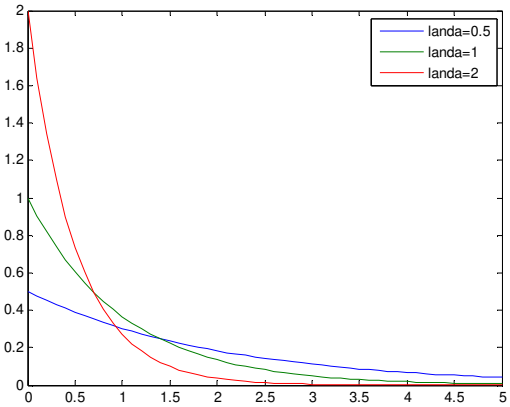


Exemple :

Si un évènement donné se produit en moyenne 10 fois par minute, pour étudier le nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps d'une heure, on choisit comme modèle une loi de Poisson de paramètre λ = 60× 10 = 600.

Loi exponentielle : Dans ce cas *X* est une variable aléatoire définissant la durée de vie d'un phénomène. Si l'espérance de vie du phénomène est *E(X)* et si la durée de vie est sans vieillissement (ex: composant électronique (voir exo n°5 du TP n°1).), c'est-à-dire si la durée de vie au-delà de l'instant T est indépendante de l'instant T, alors X a pour densité de probabilité:

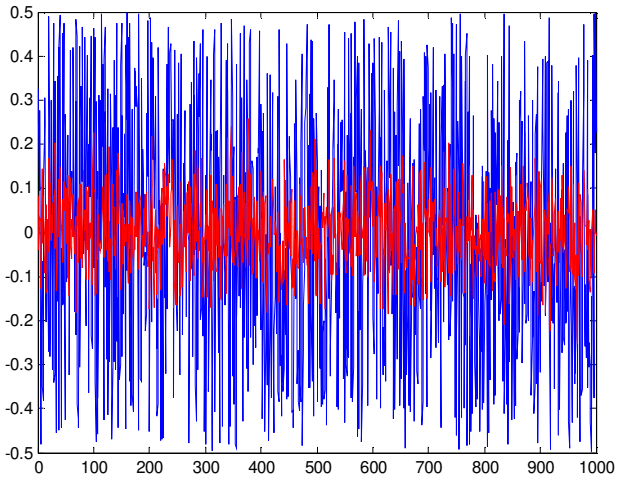
$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases} \qquad m = 1/\lambda \qquad \sigma^2 = 1/\lambda^2$$

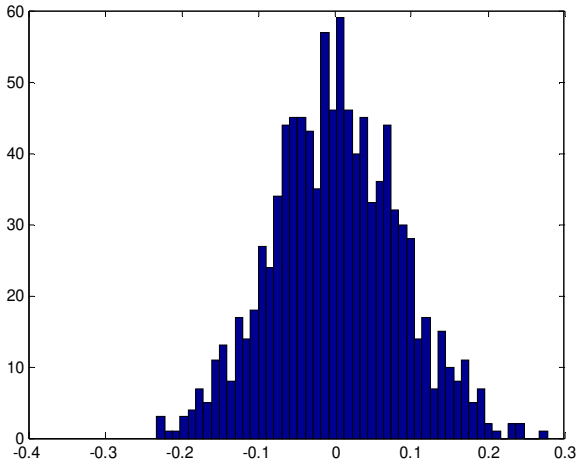


En théorie des files d'attente, l'arrivée de clients dans une file est souvent modélisée par cette loi.

Théorème central limite et approximations :

Chaque fois qu'un phénomène peut être considéré comme la résultante d'un grand nombre de causes aléatoires indépendantes (ex: notes obtenues à l'examen, poids d'un enfant), on peut résumer que ce phénomène suit une loi de distribution normale: c'est le théorème central limite. Ainsi, la distribution statistique de la somme de n V.A. indépendantes et de même loi tend vers la loi Normale quand n tend vers l'infini. L'exemple suivant illustre la somme de 12 signaux indépendants et uniformément répartis entre -0.5 et +0.5 et sa densité de probabilité qui suit une loi gaussienne (voir exo n°3 du TP n°1).





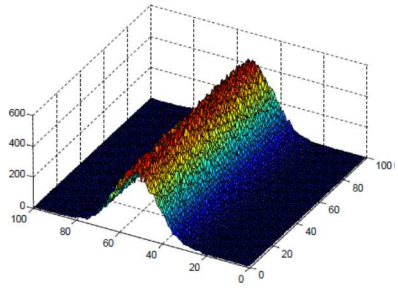
Exemple d'application : Soient les notes obtenues dans 2 modules par une section de 10 étudiants .

1. Quel est le nombre d'étudiants ayant le module1
2. Quelle est la probabilité d'avoir la moyenne dans le module1
3. Quelle est la probabilité d'avoir la moyenne dans le module2
4. Quelle est la probabilité d'avoir le module2 quand on eu le module1
5. Quelle est la probabilité d'avoir les 2 modules simultanément
6. Quelle est la probabilité d'avoir une note inférieure à 10 dans le module1

Etudiants	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10
Module1	8	10	17	7	9	11	13	6	12		8
Module2	11	12	13	9	10	8	11	8	10		6

4. Vecteurs Aléatoires

Une variable aléatoire à plusieurs dimensions (encore appelée vecteur de VA) est le résultat dépendant de plusieurs caractères aléatoires. Le tirage de 2 dés à six faces donne une VA discrète à deux dimensions (une matrice 6x6 de probabilités 1/36). Par contre, la taille et le poids forment une VA continue à 2 dimensions.



Exemple:

p(X,Y) ou X est une Gaussienne et Y est uniforme

Des variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ont une loi de distribution conjointe si elles sont définies par rapport au même univers Ω. Elles peuvent être caractérisées via soit:

- leur fonction de densité de probabilité conjointe :$p_{X1,X2,.....,Xn}(x1, x2,\ldots\ldots ,xn)$ définie par:

$$\int_{-\infty}^{x1}\ldots\int_{-\infty}^{xn} p_{X1,X2,.....,Xn}(x_1, x_2,\ldots\ldots ,x_n)\, dx_1.....dx_n = 1$$

- leur fonction de répartition conjointe :$F_{X1,X2,.....,Xn}(x1, x2,\ldots\ldots ,xn)$ =P(X1<$x1$, X2<$x2$,…… ,Xn<xn)

$$F_{X1,X2,....Xn}(x1, x2,\ldots\ldots ,xn) = \int_{-\infty}^{x1}\ldots\int_{-\infty}^{xn} p_{X1,X2,.....,Xn}(u_1, u_2,\ldots\ldots ,u_n)\, du_1.....du_n$$

Loi de distribution marginale

Si l'on s'intéresse à un sous-ensemble $X_1, X_2, \cdots, X_m$, m<n des variables aléatoires précédentes distribuées conjointement, on définit la loi de distribution marginale à partir de la distribution conjointe ont une loi de distribution conjointe si elles sont définies par rapport au même univers Ω. Elles peuvent être caractérisées via :

$$p_{X1,X2,....Xm}(x1, x2,\ldots\ldots ,xm) = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} p_{X1,X2,.....,Xn}(u_1, \ldots..u_m,u_{m+1},\ldots\ldots ,u_n)\, du_{m+1}.....du_n$$

Exemple 1 (VA discrète)

Soit Prob(x,y)= $\begin{bmatrix} 1/9 & 1/3 & 0 \\ 2/9 & 1/9 & 2/9 \end{bmatrix}$

On peut alors déterminer la probabilité de x soit prob(x) et de même celle de y

Prob(x) = [1/9+1/3=4/9 2/9+1/9+2/9=5/9]

Prob(y)=[1/9+2/9=1/3 1/3+1/9=4/90+2/9=2/9]

*Exemple 2*Soient X et Y deux variables aléatoires uniformément distribuées sur [0, T]× [0 , T], alors :

$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1/T^2 & pour\ x\in[0,T]\ et\ y\in[0,T]\\ 0 & ailleurs\end{cases}\quad p_X(x)=\int_0^T p_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^T 1/T^2\,dy=1/T=p_Y(y)$$

*Exemple 3*Soit une distribution bidimensionnelle définie par :

$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}2 & pour\ 0\le x\le 1 \qquad 0\le y\le x\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p_X(x)=\int_0^x p_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^x 2\,dy=2.x$$

$$p_Y(y)=\int_y^1 p_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_y^1 2\,dx=2(1-y)$$

Changements de variables : Connaissant une variable X et sa loi p(x) et étant donné une autre variable Y s'écrivant en fonction de X. Il existe un moyen de déterminer $p_Y(y)$ par le biais du Jacobien. Soit X une VA continue caractérisée par sa densité de probabilité $p_X(x)$alors la VA continue Y=f(X) a une densité de probabilité donnée par :

$$p_Y(y)=|J|\left[p_X(x)\right]_{x=f^{-1}(y)}=\left|\frac{\partial X}{\partial Y}\right|\left[p_X(x)\right]_{x=f^{-1}(y)}$$

On peut généraliser cela pour n VA. Soit (X1,X2,…,Xn) un vecteur de VA continue caractérisé par sa densité de probabilité $p_{X1X2\ldots Xn}$(x1,x2,…xn), alors le vecteur de VA continue(Y1,Y2,…,Yn)=f(X1,X2,…,Xn) a une densité de probabilité donnée par :

$$p_Y(y1,.....,yn)=|J|\left[p_{X1.....Xn}(x1,.....,xn)\right]_{x1.....xn=f^{-1}(y1,.....,yn)}$$

$$\text{avec } J=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial X1}{\partial Y1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial X1}{\partial Yn}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \frac{\partial Xn}{\partial Y1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial Xn}{\partial Yn}\end{bmatrix}$$

*Exemple 1:*Soit z = x + y où x, y sont deux variables aléatoires indépendantes. On cherche la densité de probabilité de z connaissant celles de x et y cad p(x) et p(y).

Posons: z=x+y On a alors x=w

w=x d'où $J=Det\begin{bmatrix}\frac{dx}{dw} & \frac{dx}{dz}\\ \frac{dy}{dw} & \frac{dy}{dz}\end{bmatrix}=Det\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=1$

y=z-w

alors $p(w,z) = |J| p(x,y) \Big|_{x=f(w,z) et y=f(w,z)} = 1.p_{xy}(w, z-w)$

ainsi, $p(z) = \int p_{xy}(x,z)dx = \int p_{xy}(x, z-x)dx = \int p_x(x) p_y(z-x)dx = p_x(z) * p_y(z)$

Donc, la densité de probabilité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes a pour densité de probabilité le produit de convolution de leurs densités de probabilité respectives (voir exo n°5 du TP n°1).

Remarque : Il faut distinguer le cas où la transformation entre X et Y est biunivoque de celui où elle ne l'est pas.

Ainsi, soit la transformation $Y = X^2$, X est une variable aléatoire de probabilité p(x) définie tout d'abord sur l'intervalle[0, 1]. Sur cet intervalle, la transformation est biunivoque.

On a alors : $X = \sqrt{Y}$ d'où : $p(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} p(x = \sqrt{y})$

Soit la même transformation définie, cette-fois ci sur l'intervalle [-1, 1].Sur cet intervalle, la transformation n'est pas biunivoque. On a alors : $X = \sqrt{Y}$ sur [0, 1] et $X = -\sqrt{Y}$ sur [-1,0] d'où :

$$p(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} p(x = \sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} p(x = -\sqrt{y})$$

Covariance et coefficient de corrélation

$$C_{x1x2} = \sigma_{x1x2} = E\{(x_1 - \mu_{x1})(x_2 - \mu_{x2})^*\} = E\{x_1.x_2^*\} - \mu_{x1}\mu_{x2}^* = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* p(x_1, x_2)dx_1 dx_2 - \mu_{x1}.\mu_{x2}^*$$

Si X1 et X2 sont indépendants$\Rightarrow C_{x1x2}=0$. On dit que les variables sont décorrélées.

Le coefficient de corrélation est donné par : $\rho_{x1x2} = C_{x1x2} / (\sigma_{x1}\sigma_{x2})$

Ce coefficient mesure le degré de dépendance linéaire entre X1 et X2. Il est compris entre -1 et 1. Un signe positif indique que X1 et X2 varient dans le mêmesens et un signe négatif que les deux variables varient en sens contraire. S'il est nul, X1 et X2 sont décorrélées, c'estle cas quand elles sont indépendantes.

Remarque:

Si les deux variables sont totalement indépendantes, alors leur corrélation est égale à 0. La réciproque est cependant fausse, car le coefficient de corrélation indique uniquement une dépendance linéaire.

Ainsi, soient deux variables aléatoires X = sinϕ et Y = cosϕ où ϕ est une phase aléatoire uniformément distribuée dans [0,2π].Si on calcule l'espérance de X et Y, on trouve une valeur moyenne nulle (voir exo n°6 du TP n°1). De même, lecalcul de la covariance nous donne une valeur nulle. Les deux variables sont donc non corrélées.Et pourtant, on a $X^2 = 1 - Y^2$, ce qui prouve qu'elles sont dépendantes. En effet, si Xest connue, Y l'est aussi.

Emploi de la notation matricielle : Il est préférable d'utiliser une notation matricielle pour traiter des vecteurs aléatoires de plus de 2 dimensions.

Soit $\underline{X}$ le vecteur des v.a. ,$\underline{m_X}$le vecteur des moyennes $\underline{\mu_{Xi}}$ et $\underline{Xc}$ le vecteur des v.a. centrées :

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\mu}_X = \begin{bmatrix} \mu_{X1} \\ . \\ . \\ . \\ \mu_{Xn} \end{bmatrix}, \quad \underline{X}_C = \begin{bmatrix} X_1 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X1} \\ . \\ . \\ . \\ \mu_{Xn} \end{bmatrix}$$

La matrice de covariance C_X est donnée par :

$$C_X = E\left\{\underline{X}_C . \underline{X}_C{}^T\right\} = \begin{bmatrix} \sigma_1{}^2 & C_{12} & . & . & C_{1n} \\ C_{21} & \sigma_2{}^2 & . & . & C_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ C_{n1} & C_{n2} & . & . & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Cas d'un vecteur aléatoire Gaussien: Un vecteur aléatoire réel de dimension n (X1,…..,Xn) est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire de X1,…..,Xn est une variable aléatoire gaussienne réelle.

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_X)}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{X}-\underline{\mu}x)^T C_X{}^{-1}(\underline{X}-\underline{\mu}x)}$$

Exemple d'application: Soient deux variables aléatoires Gaussiennes X et Y décorrélées, montrer que dans ce cas elles sont indépendantes.

Par ailleurs et par définition d'un vecteur aléatoire gaussien, la variable aléatoire :

$$Y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k = \alpha^T \underline{X}$$

est une variable aléatoire réelle Gaussienne. Par conséquent, sa loi est complètement déterminée par sa moyenne et sa variance qui ont pour expressions respectives :

$$E\{y\} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E\{X_k\} = \alpha^T \underline{\mu}_X \text{ et } \sigma_y = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k \operatorname{cov}\{X_j, X_k\} = \alpha^T C_x \alpha$$

Exemple : Si Z1 et Z2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale de paramètres respectifs (μ1, σ1) et (μ2, σ2), alors, quels que soient les réels a et b, aZ1 + bZ2 est de loi normale de paramètres ($a\mu_1 1$ + $b\mu_2$, $\sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}$)

TD n°2: Variables et Vecteurs aléatoires

1. Une v.a a pour densité de probabilité $p_X(x)$ définie comme suit : $p_X(x) = \begin{cases} K.....x \in [a,b] \\ 0.....ailleurs \end{cases}$

- Trouver la valeur de K
- Calculer la fonction de répartition $F_X(x)$ et la tracer pour a=1 et b=2.
- Déterminer la moyenne et la variance

2. Soient X une v.a et p(x) sa densité de probabilité définie comme suit : $p(x) = \begin{cases} Ke^{-x}.....x \geq 0 \\ 0.....ailleurs \end{cases}$

- Déterminer la constante K
- Calculer E[X] et Var[X] puis p(X<1), p(X<2) et p(X>2).

3 . Soit X une v.a ayant une densité de probabilité $p_X(x)$ telle que : $p_X(x) = ae^{-b|x|}$ pour -∞<x<+∞

- Trouver la relation entre a et b
- Calculer E[x] et Var[x]

4. La densité de probabilité conjointe de deux v.a est donnée par : $P_{xy}(x,y) = \begin{cases} e^{-x}e^{-y}.....x \geq 0..et..y \geq 0 \\ 0.....ailleurs \end{cases}$

- Calculer la densité de probabilité marginale de X puis celle de Y
- Vérifier que $p_{xy}(x,y)$ est une densité de probabilité
- Confirmer l'indépendance de X et Y par le calcul de densité de probabilité

5. Soit X une v.a ayant une densité de probabilité uniforme pour $0 \leq x \leq 1$ et nulle ailleurs ;et soit Y une v.a indépendante de X et de densité de probabilité uniforme pour $0 \leq y \leq 2$ et nulle ailleurs. On considère Z=X+Y. Calculer $p_X(x)$, $p_Y(y)$ et $p_Z(z)$.

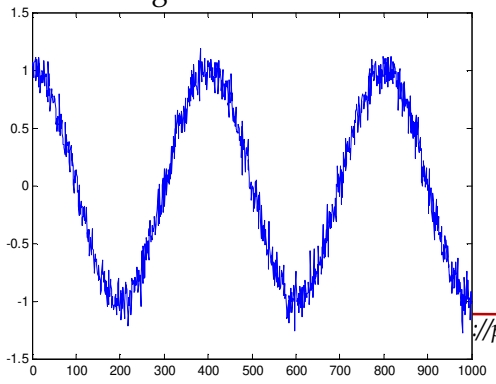
6. Soient deux v.a réels, indépendantes ayant des densités de probabilités de Gauss, centrées et de variance unité. On considère deux v.a W et Z définies par : $w = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ et $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$

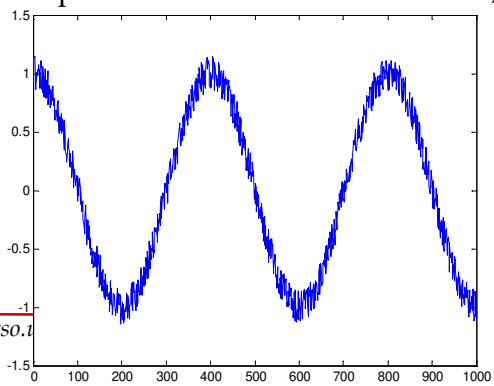
- Déterminer la densité de probabilité conjointe de W et Z puis les lois de W et Z
- Ces variables sont-elles indépendantes ?On donne : $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = ar\sin(x)$

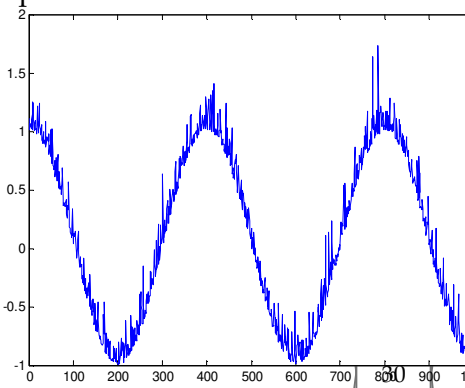
7. Soit φ une phase aléatoire équi-répartie sur [0 2π]. Considérons les variables aléatoires x et y définies par x = cosφ et y = sinφ.

- Calculer les moyennes E[x] et E[y] puis calculer les variances de x et y.
- Calculer finalement la covariance de x et y donnée par $C_{xy} = \sigma_{xy} = E\{(x-\mu_1)(y-\mu_y)\} = E\{xy\} - \mu_x\mu_y$

8. Les signaux suivants ont été affectés par 3 bruits différents: Gaussien, Exponentiel et Uniforme.







Solutions

1. K=1/(b-a); F(x) est une droite de 1 à 2 de pente 1. **3.** b=2a, μx=0, σ_x^2=

2. K=1, μx=1, σ_x^2=1, p(X<1)=1-1/e, p(X<2)=1-1/e^2, p(X>2)= 1/e^2

4. $p(x) = e^{-x}.....x \geq 0..et..p(y) = e^{-y}$ $y \geq 0$ $\iint p(x,y)dxdy = 1$ p(x,y)=p(x).p(y)

5. p(x)=1, p(y)=1/2, p(z)=1/2z entre 0 et 1,p(z)=1/2 entre 1 et 2,p(z)=1/2(3-z) entre 2 et 3

6. p(z)=$ze^{-z2/2}$, p(w)=1/(π(1-w^2)$^{1/2}$) indépendants**7.** μx=0 et μy=0 σx²=0.5 et σy²=0.5 $C_{x,y}$=0**8.** U, G, P

Exercices supplémentaires

1. Soit la fonction f définie comme suit : $p(x) = \begin{cases} 0.....x < -1 \\ x+1.....x \in [-1,0] \\ -x+1....x \in [0,1] \\ 0.....x > 1 \end{cases}$

- Montrer que la fonction f est une densité de probabilité puis déterminer sa fonction de répartition
- Déterminer la moyenne et la variance d'une v.a aléatoire ayant f(x) pour densité de probabilité

2. Soient X et Y deux v.a liées par la relation : Y = aX+b où a et b sont deux nombres réels. En supposant que $F_X(x)$ et $p_X(x)$ sont connus. Calculer alors $F_Y(y)$ et $p_Y(y)$.

3. Soient deux v.a X et Y liée par la relation : Y = g(X) =X². Calculer $F_Y(y)$ et $p_Y(y)$ sachant que $p_X(x)$ a une distribution uniforme sur [0,2π].

4. Soient X et Y deux v.a. gaussiennes décorrélées dont la probabilité conjointe est :

p(x,y)=$\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$

- ✓ X et Y, sont-elles indépendantes?Déterminer les probabilités individuelles p(x) et p(y).
- ✓ Déterminer la probabilité conjointe p(z,w) des v.a. Z=X+Y et W=X-Y.
- ✓ Déterminer les probabilités p(z) et p(w). Z et W sont-elles indépendantes?

5.Soient X et Y deux v.a. indépendantes avec $p(x) = a\prod_2(x)$ et $p(y) = a\prod_2(y)$

- ✓ Déterminer et tracer p(z) pour Z=X+Y.
- ✓ Si les deux v.a. suivent une loi normale centrée et réduite, déterminer p(z).
- ✓ Pourquoi appelle la loi Gaussienne la loi normale ? Une v.a. peut-elle avoir une variance nulle ?

6. Soient X et Y deux v.a. telles que p(x,y)=$e^{-(x+y)}$ pour x>0 et y>0. Déterminer les probabilités individuelles p(x) et p(y) et en déduire les moyennes et variances des v.a. X et Y.
Soient les Z et W des v.a. telles que Z=X+Y et W=X/Y. Montrer que la probabilité conjointe p(z,w) vaut $e^{-z}\frac{z}{(1+w)^2}$Z et W sont-elles indépendantes? Sont-elles décorrélées?
On suppose que V=-2X+1. Calculer la moyenne et la variance de la v.a. V puis calculer Cxv. X et V sont-elles indépendantes? Justifier

7. Soient X et Y 2 v.a. Gaussiennes centrées de variance unité et soient 2 autres variables aléatoire R et θ tels que X=Rcosθ et Y= Rsinθ. Les 2 v.a. R et θ sont-elles indépendante ? décorrélées? (Justifier)

Solutions

4.Voir interro 1 S2 2105/2016 **5.**Voir interro 1 S1 2013/2014

6. Voir interro 1 S2 2106/2017 **7.** Voir interro 1 S1 2107/2018

TP n°2 : Variables et Vecteurs Aléatoires (Sous Matlab)

Rappels

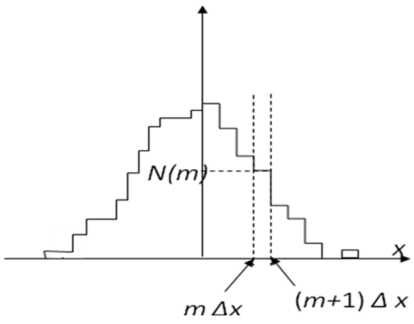
Un générateur de nombres aléatoires dans l'intervalle [0, 1] est une fonction rand qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- un appel à la fonction **rand** donne une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur [0, 1]. Pour générer une loi uniforme sur [a,b], on écrit a+(b-a)*rand(N,1)

- les appels successifs à la fonction rand fournissent une réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes.

- Pour générer une loi Gaussienne de moyenne M et variance V : M+sqrt(V)*randn(N,1)

- **s=sum(X**) Calcule la somme des composantes de X .
- **m=mean(X)** Calcule la moyenne empirique de X
- **v=var(X)** Calcule la variance empirique.
- **sigma=std(X)** Calcule l'écart-type empirique de X
- **hist (X,NC): T**race un histogramme non normalisé de X sur NC intervalles. Soit une suite finie de points issus de la réalisation d'une VA X avec Xmin=valeur minimale de la suite de valeurs et Xmax=valeur maximale de la suite de valeurs. On partage le segment [Xmin, Xmax] en NC classes équidistantes et on compte le nombre de valeurs dans chaque classe, on a alors une estimation de la densité de probabilité:



Remarques :

Sous Matlab au début d'un programme, on peut initialiser le générateur en lui fournissant la première valeur appelée la graîne du générateur rand('state',sum(100*clock)). Sinon, à chaque fois que l'on démarre Matlab, c'est la même suite de valeurs qui sera donnée.

Matlab dispose d'une boîte à outils Statistics Toolbox qui contient des fonctions prédéfinies permettant de simuler des réalisations de variables de la plupart des lois usuelles. On sert de la fonction dont le nom est obtenu en ajoutant au nom de la distribution le suffixe rnd : distrnd. Ainsi, pour la loi exponentielle ce sera exprnd, pour poisson (poissrnd), etc.

Exercice 1

On veut simuler le lancer d'un dé avec 60 jets. Donner la loi de probabilité puis la fonction de répartition et calculer la moyenne et la variance théoriques.

```
clc; clear all; close all;
N=60; NC=6;
X=1+6*rand(N,1);X=floor(X);
figure; plot(X); %plot(X,'*');
mm=mean(X); vv=var(X);
figure;   hist(X,NC)
A=hist(X,NC)/N ;
Figure ; plot(A) ;
```

1. Prendre N=6 puis 12 puis 6000 puis 60000 et commenter l'histogramme
2. Quelle est l'effet de l'augmentation de N sur la moyenne et la variance estimées.
3. Peut-on considérer que l'histogramme représente la densité de probabilité?
4. Utiliser cumsum pour tracer la fonction de répartition `Y=cumsum(A);figure; plot(Y);`

Exercice 2

En vous servant de randn, écrire un programme permettant de simuler une loi gaussienne représentant les notes de 1000 étudiants. Utiliser différentes valeurs de NC (10, 50 et 100) et commenter.

Exercice 3

On veut vérifier le théorème central limite. Pour cela, on crée une matrice A dont chaque ligne représente un échantillon d'une loi uniforme.

1. Créer la matrice A=rand(12,1000), et un vecteur x de taille 1000 dont les composantes représentent la moyenne de chaque colonne de A.
2. Vérifier que chaque ligne de A suit une loi uniforme en traçant leurs histogrammes sur 50 valeurs (NC=50) en employant une boucle.
3. Utiliser hist(x,NC) pour visualiser la loi de x. A quoi la loi de x ressemble-t-elle?

Exercice 4

Ecrire un programme de générer une loi X une v.a ayant une densité de probabilité uniforme pour $0 \leq x \leq 1$ (N=10000) et nulle ailleurs ;et soit Y une v.a indépendante de X et de densité de probabilité uniforme pour $0 \leq y \leq 1$ et nulle ailleurs. On considère la variable aléatoire Z = X + Y,

1. Sachant que $p_Z(z) = p_X(x)*p_Y(y)$, montrer théoriquement que $p_Z(z)$ aura l'allure d'un triangle
2. Vérifier par histque c'est le cas.

Exercice 5

On modélise fréquemment la durée de vie d'un composant électronique par une loi exponentielle. On suppose que la durée de vie, en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda=1/100$.

1. Donner sa moyenne et sa variance théorique
2. Utiliser X = exprnd(1/λ,N,1) pour générer cette loi. Tracer sa loi.
3. Utiliser mean pour déterminer la durée de vie moyenne d'une ampoule.

Exercice 6

Soi φ une v.a. uniforme entre 0 et 2π et soit $X=\cos(\varphi)$ et $Y=\sin(\varphi)$

1. Déterminer théoriquement p(x) et p(y) puis tracer les lois de X et Y avec matlab et commenter
2.Calculer leurs moyennes et variances théoriques puis empiriques.
3. Utiliser corr2 pour déterminer le coefficient de corrélation.
4. X et Y sont-elles décorrélées? Sont-elles indépendantes?.
4. Reprendre ces questions en considérant Y=aX+b avec a= 2 et b=3 puis a= - 4. Conclure.

TP n°2 : Variables et Vecteurs Aléatoires (Sous Python)

Rappels

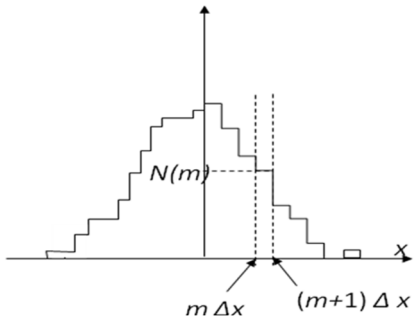
Un générateur de nombres aléatoires dans l'intervalle [0, 1] est une fonction rand qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- un appel à la fonction **numpy.random.uniform** (a,b, N) donne une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur [a,b].

- les appels successifs à la fonction **numpy.random.uniform** fournissent une réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour générer une loi Gaussienne de moyenne M et variance V : V* **numpy.random.randn**(N) + M
Pour générer une loi exponentielle de paramètre Landa : **numpy.random.exponential(Landa,N)**

- **sum(X**) Calcule la somme des composantes de X .
- **numpy.mean(X)** Calcule la moyenne empirique de X
- **numpy.var(X)** Calcule la variance empirique.
- **numpy.std(X)** Calcule l'écart-type empirique de X
- **numpy.histogram (X, bins): T**race un histogramme non normalisé de X sur 'bins' intervalles. Soit une suite finie de points issus de la réalisation d'une VA X avec Xmin=valeur minimale de la suite de valeurs et Xmax=valeur maximale de la suite de valeurs. On partage le segment [Xmin, Xmax] en 'bins' classes équidistantes et on compte le nombre de valeurs dans chaque classe, on a alors une estimation de la densité de probabilité:



Remarques :

- ✓ Sous Python au début d'un programme, on peut initialiser le générateur en lui fournissant la première valeur appelée la graine du générateur numpy.random.seed(nbre). Sinon, à chaque fois que l'on démarre Python, c'est la même suite de valeurs qui sera donnée.

- ✓ Python dispose d'une classe **stats** de la bibliothèque **scipy** (**scipy.stats**) qui contient des fonctions prédéfinies permettant de simuler des réalisations de variables de la plupart des lois usuelles ainsi que de nombreuses fonctions statistiques.

Exercice 1

On veut simuler le lancer d'un dé avec 60 jets. Donner la loi de probabilité puis la fonction de répartition et calculer la moyenne et la variance théoriques.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
N = 60; a = 1 ; b = 6  ;
X = np.random.randint(a,b+1,N) ;
plt.figure(1); plt.stem(X,use_line_collection=True); plt.grid(True);
plt.title("lancer du dé")
bins=(b-a)+1; I = np.linspace(a,b,bins)
(P,J) = np.histogram(X,bins);
plt.figure(2);        plt.subplot(211);        plt.stem(I,P,use_line_collection=True);
plt.grid(True);
plt.subplot(212); plt.hist(X, bins, density = True)
mu=np.mean(X);vv=np.var(X) ; vvv=np.std(X)
```

1. Prendre N=6 puis 12 puis 6000 puis 60000 et commenter l'histogramme
2. Quelle est l'effet de l'augmentation de N sur la moyenne et la variance estimées.
3. Peut-on considérer que l'histogramme représente la densité de probabilité?
4. Utiliser `np.cumsum` pour tracer la fonction de répartition

```
F=np.cumsum(P/N);
plt.figure(3); plt.stem(I,F,use_line_collection=True); plt.grid(True);
```

Exercice 2

En vous servant de `np.random.randn`, écrire un programme permettant de simuler une loi gaussienne représentant les notes de 1000 étudiants. Utiliser différentes valeurs de bins (10, 50 et 100) et commenter.

Exercice 3

On veut vérifier le théorème central limite. Pour cela, on crée une matrice A dont chaque ligne représente un échantillon d'une loi uniforme.

1. Créer la matrice `A = np.random.uniform(a,b,(12,1000))`, et un vecteur X de taille 1000 dont les composantes représentent la moyenne de chaque colonne de A : `np.mean(A,0)`
2. Vérifier que chaque ligne de A suit une loi uniforme en traçant leurs histogrammes sur 50 valeurs (bins=50) en employant une boucle.
3. Utiliser `np.histogram(X,bins)` pour visualiser la loi de X. A quoi la loi de X ressemble-t-elle?

Exercice 4

Ecrire un programme de générer une loi X une v.a ayant une densité de probabilité uniforme pour $0 \leq x \leq 1$ (N=10000) et nulle ailleurs ;et soit Y une v.a indépendante de X et de densité de probabilité uniforme pour $0 \leq y \leq 1$ et nulle ailleurs. On considère la variable aléatoire Z = X + Y,

1. Sachant que $p_Z(z) = p_X(x)*p_Y(y)$, montrer théoriquement que $p_Z(z)$ aura l'allure d'un triangle
2. Vérifier par `np.histogram` que c'est le cas.

Exercice 5

On modélise fréquemment la durée de vie d'un composant électronique par une loi exponentielle. On suppose que la durée de vie, en jours, d'une ampoule, est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda=1/100$.

1. Donner sa moyenne et sa variance théorique
2. Utiliser X = `numpy.random.exponential(1/Landa,N)` pour générer cette loi. Tracer sa loi.
3. Utiliser `np.mean` pour déterminer la durée de vie moyenne d'une ampoule.

Exercice 6

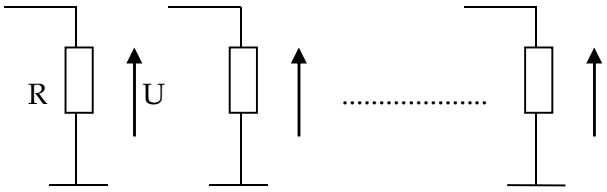
Soi φ une v.a. uniforme entre 0 et 2π et soit $X=\cos(\varphi)$ et $Y=\sin(\varphi)$

1. Déterminer théoriquement p(x) et p(y) puis tracer les lois de X et Y et commenter.
2. Utiliser `plt.scatter(X, Y)`
2. Calculer leurs moyennes et variances théoriques puis empiriques.
3. Utiliser `np.corrcoef(X,Y)` pour déterminer le coefficient de corrélation.
4. X et Y sont-elles décorrélées? Sont-elles indépendantes?.
4. Reprendre ces questions en considérant Y=aX+b avec a= 2 et b=3 puis a= - 4. Conclure.

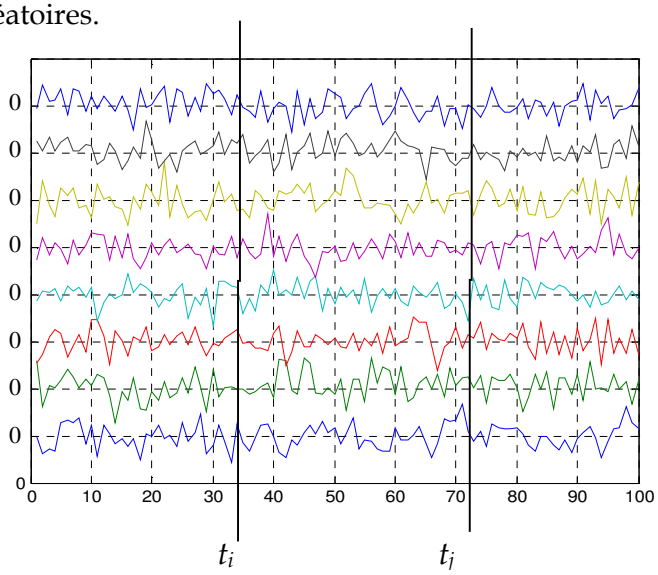
Chapitre III : Processus aléatoires

Les processus aléatoires (stochastiques) décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps (ou de l'espace). On peut définir un processus stochastique comme étant une famille de variables aléatoires indexées par le temps définies sur un même espace de probabilités Ω. Un processus aléatoire ne possède pas de représentations temporelles analytiques. Chaque signal aléatoire observé représente une réalisation particulière de ce processus. Le signal de parole, le signal radar, l'électrocardiogramme, l'électro-encéphalogramme, les signaux sismiques en sont des exemples. Rappelons qu'un signal de réception -constitué d'un signal informatif (aléatoire ou déterministe), d'un signal aléatoire d'interférence et de bruit lié au canal de transmission- est aléatoire par nature.

Exemple 1 : Si l'on prend plusieurs résistances identiques (de même valeur) et que l'on mesure la tension. On trouvera une valeur non nulle due à l'agitation thermique des électrons libres dans la résistance. Les tensions mesurées au cours du temps sur l'ensemble des résistances fourniront plusieurs signaux aléatoires tous différents qui constituent le processus aléatoires.



Signaux susceptibles d'être produits en mesurant la tension aux bornes de plusieurs résistances.

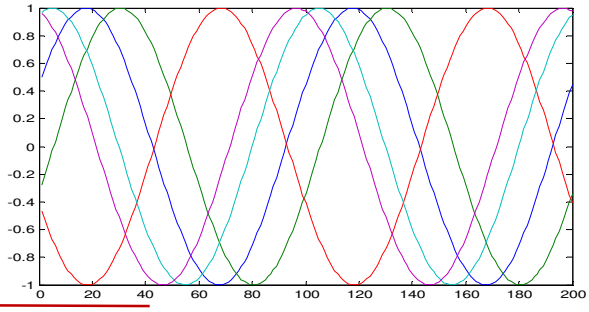


- Chaque tracé fournit un signal aléatoire

- à l'instant t_i , le processus se réduit à une v.a x_i dont la densité est $p(x;t_i) = p(x_i)$

- Deux instants t_i et t_j permettent de définir deux variables aléatoires $x_i$et x_j on peut définir des densités de probabilités conjointes par: $p(x;t_i,t_j) = p(x_i,x_j)$

Exemple 2 : Signal sinusoïdal à phase aléatoire $X(t,\varphi) = a\cos(\omega t + \varphi)$ avec une phase φ uniformément répartie entre 0 et 2π



- φ est à valeur réelle continue

- X(t,φ) est à valeur continue et réelle

- Un signal particulier X(t,φ_i) est déterministe

En pratique, il n'est pas aisé d'obtenir la densité de probabilité $p(x;t_i) = p(x_i)$, on se contente alors des moments d'ordre 1 et 2

1. Espérances mathématiques

Statistiques de 1er ordre: Elles permettent de décrire le signal à un instant donné. Le processus aléatoire devient une simple variable aléatoire que l'on peut décrire à l'aide de moments à condition que sa probabilité soit connue ∀ t_i.

- *moyenne statistique*: $\mu_x(t_i) = E\{x(t_i)\} = E\{x_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_i) \cdot p(x,t_i)dx$

- *variance*: $\sigma_x^2(t_i) = E\{\ x(t_i) - \mu_x(t_i)^2\} = E\{x_i^2\} - \mu_x(t_i)^2$

Où $E\{x_i^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_i)^2 \cdot p(x,t_i)dx$ est la valeur quadratique moyenne (on parle aussi de puissance) et $\sigma_x(t_i)$ est dit écart-type

Exemple 1: Soit le processus stochastique x(t) défini par :$x(t) = a + b.t$ où *a*et *b* sont des v.a. dont les probabilités sont connues, alors :

$$\mu_X(t) = E[a + b\,t_i)] = \mu_a + \mu_b\, t$$

Reprenons l'exemple 2 : Pour un instant donné t_k, on peut calculer des moments statistiques de la variable aléatoire $X(t_k,u)$

- Moyenne :

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_0^{2\pi} f_\varphi(\varphi) a\cos(\omega t + \varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi} a \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi)d\varphi = 0$$

-Variance :

$$\sigma_X^2(t) = E[X^2(t)] - \mu_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_0^{2\pi} f_\varphi(\varphi) a^2 \cos^2(\omega t + \varphi)d\varphi = \frac{a^2}{2}$$

Supposons, maintenant, que φ est déterministe et que a est aléatoire de densité p(a), de moyenne μ_a et variance σ_a^2, alors :

$$\mu_X(t) = E[a\cos(\omega t + \varphi)] = \mu_a.\cos(\omega t + \varphi) \qquad \sigma_X^2(t) = \sigma_a^2.\cos^2(\omega t + \varphi)$$

Statistiques de 2ème ordre:

On dit que le processus est connu à 2 instants t_1 et t_2, si $\forall t_1, t_2$, la probabilité conjointe est connue. Dans la mesure où l'espérance fait intervenir le produit de deux variables aléatoires (2 instants), on parlera de statistiques d'ordre 2. on peut estimer les statistiques suivantes:

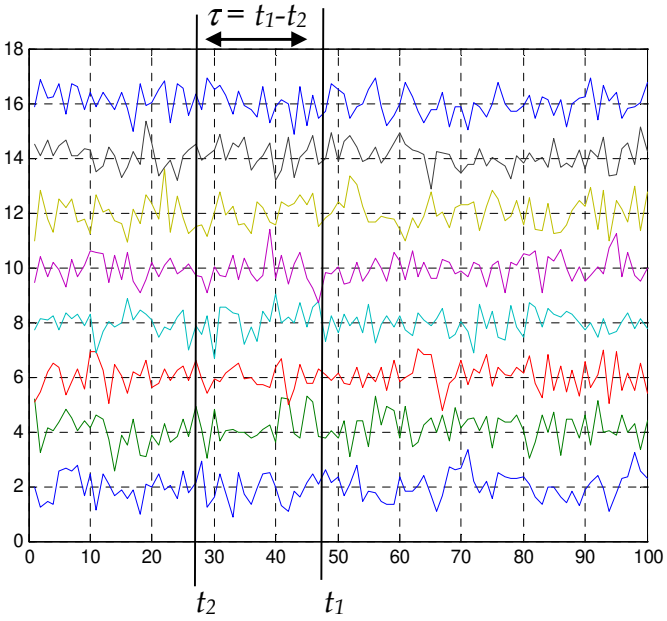
- Fonction *d'autocorrélation statistique* :

$$R_x(t_1,t_2) = E\{x(t_1) \cdot x^*(t_2)\} = E\{x_1 \cdot x_2^*\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2^* \cdot p(x_1,x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$$

- Fonction *d'autocovariance statistique :*

$$C_x(t_1,t_2) = E\{[\ x(t_1) - \mu_x(t_1)] \cdot [\ x(t_2) - \mu_x(t_2)]^*\ \} = R_x(t_1,t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_x(t_2)^*$$

Elles illustrent la relation entre les statistiques prises à **deux** instants t_1 et t_2 différents. La fonction d'*autocorrélation* mesure la corrélation entre les signaux émis par un *même* processus à deux *instants différents*. Lorsqu'*il y a* corrélation on peut parler d'un "effet mémoire" du processus. On définit la mémoire du processus comme le temps t_c au delà duquel la corrélation est négligeable, t_c est aussi appelé temps de corrélation. Par contre, si elle est nulle, le signal est complètement aléatoire et le signal x(t) à l'instant t est complètement décorrélé de ce même signal à l'instant passé t − τ.



Notons que pour des processus *centrés*

($\mu_x(t)=0$): $C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$

On peut étendre ces notions pour mesurer ce lien entre deux processus aléatoires par :

- Fonction *d'intercorrélation statistique:* $R_{xy}(t_1,t_2)=E\{x(t_1)\cdot y^*(t_2)\}=E\{x_1\cdot y^*_2\}$

- Fonction *d'intercovariance statistique* : $C_{xy}(t_1,t_2)=R_{xy}(t_1,t_2)-\mu_x(t_1)\cdot\mu_y^*(t_2)$

- Le *coefficient de corrélation* est définie par : $\rho_{xy}(t_1,t_2)=\dfrac{C_{xy}(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}$ $\quad -1\le\rho_{xy}(t_1,t_2)\le 1$

Reprenons l'exemple 2 et calculons l'auto-corrélation statistique :

$$R_{xx}(t_1,t_2)=E[a\cos(\omega t_1+\varphi)a\cos(\omega t_2+\varphi)]=E[\frac{a^2}{2}(\cos(\omega(t_1+t_2)+2\varphi)+\cos(\omega(t_1-t_2)))]=\frac{a^2}{2}\cos(\omega(t_1-t_2))$$

On remarque que c'est une fonction périodique, ne dépendant que de l'écart t_1-t_2. Pour $t_1=t_2$, on retrouve la variance du processus aléatoire soit $a^2/2$.

3. Processus stationnaires

Beaucoup de processus aléatoires observés en pratique ont des propriétés statistiques qui ne dépendent pas du temps ou l'observation est faite. On dit que ce sont des processus stationnaires.

On désigne par *stationnaire* les processus dont les *caractéristiques statistiques* sont *indépendantes de l'origine du temps*. Un processus aléatoire est dit stationnaire au *sens strict* lorsque toutes ces caractéristiques statistiques c'est à dire tous ses moments *à tout ordre* sont indépendants de l'origine du temps.

$$\Leftrightarrow p(x,t_i)=p(x);$$
$$\mu_x(t_i)=\mu_x$$
$$R_{xy}(t_1,t_2)=R_{xy}(\tau) \text{ avec } \tau=t_2-t_1$$
$$\dots$$

La stationnarité ne signifie pas pour autant que le processus est indépendant du temps mais plutôt que ses propriétés statistiques ne dépendent pas du moment auquel on commence à les estimer. Ainsi, la température est un processus non stationnaire alors que le lancer de dé est un processus stationnaire.

On peut considérer que de nombreux phénomènes sont approximativement stationnaires sur des durées d'observation finies. Comme nous n'avons pas toujours accès à $p(x,t_i)$, on se contentera de la *stationnarité au sens large*(SSL) lorsque *seul μx et Rx* sont indépendants de *t.*

Ainsi :

- Un processus stationnaire est dit stationnaire d'ordre 1 si sa moyenne et sa variance sont constantes et donc indépendantes de tout décalage temporelle :

et $\mu_x(t) = \mu_x = cste$ $\sigma_x^2(t_i) = \sigma_x^2$

- Un processus stationnaire est dit stationnaire d'ordre 2 si ses statistiques d'ordre 2 ne dépendent que de l'écart temporel entre les deux instants t_1 et t_2:

$$R_x(t_1,t_2) = R_x(\tau) \text{ avec } \tau = t_2 - t_1$$

Reprenons l'exemple précédent $X(t,u) = a\cos(\omega t + u)$ et étudions sa stationnarité au sens large lorsque u est uniforme sur [0,2π] : la moyenne, la variance sont indépendantes de t et l'auto-corrélation statistique ne dépend que de t_1-t_2. Le processus est donc stationnaire au sens large.

Exemple d'application:

Montrer que le processus x(t) = a.cos(2πt) + b.sin(2πt) où a, b sont des v.a décorrélées de moyenne nulle et de variance unité est stationnaire au sens large.

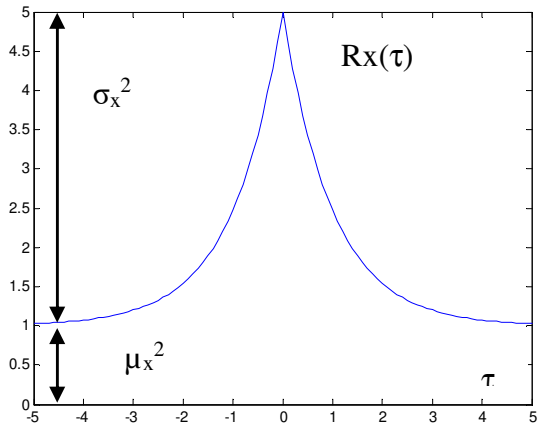
Propriétés de la fonction d'autocorrélation pour x aléatoire réel SSL

-La fonction de corrélation est paire : $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ avec $\tau = t_2 - t_1$

- La fonction est maximum à l'origine $R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$

- Valeurs à l'origine et à l'infini : $R_x(0) = E(x(t)^2) = \mu_x{}^2 + \sigma_x{}^2$

et $\lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} E\{x(t)x(t-\tau)\} = \mu_x{}^2$



En effet, si *x(t)* ne contient ni composante périodique ni composante indépendante du temps, lorsque t→>∞, les variables *x(t)*et *x(t - τ)* deviennent statistiquement décorrélées.

Cas discret :

On remplacera *t* pat *n* → $\mu_x(n) = \mu_x = E\{x(n)\}$ $R_x(n_1,n_2) = E\{x(n_1)x^*(n_2)\}$

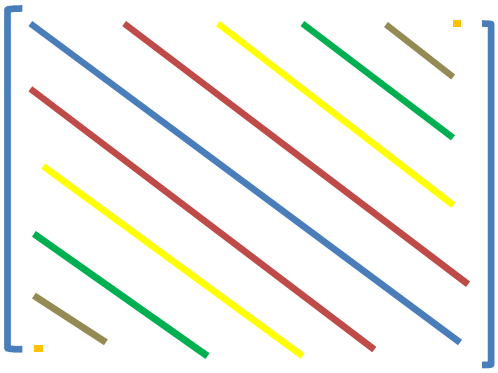
Un processus aléatoire X discret SSL possédera une moyenne constante et une autocorrélation statistique ne dépendant que de $k=n_1-n_2$ soient :

$$\mu_x(n) = \mu_x = cste \quad et \quad R_x(n_1,n_2) = R_x(k) \text{ avec } \quad k = n_1 - n_2$$

$$R_x(n_1,n_2)=\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & R_x(2) & \ldots\ldots\ldots & R_x(N-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(1) & \ldots\ldots\ldots & R_x(N-2) \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) & \ldots\ldots\ldots & R_x(N-3) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & R_x(N-3) & \ldots\ldots\ldots & R_x(0) \end{bmatrix}$$

SSL $\Rightarrow$

$$R_x(n_1,n_2)=R_x(n_1-n_2)=\begin{bmatrix} R_x(1,1) & R_x(1,2) & R_x(1,2) & \ldots\ldots\ldots & R_x(1,N) \\ R_x(2,1) & R_x(2,2) & R_x(2,3) & \ldots\ldots\ldots & R_x(2,N) \\ R_x(3,1) & R_x(3,2) & R_x(3,3) & \ldots\ldots\ldots & R_x(3,N) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ R_x(N,1) & R_x(N,2) & R_x(N,3) & \ldots\ldots\ldots & R_x(N,N) \end{bmatrix}$$



$$R_x(n_1-n_2)=R_x(k)$$

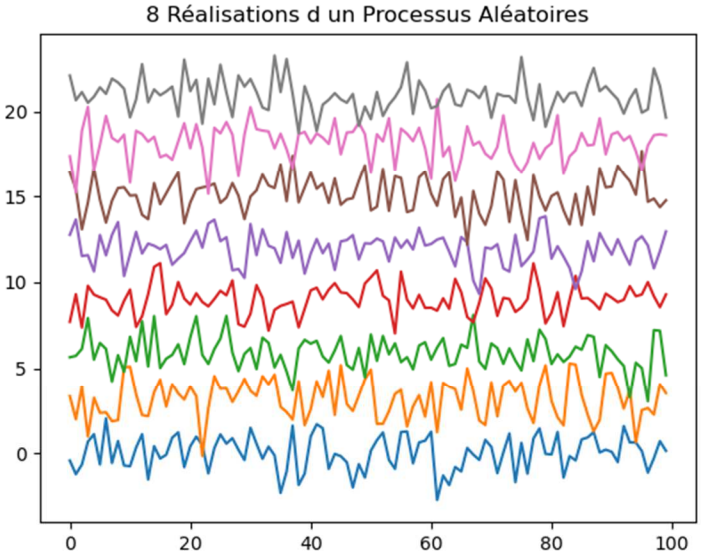
Ainsi, la matrice de corrélation d'un processus stationnaire discret est une matrice Toeplitz carrée. Une matrice carrée est dite Toeplitz si tous les éléments d'une même diagonale ou sous-diagonale sont égaux. On voit directement que c'est le cas ici. Cette propriété est directement liée à la propriété de stationnarité (au sens large) du processus.

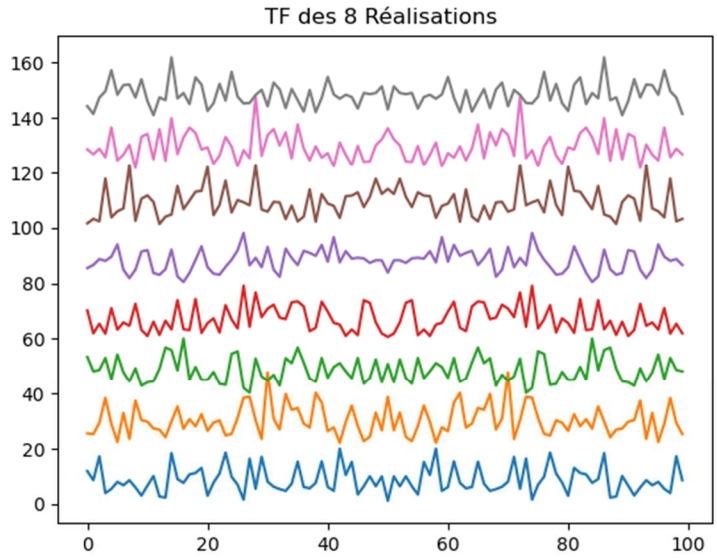
Puissance et DSP : Les personnes qui conversent (dans un café ou en cours) génèrent un signal aléatoire qui selon son volume global possèdera une puissance. Si X(t) est SSL, on peut calculer l'espérance de la puissance instantanée par:

$$P_X = E(x(t)^2) = R_x(0) = \mu_x{}^2 + \sigma_x{}^2$$

L'énergie est alors donnée par : $E_X = \int P_X\,dt = \int E(x(t)^2)dt$

Quant au spectre pour un signal aléatoire, il faut noter que chaque réalisation fournira un spectre différent (Voir exemple ci-dessous)





Or, nous avons déjà un outil statistique qui contient une information unique lorsque le processus est considéré SSL: c'est la fonction de corrélation statistique dont la TF fournira une information sur la distribution fréquentielle de la puissance moyenne du signal.

On définit, alors, la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire X(t) stationnaire au sens large comme la fonction de la fréquence f donnée par la TF de la fonction de corrélation statistique du signal:

$$S_x(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\,e^{-2\pi j f\tau}\,d\tau$$

La puissance moyenne totale du processus est : $P_x=\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,df = R_x(0)$

Comme le spectre représente une moyenne sur l'ensemble des réalisations possibles du processus, une réalisation particulière peut toujours avoir un spectre de puissance différent de $S_x(f)$.

Bruit blanc : Un bruit blanc est un signal aléatoire stationnaire au second ordre dont la densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences.

Il est défini par : $R_x(\tau)=\sigma_x^2\delta(\tau)$ ce qui implique que sa moyenne sera nulle (μ_x=0) et qu'il est décorrélé.

La TF de la corrélation statistique est, alors, donnée par $S_x(f)=\sigma_x^2$

Dans le cas discret, on aura $\Rightarrow$ $R_x(k)=\sigma_x^2\delta(k)$ et $R_x(k)=0$ *pour* $k\neq 0$ $\mu_x(k)=0$

On dit alors que le bruit est décorrélé.

Par analogie avec la lumière blanche, on dénomme un tel signal bruit blanc. Il existe donc différents type de bruit blanc en fonction de la variable aléatoire décrivant le bruit. Les plus répandus sont le bruit blanc gaussien où la variable aléatoire suit une loi gaussienne et le bruit blanc uniforme où la variable aléatoire suit une loi uniforme.

4. Processus ergodiques

Il n'est pas toujours possible de réaliser un nombre suffisant de mesures pour établir les propriétés statistiques d'un processus aléatoire.Il est plus facile de lancer un dé 1000 fois que de réquisitionner 1000 personnes pour lancer l000 dés. Tout comme pour caractériser le bruit thermique, on réaliserait plusieurs mesures en usant de la même résistance au lieu d'en employer 1000. Cela signifie que l'on assimilera les résultats obtenus sur une réalisation à ceux obtenus pour un instant donné $t_i$pour différentes réalisations.

Un processus aléatoire stationnaire est dit *ergodique* lorsque *les valeurs moyennes statistiques et temporelles* sont **identiques**. $\mu_x = \overline{\mu_x}$; $R_x(\tau) = \overline{R_x(\tau)}\cdots$

où $\overline{x} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cdot dt$ et $\overline{R_{xy}(\tau)} = \overline{x(t)\cdot y^*(t-\tau)}$

D'un point de vue pratique lorsqu'un phénomène aléatoire est ergodique et stationnaire, on peut mesurer avec un seul appareil fiable à partir de n'importe quel instant.

$$\overline{\mu_x} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cdot dt \Rightarrow \mu_x = \overline{\mu_x} \qquad \overline{R_x(\tau)} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t-\tau)\cdot dt \Rightarrow R_x(\tau) = \overline{R_x(\tau)}$$

Reprenons, une énième fois l'exemple 2 et calculons les moyennes temporelles :

$$E[X(t,u_i)] = \overline{X}(u_i) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} a\cos(\omega t + u_i)dt = 0 \qquad E[X^2(t,u_i)] = \overline{X^2}(u_i) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} a^2\cos^2(\omega t + u_i)dt = \frac{a^2}{2}$$

Il est donc ergodique d'ordre 1

Si le processus est ergodique $S_x(f)$ représente le spectre de puissance de n'importe qu'elle réalisation $x_i(t)$:

$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,df = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)^2\,dt$ Où $x_i(t)$ est une réalisation de $x(t)$.

Dans le cas où le signal x(t) est ergodique, stationnaire, on détermine Sx(f) par le calcul de la DSP temporel sur sur T:

$S_x(f) = TF\{R_x(\tau)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|X_T(f)|^2$ Où X_T(f) est la TF de x(t) limité à l'intervalle [0 T]

TD n°3 : Processus aléatoires

1. Soit un processus aléatoire défini par : X(t) = a t + b; t > 0, b est une constante et a est une variable aléatoire qui a pour densité de probabilité : $f_a(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}$

Calculer la densité de probabilité, la moyenne et la variance de X(t).

2. On s'intéresse à la puissance W du bruit débité à l'instant t, pour une résistance R dont la tension V à ses bornes a un caractère aléatoire.

Déterminer la densité de probabilité de W dans chacun des cas.

a) V est une gaussienne centrée de variance σ^2

b) V est uniformément distribuée entre 5V et 10V

3. Soit le processus aléatoire X(t) défini par : $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Déterminer pour chacun des cas suivants les statistiques d'ordre 1 : $p_X(x,t)$, $\mu_x(t)$ et $\sigma_x^2(t)$

a) Si A est une v.a uniformément distribuée sur [-1,1]. X(t) est-il stationnaire d'ordre 1?

b) Si φ est une v.a uniformément distribuée sur [0, 2π].X(t) est-il stationnaire d'ordre 1 et 2?

4. Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux aléatoires réels stationnaires du second ordre.

$E\{ X_1(t)\, X_1(t-\tau) \} = Rx_1(\tau) = A_1 e^{-|\tau|} + B_1$ et $E\{ X_2(t)\, X_2(t-\tau) \} = R_{X2}(\tau) = A_2 e^{-|\tau|} + B_2$

a) Interpréter A_i et B_i , i=1,2

On considère $X_c(t) = X_1(t) + X_2(t)$, étudier la stationnarité de $X_c(t)$ au SSL :

b) Lorsque $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont indépendants.

c) Lorsque $X_2(t) = K\, X_1(t)$.

d) Mêmes questions pour $Z(t) = X_1(t) \,.\, X_2(t)$,

5.Soit le processus aléatoire $Z(t) = X.\cos(2\pi f_0 t) - Y\sin(2\pi f_0 t)$, où X, Y sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes à moyennes nulles et de variances $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$; f_0 est une constante.

a) Calculer la valeur moyenne E[Z(t)] et la variance σ_z^2.

b) Calculer la fonction d'autocorrélation $R_z(t_1,t_2)$ et examiner si le processus est SSL.

6. Considérons les deux variables aléatoires suivantes : A est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance σ_A^2, et φ une variable aléatoire uniformément répartie entre -π et +π.

a) Déterminer $E[A^2]$. Donner la densité de probabilité de φ. Soit $B=e^{j\varphi}$ variable aléatoire complexe fonction de φ. Montrer que E[B] = 0 et calculer $E[B^2]$.

Considérons la variable aléatoire C = cos(φ+θ) où θ est une variable certaine.

b) Montrer que E[C] = 0, ∀θ.

c) Calculer E[cos(2φ+θ)].

d) En déduire $E[C^2]$.

On étudie maintenant le signal aléatoire $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

a) Donner trois trajectoires différentes du signal X(t)

b) Calculer la moyenne, la variance $\sigma_X^2(t)$ et la corrélation $R_X(t_1,t_2)$. X(t) est-il stationnaire d'ordre 1 ?

c) Déterminer et tracer la transformée de Fourier de X(t). Est-elle unique?

d) Peut-on calculer la fonction de corrélation temporelle et la DSP correspondante.

7. Soit le signal z(t) résultant de la somme du signal x(t) = Acos(2πf$_0$t+φ) et du signal binaire aléatoire y(t) prenant la valeur 0 et V sur une durée T d'une façon équiprobable. x(t) et y(t) sont considérés décorrélés. φ : variable aléatoire uniforme entre [0, 2π].

a) Déterminer la fonction de répartition du signal x(t)

b) Sachant que la fonction d'autocorrélation de y(t) est $A\Lambda_T(\tau) + B$

- Déterminer A et B
- Déterminer la fonction d'autocorrélation de z(t) en fonction de celles de x(t) et y(t)
- Déterminer et tracer la fonction d'autocorrélation et la D.S.P du signal z(t)
- Déterminer la puissance de z(t), sa variance et sa moyenne statistique Le processus z(t) est-il SSL ?

8. Un signal aléatoire z(t) est le résultat de la somme de deux signaux indépendants x(t) et y(t).
Le signal x(t) et binaire antipolaire et prend la valeur A avec une probabilité égale à 2/3 et la valeur –A avec une probabilité égale à 1/3.
Le signal y(t) est gaussien et possède une densité spectrale de puissance $S_y(f) = \sigma^2/2.\ tri(f/B)$.

a) Déterminer la densité de probabilité du signal z(t)

b) La valeur moyenne et la variance de z(t) ainsi que le coefficient de corrélation de x et y

Solutions

1. X(t) Gaussienne avec $\mu_x(t)=b$ et $\sigma_x^2(t)=t$ **2.** W=RI² a) $p(w)=\sqrt{\frac{R}{2\pi w\sigma^2}}e^{\frac{wR}{2\sigma^2}}$ b) $p(w)=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{R}{w}}$

3. $p(x;t)=\frac{1}{2\left|\cos(\omega t+\varphi)\right|}$ a) $\mu_x(t)=0\ \sigma_x^2(t)=\frac{\cos^2(\omega t+\varphi)}{3}$ Non stat b) $p(x;t)=\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2(t)}}$

4. $A_1=\sigma_{x1}^2\quad B_1=\mu_{x1}^2 A_2=\sigma_{x2}^2\quad B_2=\mu_{x2}^2$ b) $\mu_{xc}(t)=\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2}\ R_{xc}(\tau)=R_{x1}(\tau)+R_{x1}(\tau)+2\sqrt{B_1B_2}$ SSL

c) $\mu_{xc}(t)=(1+k)\sqrt{B_1}\ R_{xc}(\tau)=R_{x1}(\tau)(1+2k+k^2)$ SSL d) $\mu_{xc}(t)=\sqrt{B_1B_2}\ R_{xc}(\tau)=R_{x1}(\tau)R_{x2}(\tau)$ SSL

e) $\mu_{xc}(t)=k(A_1+B_1)$ pour $R_{xc}(t,\tau)$ on ne peut conclure

5. $\mu_z(t)=0\ \ \sigma_z^2(t)=\sigma^2\qquad R_z(\tau)=\sigma^2\cos(2\pi f_0\tau)$ SSL

6. $E[A^2]=\sigma_A^2 E[B^2]=1, E[C^2]=1$

$\mu_x(t)=\mu_A\cos(2\pi f_0 t)\ \ \sigma_x^2(t)=\sigma_A^2\cos(2\pi f_0 t)\ \ R_z(\tau)=\sigma^2\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0(t-\tau))$

e) $X(f)=\frac{A}{2}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f-f_0)\right)\ \overline{R_x(\tau)}=\frac{A}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\ \ \overline{S_x(f)}=\frac{A}{4}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f-f_0)\right)$ d) SSL et ergodique

7. $p(x;t)=\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2(t)}}\ F(x;t)=\frac{1}{\pi}[\arcsin(x/A)+\pi/2]$ $B^2=0.5$ V $\quad A=0.25V^2\ P=R_z(0)=\frac{A^2}{2}+A$

$R_z(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)+R_y(\tau)\ \ S_z(f)=\frac{A^2}{4}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f-f_0)\right)+AT\sin c^2(fT)+B\delta(f)$

8. $\mu_x=A/3\ \ \sigma_x^2=8A^2/9\ \ R_y(\tau)=\frac{\sigma^2}{2B}\sin c^2(B\tau)\ \mu_z=A/3\ \sigma_z^2=8A^2/9+\sigma^2/2B$

$$p(z)=\frac{2}{3\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{1}{2\sigma_y}(z-A)^2}+\frac{1}{3\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{1}{2\sigma_y}(z+A)^2}$$

Exercices supplémentaires

1. On considère le processus aléatoire Z(t) = X(t)Y(t) où X(t) et Y(t) sont deux processus aléatoires, statistiquement indépendantes qui ont respectivement pour fonction d'autocorrélation : $R_x(\tau) = e^{-a|\tau|}$ et $R_y(\tau) = e^{-a|\tau|}$. Calculer la moyenne et la variance de Z(t) puis l'autocorrélation de Z(t)

2. Soit un processus aléatoire dont chaque réalisation est un signal constant : x(t) = a où a est une variable aléatoire (de moyenne μ_a et de variance σ_a^2) dont la densité de probabilité est indépendante du temps .

- Le processus est-il stationnaire ? Est-il ergodique ?

3. Soient x(t) et y(t) deux signaux aléatoires définis par :

x(t) = α, où α est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle [0 ,1].

$y(t) = e^{\beta t}$, où β est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2.Les deux signaux sont définis pour t>=0 et α et β sont des v.a. supposées indépendantes.

- Tracer quelques trajectoires des processus x(t) et y(t) puis calculer E{x(t)} et E{y(t)}
  Remarque :Pour y(t) utiliser les fonctions génératrices des moments d'une variable aléatoire α gaussienne : $E\{e^{\alpha t}\} = e^{\mu_\alpha t + \frac{\sigma_\alpha^2 t^2}{2}}$

- Etudier la stationnarité de x(t) et y(t).

4. Soit le signal aléatoire défini par :$x(t) = A_1 e^{j2\pi f_1 t} + A_2 e^{j2\pi f_2 t}$ où A_1 et A_2 sont deux v.a gaussiennes, décorrelées, centrées et de variance σ^2

- Donner la d.d.p conjointe $f_{A1,A2}(A1,A2)$
- Déterminer la moyenne statistique du signal x(t) ainsi que sa fonction d'autocorrélation et la D.S.P
- Déterminer la d.d.p de x(t)
- Le processus x(t) est-il stationnaire au 2éme ordre ?

5. Soit le signal R(t) reçu à partir d'un radar, composé d'un signal utile U(t) et d'un bruit B(t) :

R(t) = U(t) + B(t)

U(t) : signal aléatoire uniformément réparti sur [-π,π] et B(t) : bruit gaussien centré de variance $\sigma^2 = 1$

- Calculer E{U} E{B} et E{R}
- Déterminer la fonction d'autocorrélation de R(t) en fonction de celle de U(t) et R(t)
- Trouver les deux cas pour lesquels R(t) est stationnaire au 2ième ordre (quelle hypothèses faut-il poser sur U(t) et B(t))
- Pour U(t) et B(t) indépendants, déterminer $S_R(f)$

6. Soient $X_1(t)$ et $X_2(t)$ deux signaux aléatoires stationnaires du second ordre. On considère $Z(t) = X_1(t) + X_2(t)$, a). Calculer $R_z(t,\tau)$. b). Si les deux signaux sont indépendants et qu'au moins l'un deux possède une moyenne nulle, donner l'expression de $S_z(f)$. c). Même question pour $Z(t) = X_1(t) \cdot X_2(t)$

7. Soient X(t) et Y(t) deux signaux aléatoires stationnaires et conjointement stationnaires. On considère Z(t) = X(t) + Y(t),

- Calculer $S_z(f)$.
- Les deux signaux sont supposés indépendants avec $R_X(\tau) = e^{-a|\tau|}$ et $R_Y(\tau) = b\,\delta(\tau)$, calculer $S_z(f)$.
- Si $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ avec φ une v.a equirépartie sur [0, 2π] , calculer $S_z(f)$

8. Soient X(t) et Y(t) deux processus aléatoires décorrélés SSL de moyennes 1 et de variance 2 et soit Z(t)=X(t)+Y(t)

- ✓ Z(t) est-il SSL ?
- ✓ Quel est l'intérêt de supposer qu'un processus est ergodique ?

9. Le signal aléatoire x(t) possède une fonction d'autocorrélation de la forme $R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\beta|\tau|}$. Un autre signal est lié à x(t) par l'équation déterministe suivante : y(t) = ax(t) + b, où a et b sont des constantes données.

- Quelle est la fonction d'autocorrélation de y(t) ? En déduire μ_y et σ_y^2
- Quelle est la fonction d'intercorrélation et de covariance de x(t) et y(t) ?
- Calculer le coefficient de corrélation. Ce résultat était-il prévisible, pourquoi ?

10. Soit φ une v.a. supposée suivre une loi uniforme sur [0, 2π] et soit X(t) un processus aléatoire défini comme suit : $X(t)=\cos(\varphi)\, e^{2\pi j f_0 t} + \sin(\varphi) e^{-2\pi j f_0 t}$

- Etudier la stationnarité d'ordre 1 et 2 du processus X(t).
- Peut-on calculer sa DSP? si oui calculer la.

11. Parmi les fonctions d'auto-corrélation satitistiques suivantes lesquelles peuvent être celles d'un processus aléatoire réel?

$Rx1(\tau)= \Lambda_2(\tau) - 2$	$Rx2(\tau)= -\Lambda_2(\tau) + 2$	$Rx3(\tau)= e^{-2\lvert\tau\rvert}$	$Rx4(\tau)= e^{-2\tau}U(\tau)$	$Rx5(\tau)=\delta(\tau-1)+\delta(\tau+1)$

12. Soit X(t) et Y(t) deux processus aléatoires SSL et décorrélés tels que :
$Rx(\tau)=4e^{-|\tau|}+9$ et $Ry(\tau)=\Lambda_2(\tau) + 4$

- Montrer Z(t)=X(t)-Y(t) est SSL. En déduire la puissance de Z(t)
- Peut-on calculer sa DSP? si oui calculer la.

13. Soient X(t) et Y(t) deux signaux aléatoires indépendants et stationnaires au sens large (SSL) tels que $R_X(\tau) = 9\, e^{-a|\tau|}$ et $R_Y(\tau) = b\,\delta(\tau) + c$. On considère Z(t) = X(t) + Y(t),

- Quelle condition doit-on imposer sur les constantes a, b et sur c (Justifier)
- Calculer les statistiques de premier ordre de Z(t)
- Calculer Rz(t,τ). Z(t) est-il SSL?
- Peut-on calculer sa DSP $S_z(f)$? si oui calculer la.

Solutions

1. $\mu_z=0$ $\sigma_z^2=1$, $Rz(\tau)=e^{-2a|\tau|}$ **2.** $R_a(\tau)=\mu_a^2+\sigma_a^2$ SSL non ergodique **3.** $\mu_x=0$, $\mu_y(t)=e^{\sigma^2 t^2/2}$ x(t) SSL et y(t) non
4. voir interro 1 2014/2015 **5.** $\mu_U=\mu_B=\mu_R=0$ $R_R(t,\tau)=R_B(t,\tau)+R_U(t,\tau)+R_{UB}(t,\tau)+R_{BU}(t,\tau)$
U et B SSL et indépendants ou U et B SSL et décorrélés $S_R(f)=S_U(f)+S_B(f)$
6 et 7. Voir exos similaires de la série **8.** Voir interro 1 2013/2014
9. $R_y(\tau)=\sigma_x^2 e^{-\beta|\tau|}+b^2$ $S_y(f)= 2\beta\sigma_x^2/(\beta^2+4(\pi f)^2)+ b^2\delta(f)$ $R_{xy}(\tau)=a\, R_x(\tau)$
10 et 11. Voir interro 1 2015/2016
12. Voir interro 1 2016/2017
13. Voir interro 1 2017/2018

TP n° 3 : Processus aléatoires (Stationnarité et Ergodisme) sous Matlab

Buts : Manipuler des signaux aléatoires, les caractériser grâce à leurs moments d'ordre 1 (moyenne, variance) et d'ordre 2 (autocorrélation, covariance).Aborder et acquérir les notions de stationnarité et d'ergodicité. Aborder le concept de filtre formeur.

Exercice 1:

```
%% Processus Aléatoire
clc; clear all; close all;
N_realis=1000; N_va=1000; A=1; f0=0.0025;
phi=2*pi*rand(N_realis,1);
for i=1:N_realis
for j=1:N_va
X(i,j)=A*cos(2*pi*f0*j+phi(i));
end
end
t=(1:N_va);
figure (1);plot(t,X(1,:),t,X(2,:),t,X(3,:),t,X(4,:),t,X(5,:),t,X(6,:))
%% Stationnarité d'ordre 1
moy=mean(X,1);v=var(X,1,1);
figure (2); subplot (1,2,1); plot(moy);AXIS([1 N_va -1 1]);
subplot (1,2,2); plot(v); AXIS([1 N_va 0 1]);
%% Stationnarité d'ordre 2
RX=cov(X);
figure (3); plot(t,RX(1,:),t,RX(4,:),t,RX(7,:),t,RX(10,:),t,RX(13,:),t,RX(16,:))
%% Ergodisme d'ordre 1 et 2
% d'ordre 1
moy_t=mean(X(1,:));v_t=var(X(1,:));
% d'ordre 2
tt=(-N_va+1:N_va-1);RXt=xcorr(X(1,:));figure (4);plot(tt,RXt);
```

1. Quelle est la différence entre les 6réalisations affichées.
2. A partir d'une visualisation peut-on prévoir la stationnarité ou l'ergodicité?
3. Ce processus est-il stationnaire d'ordre 1 ? Justifier
4. Calculer l'auto-corrélation statistique théorique puis commenter la figure 3.
5. Utiliser le workspace pour visualiser RX, ce processus est-il stationnaire d'ordre2 ? Justifier.
6. Comparer les moments statistiques et temporaux et conclure. En déduire la DSP de X.

Exercice 2

On considère le processus aléatoire $X(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ considérant φ cste et A uniforme entre -1 et 1.

1. Simuler le processus pour `N_realis=100; N_va=1000`
2. Es-il stationnaire d'ordre 1 ? (Vérifier théoriquement puis avec matlab)
3. Est-il stationnaire d'ordre 2 ? (Visualiser RX(1,:), RX(20,:), RX(30,:)) et utiliser le workspace ou imagesc(RX)
4. Peut-on calculer sa DSP statistique?

Exercice 3

On suppose le processus suivant b est ergodique d'ordre 2 et on se contente de déduire les propriétés statistiques des propriétés temporelles en étudiant une réalisation unique bb.

```
clc; clear all; close all;
sigma=0.0023; fe=22050; N=1000;
bb = sqrt(sigma)*randn(N,1);
% Afficher la corrélation Sigmab et la dsp du bruit blanc Sbb(f)
Sigmab=xcorr(bb)/N;   t=(-N+1:N-1);
figure; subplot(2,1,1); plot(t,Sigmab)
legend('Autocor du bruit blanc'); xlabel('Temps(s)'); ylabel('Amplitude');
Fb=fft(bb);  Sbb=abs(Fb).^2/N;
f=(0:fe/N:fe/2-1/N);subplot(2,1,2); plot(f,abs(Sbb(1:N/2)));
legend('Densité du bruit blanc'); xlabel('Frequence (Hz)'); ylabel('Amplitude');
```

1. Commenter les graphes obtenus.
2. Pourquoi n'obtient-on pas une DSP cste?
3. Prendre une moyenne de 2 et une variance de 4 et retrouver ces caractéristiques à partir de l'autocorrélation

Exercice 4

Télécharger le fichier 'vous avez du courrier en attente.wav' et le placer dans le même répertoire que votre programme commençant comme suit :

```
clc; clear all; close all;
nom_fich = uigetfile('*.wav', 'Selectionner le fichier son');
% Lire, écouter et afficher le son complet
[x,fe]=wavread(nom_fich);sound(x,fe); t=(0:length(x)-1)/fe; subplot(2,1,1);plot(t,x);
legend('Son');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude');
% afficher une partie du son qui correspond à une voyelle
N1=21000;N2=21500;y=x(N1:N2)
N=length(y);t=(N1:N2)/fe; subplot(2,1,2);plot(t,y);
legend('Voyelle sur 25 ms');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude');
% Calculer et afficher la DSP
Sy= abs(fft(y).^2)/N; f=(0:fe/N:fe/2-fe/N);
figure; plot(f,Sy));legend('Spectre'); xlabel('Frequence (Hz)'); ylabel('Amplitude (dB)');
```

1. Le signal étudié est un processus aléatoire ou une réalisation d'un signal aléatoire?
2. La DSP calculée est-elle d'origine statistique ou temporelle?
3. Calculer et visualiser la moyenne et la variance temporelles pour différentes parties du signal qui se chevauchent pour des durées de

N=1000,500, 250, 125. Pour quelle valeur de N peut-on considérer le processus stationnaire?

4. Expliciter l'importance des notions de stationnarité et d'ergodisme.

Exercice 5 Reprenons le programme 3 en y rajoutant ce qui suit, on obtient :

```
% Reponse fréquentielle du filtre formeur
a=[1.0 -0.839 -0.015 -0.320 0.197  0.055 -0.285  0.067  0.044 0.003 0.178]; b=[1  0];
y= filter(b,a,bb); [H,f]=freqz(b,a,length(f),fe);
figure; plot(f,20*log10(abs(H(1:length(f)))+eps),'r'); Ys=fft(y);
plot(f,20*log10(abs(H(1:length(f)))+eps),'r', f,20*log10(abs(Ys(1:length(f)))),'b');
legend('Filte Formeur','DSP du signal de sortie'); xlabel('Hz'); ylabel('Ampl (dB)')
```

1. Quel est le but des lignes rajoutées ? Commenter chaque figure.
2. Quelle est la nature du filtre formeur ? A quoi peut servir ce filtre ?
3. Rajouter les instructions nécessaires pour vérifier les formules suivantes :

- $\mu_y = \mu_x \quad H(f)\big|_{f=0}$ - $S_y(f) = TF(R_y(\tau)) = |H(f)|^2 S_x(f)$

Remarque : f=0 correspond sous matalb au 1er élément de H

4. Inverser a et b et commenter.
5. Donner une application cette notion de filtre formeur.

TP n° 3 : Processus aléatoires (Stationnarité et Ergodisme) sous Python

Buts : Manipuler des signaux aléatoires, les caractériser grâce à leurs moments d'ordre 1 (moyenne, variance) et d'ordre 2 (autocorrélation, covariance).Aborder et acquérir les notions de stationnarité et d'ergodicité. Aborder le concept de filtre formeur.

Exercice 1:

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt;
N_R=500; N_va=1000; A=1; f0=.002; X=[];
phi=np.random.uniform(0,2*np.pi,N_R);
t = np.linspace(0,N_va-1,N_va)
for i in range (N_R):
    X=np.append(X,A*np.cos(2*np.pi*f0*t+phi[i]));

X= np.resize(X,new_shape=(N_R,N_va))
plt.figure(1);plt.plot(t,X[0,:]); plt.plot(t,X[1,:]);plt.plot(t,X[2,:]);plt.plot(t,X[3,:]);
"""Stationnarité d'ordre 1"""
moy=np.mean(X,0); var=np.var(X,0);
plt.figure(2); plt.subplot(211); plt.plot(moy); plt.subplot(212); plt.plot(var);
"""Stationnarité d'ordre 2"""
Cx=np.cov(np.transpose(X),np.transpose(X))
plt.figure(3); plt.imshow(Cx);
plt.figure(4); plt.plot(Cx[0,:]); plt.plot(Cx[10,:]);plt.plot(Cx[20,:]);plt.plot(Cx[30,:]);
"""Ergodisme d'ordre 1"""
moy_t=np.mean(X[1,:]); var_t=np.var(X[1,:]);
"""Ergodisme d'ordre 2"""
Cx_t=np.cov((X[1,:],X[1,:]),mode='full');
plt.figure(5); plt.plot(Cx_t);
```

1. Quelle est la différence entre les 4 réalisations affichées.
2. A partir d'une visualisation peut-on prévoir la stationnarité ou l'ergodicité?
3. Ce processus est-il stationnaire d'ordre 1 ? Justifier
4. Calculer l'auto-covariance statistique théorique puis commenter la figure 3.
5. Utiliser l'explorateur de variables pour visualiser Cx, ce processus est-il stationnaire d'ordre2 ? Justifier.
6. Comparer les moments statistiques et temporaux et conclure. En déduire la DSP de X.
7. Faites les changements nécessaires pour générer le processus aléatoire $X(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ considérant φ cste et A uniforme entre -1 et 1 et reprendre toutes les questions.

Exercice 2

On suppose le processus suivant b est ergodique d'ordre 2 et on se contente de déduire les propriétés statistiques des propriétés temporelles en étudiant une réalisation unique bb.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt;
sigma=0.25; fe=22050; N=1000;Te=1/fe;
bb = (sigma**0.5)*np.random.randn(N);  t = np.linspace(0, N-1, N)*Te;
Rb = np.correlate(bb,bb,mode='full')/N; tt = np.linspace(1-N, N-1, 2*N-1)*Te;
plt.figure(1);plt.subplot(311); plt.plot(t,bb); plt.grid(True);
plt.subplot(312); plt.plot(tt,Rb); plt.grid(True);
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Autocor du bruit blanc');
TFb = np.fft.fft(bb); TFb=np.fft.fftshift(TFb);
Sbf=abs(TFb)**2/N; ff = np.linspace(-N/2, N/2-1, N)*fe/N;
plt.subplot(313); plt.plot(ff,Sbf); plt.grid(True);
plt.xlabel('freq'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('DSP du bruit blanc');
```

1. Commenter les graphes obtenus.
2. Pourquoi n'obtient-on pas une DSP cste?
3. Prendre une moyenne de 2 et une variance de 4 et retrouver ces caractéristiques à partir de l'autocorrélation
4. Rajouter ce qui suit :

```
import scipy.signal as sp;
a = np.array([1,-0.839,-0.015,-0.320,0.197,0.055,-0.285,0.067,0.044,0.003,0.178])
b = np.array([1,0]);
L = 500; fe=1; f,H= sp.freqz(b,a,L);  f=f*0.5*fe/np.pi;
Y = sp.lfilter(b,a,bb) ;
TFb = TFb[0:L];
plt.figure(2); plt.subplot(121);plt.plot(f, 20*np.log10(abs(TFb/TFb.max())));
plt.title('Signal d entree');  plt.xlabel('Fréq (Hz)');plt.ylabel('Amp');
plt.subplot(122);plt.plot(f, 20*np.log10(abs(H/H.max())));
plt.title('Module du Filtre (bleu)+ Sortie du filtre (orange)');  plt.xlabel('Fréq
(Hz)');plt.ylabel('Amp');
TFy =  np.fft.fft(Y); TFy = TFy[0:L];
plt.plot(f, 20*np.log10(abs(TFy/TFy.max())));
```

5. Quel est le but des lignes rajoutées ? Commenter chaque figure.
6. Quelle est la nature du filtre formeur ? A quoi peut servir ce filtre ?
7. Rajouter les instructions nécessaires pour vérifier les formules suivantes :

- $\mu_y = \mu_x \quad H(f)\big|_{f=0}$ - $S_y(f) = TF(R_y(\tau)) = |H(f)|^2 S_x(f)$

Remarque : f=0 correspond sous python au 1er élément de H soit H[0]

4. Inverser a et b et commenter.
5. Donner une application cette notion de filtre formeur.

Exercice 3

Télécharger le fichier 'vous avez du courrier en attente.wav' et le placer dans le même répertoire que votre programme commençant comme suit :

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt;
from scipy.io import wavfile as wf; import winsound ;
fname = 'vousavezducourrierenattente.wav';
winsound.PlaySound(fname, winsound.SND_FILENAME)
fe, X = wf.read(fname);
Te=1/fe; N=len(X); t = np.linspace(0, N-1, N)*Te;
plt.figure(1);plt.subplot(211); plt.plot(t,X); plt.grid(True);
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Phrase');
N1=21000;N2=21500; Y=X[N1:N2]  ; ty=np.linspace(N1, N2-1, N2-N1)*Te;
plt.subplot(212); plt.plot(ty,Y); plt.grid(True);
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('morceau de la phrase');
#zz=np.int8(Y) ; wf.write("z.wav", fe, zz);
#winsound.PlaySound("z.wav",winsound.SND_FILENAME) ;
```

1. Le signal étudié est un processus aléatoire ou une réalisation d'un signal aléatoire?
2. Calculer la DSP. Est-elle d'origine statistique ou temporelle?
3. Calculer et visualiser la moyenne et la variance temporelles pour différentes parties du signal qui se chevauchent pour des durées de

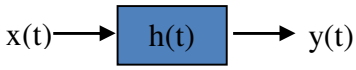
N=1000,500, 250, 125. Pour quelle valeur de N peut-on considérer le processus stationnaire?

Chapitre IV : Filtrage linéaire des signaux aléatoires

Un signal aléatoire est amené à être transmis, analysé, transformé, etc. Conserve-t-il son caractère aléatoire? sa stationnarité ? Que deviennent sa moyenne et son auto-corrélation statistiques lors d'un filtrage linéaire. On examinera la transformation des caractéristiques du signal dans le domaine fréquentiel qui permettra d'aborder la notion de filtre formeur. Ces connaissances nous permettront d'envisager une application directe qui est le filtrage optimal et adapté.

1. Processus aléatoires et SLIT

Soit un système linéaire et invariant dans le temps (SLIT) défini par sa réponse impulsionnelle h(t) ou sa fonction de transfert H(f) :



Rappelons que la réponse du système linéaire et invariant à un signal quelconque déterministe est donnée par :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Cette expression implique que si x(t) est un signal aléatoire, le signal en sortie y(t) est forcément un signal aléatoire puisque la sortie est une somme pondérée de l'entrée. Il faudra donc caractériser y(t) de manière statistique, de même que pour x(t), en étudiant les grandeurs statistiques déjà vues au chapitre précédent.

Moyenne et autocorrélation statistiques de y(t)

Supposons que x(t) est un processus aléatoire, la moyenne μy(t) du signal de sortie (aléatoire aussi) peut se calculer par :

$$\mu_y(t) = E\{y(t)\} = E\{x(t) * h(t)\} = E\left\{\int h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right\}$$
$$= \int h(\tau)E\{x(t-\tau)\}d\tau = \int h(\tau)\mu_x(t-\tau) = h(t) * \mu_x(t)$$

De la même façon, on peut calculer l'auto-corrélation statistique de y(t) soit R_y (t1,t2):

$$R_y(t_1,t_2) = E\{y(t_1)y^*(t_2)\} = E\{x(t_1) * h(t_1).x^*(t_2) * h^*(t_2)\} = E\left\{\int h(\tau_1)x(t_1-\tau_1)d\tau_1 \int h^*(\tau_2)x^*(t_2-\tau_2)d\tau_2\right\}$$
$$= \int\int h(\tau_1)h^*(\tau_2)E\{x(t_1-\tau_1)x^*(t_2-\tau_2)\}d\tau_1 d\tau_2$$

Si x(t) est stationnaire au sens large (SSL) alors:

- La moyenne statistique de y(t) devient :
- $$\mu_y(t) = \int h(\tau)\mu_x(t-\tau)d\tau = \int h(\tau)\mu_x d\tau = \mu_x \int h(\tau)d\tau = \mu_x H(0) \qquad (f=0)$$

- La corrélation statistique de y devient :

$$R_y(t_1,t_2) = \int\int h(\tau_1)h^*(\tau_2)E\{x(t_1-\tau_1)x^*(t_2-\tau_2)\}d\tau_1 d\tau_2$$
$$= \int\int h(\tau_1)h^*(\tau_2)R_x(\tau-\tau_1+\tau 2)d\tau_1 d\tau_2 = fct(\tau) = R_y(\tau)$$

Ainsi, si le signal d'entrée est stationnaire au sens large (SSL) alors le signal de sortie sera aussi SSL

Sachant que $f(\tau)*h(\tau) = \int f(\tau_2)h(\tau-\tau_2)d\tau_2 = \int f(\tau-\tau_2)h(\tau_2)d\tau_2$

Alors $f(\tau)*h(-\tau) = \int f(\tau_2)h(\tau_2+\tau)d\tau_2 = \int f(\tau+\tau_2)h(\tau_2)d\tau_2$

C'est ainsi que $R_y(\tau) = R_x(\tau)*h(\tau)*h^*(-\tau)$

Densité spectrale

En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres de l'équation précédente, la densité spectrale de puissance est obtenue :

$$S_y(f) = TF(R_y(\tau)) = TF\left(R_x(\tau)*h(\tau)*h^*(-\tau)\right) = S_x(f).H(f).H^*(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

Ainsi, la densité spectrale de puissance du signal de sortie est égale à la densité spectrale de puissance du signal d'entrée multipliée par le carré du module de la réponse en fréquences du système (la phase de H(f) n'intervient pas). C'est une propriété très importante à la base de nombreuses applications dont notamment la notion de filtre formeur et le filtrage optimal.

Par ailleurs, si l'on souhaite calculer la corrélation du signal de sortie en éludant la lourdeur de calcul inhérente au produit de convolution, on calculera la densité spectrale de puissance du signal de sortie et on prendre la transformée de Fourier inverse.

$$R_y(\tau) = TF^{-1}\left(|H(f)|^2 S_x(f)\right) = \int |H(f)|^2 S_x(f) e^{2\pi jf\tau} df$$

La puissance moyenne du signal de sortie est alors obtenue par : $E\{y(t)^2\} = R_y(0) = \int |H(f)|^2 S_x(f) df$

Formule des interférences

Soient y1(t) la sortie d'un système h1(t) dont l'entrée est un signal aléatoire x1(t) et y2(t) la sortie d'un système h2(t) dont l'entrée est un signal aléatoire x2(t). La formule de l'interférence permet de relier l'intercorrélation entre les sorties de deux filtres à celles des entrées de ces filtres:

$$S_{y1y2}(f) = H_1(f)S_{x1x2}(f)H_2^*(f)$$

On a aussi : $R_{xy}(\tau) = R_x(\tau)*h^*(-\tau) \Rightarrow S_{xy}(f) = S_x(f)H^*(f)$

et $R_{yx}(\tau) = R_x(\tau)*h(\tau) \Rightarrow S_{yx}(f) = H(f)S_x(f)$

Exemple 1 : Soit le processus stochastique x(t) SSL de corrélation statistique: $R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{|\tau|}{\theta}}$ et le système linéaire et invariant de réponse impulsionnelle h(t)=5e^{-2t}U(t). On obtient alors:

$$- \mu_y(t) = \mu_x H(0) = 0 \times \left. \frac{5}{2 + 2\pi j f} \right|_{f=0} = 0 \times 5/2 = 0$$

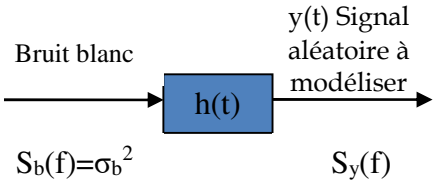
$$- S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = \left| \frac{5}{2 + 2\pi j f} \right|^2 . TF\left(\sigma^2 e^{-\frac{|\tau|}{\theta}} \right) = \frac{25.}{4 + (4\pi^2 f^2)} . \frac{2\sigma^2 \theta}{1 + 4\pi^2 f^2 \theta^2}$$

Exemple 2 :

Considérons par exemple le cas où le signal en entrée est un bruit blanc b(t). Sa DSP est donc une fonction constante. Alors, en sortie, on aura un signal tel que :$S_y(f)$ = constante $|H(f)|^2$

Notion de filtre formeur

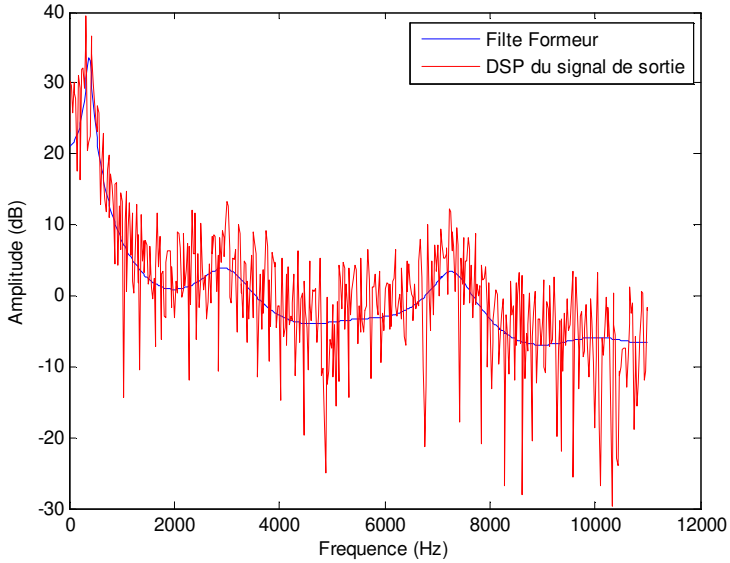
Supposons donné un signal aléatoire y(t): On appelle filtre formeur de y(t); le filtre de fonction de transfert H(f); tel que y(t) est généré par passage d'un bruit blanc b(t) dans H(f).



La détermination du filtre formeur s'effectue en inversant la formule précédente:

$$|H(f)|^2 = S_y(f) / \sigma_b^2$$

On pourra donc décrire le signal aléatoire par les paramètres du filtre et la variance du bruit blanc. En effet, si on fait passer le bruit blanc dans un filtre linéaire et stationnaire à paramètres ajustables et si on obtient le signal désiré (à modéliser) à la sortie du filtre, alors on peut dire que toute l'information spectrale est contenue dans le filtre représenté par ses coefficients (Voir exo 1 du TP n°3)



Remarque:Ainsi le bruit blanc joue pour l'aléatoire l'équivalent de la distribution de Dirac pour le déterministe.

Rappelons que le bruit blanc n'a pas d'existence physique car il serait de puissance infinie. Une approximation du bruit blanc à bande limitée appelé aussi bruit blanc coloré est défini par :

$$S_b(f) = \begin{cases} \sigma_b^2 & |f| < B \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

2. *Application 1: Filtrage adapté et filtrage optimal*

La transmission d'un signal s'accompagne de distorsions (dues aux milieux de transmission) qu'il serait souhaitable d'éliminer ou au moins d'atténuer avant tout traitement ultérieur. Si l'on connait le signal (déterministe) d'origine, on parlera de détection. Dans le cas contraire ou si le signal est aléatoire on emploiera le terme estimation. Il existe de nombreuses approches de détection, on peut, entre autres procéder par filtrage qui permettra de rehausser le signal noyé dans le bruit.

Considérons un signal déterministe x(t) supposé connu, dont on souhaite tester la présence possible dans une observation s(t). Le bruit d'observation est supposé quant à lui stationnaire SSL de densité spectrale $S_b(f)$. On cherche un filtre H(f) qui maximise le SNR à un instant précis T_0.

On suppose donc que le signal utile x(t) est noyé dans un bruit b(t) stationnaire SSL additif, d'où :

s(t) = x(t)+b(t)

On filtre le signal par un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle est h(t). A la sortie du filtre, on obtient un signal :

y(t) = s(t) * h(t) =x(t)*h(t)+b(t)*h(t) =x_2(t)+ b_2(t)

A la sortie du filtre et à l'instant T_0, le SNR s'écrit : $SNR(T_0) = \dfrac{Puis(x_2(T_0))}{Puis(b_2(T_0))}$

Le but étant de trouver *h(t)*, on va alors exprimer le SNR en fonction de *h(t)* (ou *H(f)*), ainsi :

- Le signal au numérateur $x_2(t)$est déterministe dons sa puissance s'exprime comme suit:

$$Puis(x_2(T_0)) = |x_2(T_0)|^2 = \left|TF^{-1}(X_2(f))\right|^2 = \left|\int X(f)H(f)e^{2\pi jfT_0}df\right|^2$$

- Le signal $b_2(t)$ est issu du filtrage d'un signal aléatoire *b(t)* SSL donc il est aussi SSL, c'est ainsi que sa puissance pourra se formuler comme suit:

$$Puis(b_2(T_0)) = E\left\{|b_2(T_0)^2|\right\} = R_{b2}(\tau = 0) = TF^{-1}(S_{b2}(f))\Big|_{\tau=0} = \int S_b(f)\left|H(f)^2\right|df$$

Ainsi, on arrive à exprimer le SNR comme suit :

$$SNR(T_0) = \frac{Puis(x_2(T_0))}{Puis(b_2(T_0))} = \frac{\left|\int X(f)H(f)e^{2\pi jfT_0}df\right|^2}{\int S_b(f)\left|H(f)^2\right|df} \qquad SNR(T_0) = \frac{\left|\int a(f)b^*(f)df\right|^2}{\int a(f)a^*(f)\,df}$$

Que l'on peut écrire aussi, comme étant :

Avec $a(f) = \sqrt{S_b(f)}H(f)$ et $b(f) = X^*(f)e^{-2\pi jfT_0} / \sqrt{S_b(f)}$

Pour trouver H(f) qui maximise ce rapport, on fait appel à l'inégalité de cauchy-schwartz:

$$\left|\int a(f)b^*(f)df\right|^2 \le \int a(f)a^*(f)df \quad \int b(f)b^*(f)df$$

Ce qui nous donne : $SNR(T_0) = \dfrac{\left|\int a(f)b^*(f)df\right|^2}{\int a(f)a^*(f)df} \le \int b(f)b^*(f)df$

avec égalité (soit le maximum) lorsque $a(f)=kb(f) \Rightarrow$ Cette dernière nous fournit l'expression suivante du filtre optimal H(f) :

$$H(f)_{optimal} = k.X^*(f)e^{-2\pi jfT_0} / S_b(f)$$

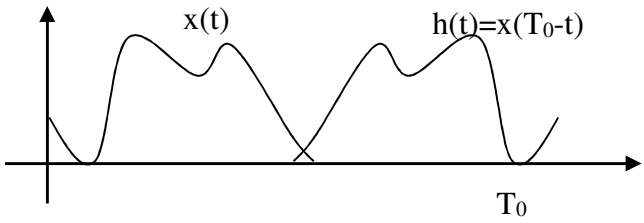
L'expression du SNR devient : $SNR(T_0)_{\max} = \int \dfrac{|X(f)|^2}{S_b(f)}df$ (Ce maximum est indépendant de T_0)

<u>*Cas particulier*</u> *:* Par ailleurs, si le bruit b(n) est blanc, on parle de filtre adapté:

$H(f)_{adaptél} = k / {\sigma_b}^2 X^*(f)e^{-2\pi jfT_0}$ donnant $h(t)_{adaptél} = k / {\sigma_b}^2 x^*(T_0 - t)$

$$SNR(T_0)_{\max} = \frac{E_x}{\sigma_b^2}$$

La réponse impulsionnelle du filtre représente le signal utile x(t) renversé et décalé de T_0.Le filtrage adapté revient à effectuer l'inter-corrélation entre l'observation et le signal à détecter.



Cette réponse n'est pas causale ce qui ne permet pas de l'appliquer en temps réel. Cependant, ce filtre peut-être appliqué à un signal sauvegardé.

<u>Exemple1</u> : Détection d'une impulsion

Considérons un système émettant une impulsion x(t) rectangulaire de durée T_0 et d'amplitude A. Le bruit additif est blanc. Le filtre aura la même expression, soit h(t)=x(t).

<u>Exemple 2</u> : En sonar ou en radar, on cherche à localiser une « cible ». Cette cible peut être par exemple un bateau ou un avion. Pour cela, on procède de la façon suivante : on émet un signal x(t), qui parcourt la distance *d* jusqu'à la cible, sur laquelle il sera réfléchi en direction d'un récepteur. Le récepteur reçoit alors le signal *y(t)*bruité, atténué (de *a*) et retardé de T_{AR} (voir TP n°4)

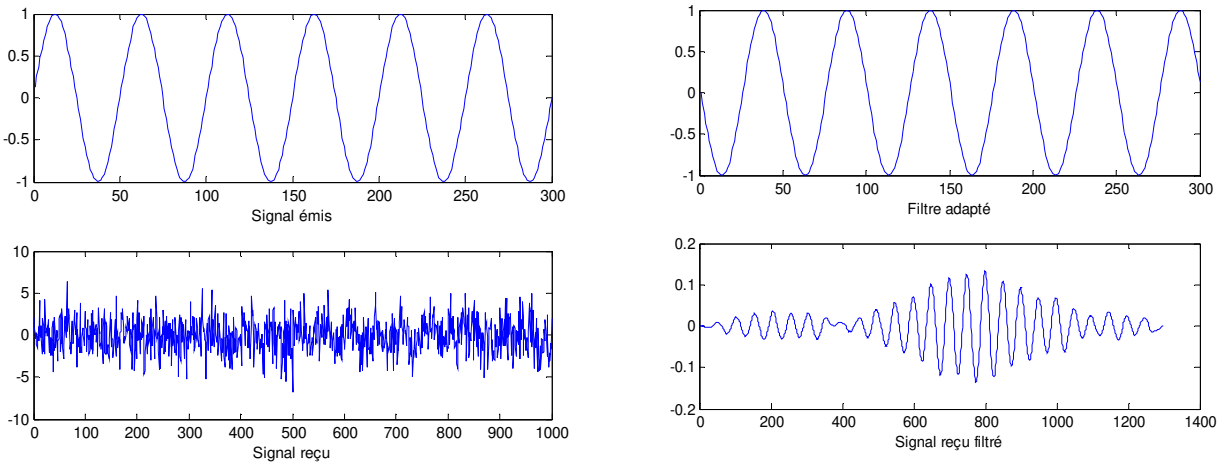
$y(t) = a.x(t - T_{AR}) + b(t)$.où$T_{AR}$ correspondant au temps d'aller-retour ($T_{AR} = 2d/v$)

On utilisera alors comme filtre adapté le filtre adapté à $x(t)$, soit $h(t) = x^*(T_0 - t)$

La sortie de ce filtre sera l'intercorrélation des signaux $y(t)$ et $x(t)$. On obtient alors :

$R_{yx}(t-T_0) = a.R_{xx}(t - T_0 - T_{AR}) + R_{bx}(t-T_0)$.

Sachant que l'autocorrélation est maximale en 0, l'intercorrélation sera maximale pour $t = T_0 + T_{AR}$ ce qui nous permettra de déterminerT_{AR}.



Remarques

- Le choix du signal 'x'est important : Il est souhaitable que le max de sa fonction d'autocorrélationR_{xx} soit facile à identifier (pic bien visible comme pour la fonction triangle)

-Dans le cas où le signal est sinusoïdal, le filtre adapté est un passe bande idéal centré sur la fréquence du signal (détection synchrone).

Exercice d'Application(Examen 2014/2015)

Soit $x(t) = 1 - t/T$ avec $t\ 0 \le t \le T$

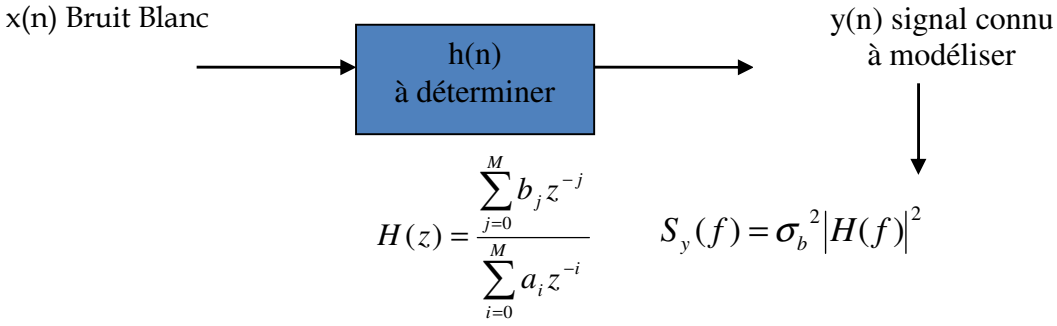
On utilise ce signal pour déterminer la distance d'un objet. Le signal reçu par le recepteur aprèsréflexion sur l'objet est :$y(t) = \alpha x(t - T_D) + b(t)$ où α est une constante réelle positive et$b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance σ^2. On veut maximiser le rapport signal sur bruit

1. Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre $h(t)$ telle que $\int h(t)^2 dt = 1$ (prendre $T_0 = T$).
2. Donner le rapport signal sur bruit après filtrage.
3. Exprimer l'inter-corrélation temporelle $R_{yx}(t-T_0)$ en fonction de l'auto-corrélation de $x(t)$et de l'inter-corrélation des signaux $b(t)$ et $x(t)$
4. Comment déterminer le temps T_D?
5. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le filtrage optimal pour un signal déterministe dont on ignore l'expression?

3. Application 2: Processus générateurs AR, MA et ARMA

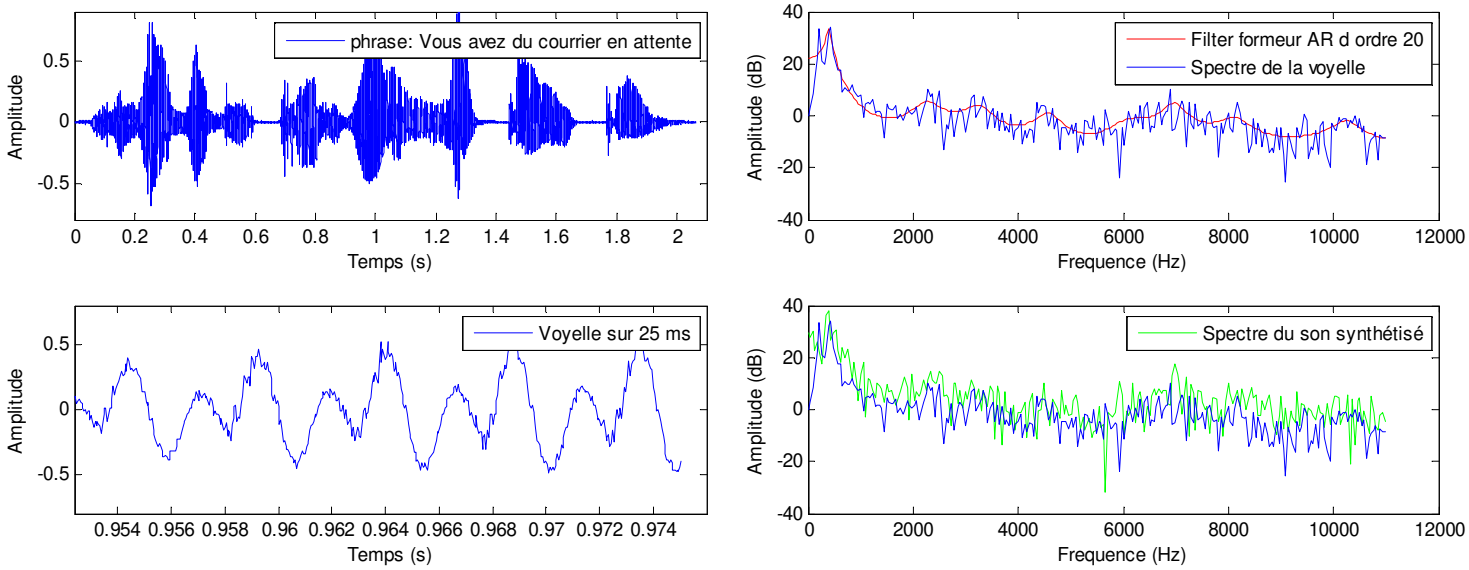
Nous avons vu précédemment qu'un signal aléatoire peut être modélisé (synthétisé) comme la réponse d'un filtre linéaire à une excitation sous forme de bruit blanc tel que $|H(f)|^2 = S_x(f)/\sigma_b^2$. Ce filtre formeur H(f) est aussi dit processus générateur. Ces paramètres associés à la variance du bruit σ_b^2 constituent le modèle mathématique correspondant au signal aléatoire. Le concept de processus générateur de signal a été particulièrement développé et appliqué avec des filtres numériques. Ce sont les modèles de signaux les plus utilisés en traitement statistique du signal (estimation, prédiction...).Selon la nature du filtre, on peut obtenir différents modèles de signaux (AR,MA, ARMA, etc.)

Exemple : Lors d'un appel par GSM (téléphone portable), le portable qui fait office d'un micro- ordinateur regroupant différentes fonctionnalités dont l'analyse, la synthèse, le codage, etc. va nous permettre de modéliser la parole (aléatoire) en opérant un codage LPC par tranches de dizaines de ms. Elle consiste à retrouver les paramètres du filtre formeur *h(n)* pour chaque tranche *y(n)* enregistrée et analysée. Ce sont ces paramètres (a_i et b_j) qui seront transmis pour produire un signal de synthèse approchant le signal original y(n).



$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{M} a_i z^{-i}} \qquad S_y(f) = \sigma_b^2 |H(f)|^2$$

Ci-dessous la phrase "vous avez du courrier en attente" échantillonnée à une fréquence fe =22050 (45531 échantillons) et un zoom sur une voyelle de durée 25 ms (500 échantillons).



En comparant l'allure du filtre formeur H(f) à celle de Sy(f), on note que l'on retrouve l'allure générale du spectre de la voyelle, notamment les fréquences dont la puissance est maximale. Sachant que le spectre de

la voyelle comporte 500 valeurs et que le filtre H(f) équivalent est obtenu à partir de 20 coefficients, il vaut mieux transmettre 21 coefficients (20 a_i + variance du bruit) que 500 valeurs.

C'est ainsi que les modèles autorégressifs sont d'un emploi de plus en plus répandu en traitement du signal : codage et transmission par prédiction linéaire, synthèse de parole, reconnaissance, etc.

Remarque : Le signal de parole est un processus aléatoire non-stationnaire à long terme, mais il est considéré comme stationnaire dans des fenêtres temporelles d'analyse de l'ordre de 20 à 30ms. Cette propriété de stationnarité à court terme permet donc une analyse et modélisation progressive du signal de parole Pour éviter toutes pertes d'information, on veillera à prendre des fenêtres chevauchantes.

Modèle auto-régressif (AR)

Les signaux autorégressifs sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre purement récursif. Ce filtre est donc de réponse impulsionnelle infinie.

$$H(z) = 1/\left(1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}\right)$$

A partir de H(z), on peut déterminer l'équation aux différences : $y(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)$

Cela signifie que le signal y(n) est supposé être prédictible en fonction d'un certain nombre de ses valeurs antérieures.

Sachant que x(n) est un bruit blanc alors d'où $R_{xx}(k) = \sigma^2 \delta(k)$

- $\mu_x = E\{x(n)\} = 0$
- $R_{xx}(0) = E\{x(n)^2\} = \sigma^2$
- $R_{xx}(k) = E\{x(n)x(n-k)\} = 0 \quad pour \quad k \neq 0$

Calculons alors $R_{yy}(k)$

$$R_{yy}(k) = E\{y(n)y(n-k)\} = E\{x(n)y(n-k)\} - \sum_{i=1}^{N} a_i E\{y(n-i)y(n-k)\}$$

$$= E\left\{x(n)\sum_{k'} x(n-k-k')h(k')\right\} - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i) = \sum_{k'} E\{x(n)x(n-k-k')\}h(k') - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$$

$$= \sum_{k'} R_{xx}(k+k')h(k') - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i) = R_{xx}(k)h(0) + R_{xx}(k+1)h(1) + \ldots\ldots - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$$

-Si k=0, $R_{yy}(0) = R_{xx}(0).h(0) - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(-i) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$

- Pour k=1 à N, $R_{yy}(k) = 0 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$

On peut utiliser une forme matricielle : R. a = S (Rappelons que pour un signal réel $R_{yy}(k)=R_{yy}(-k)$

$$\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & ..... & R_{yy}(N) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & ..... & R_{yy}(N-1) \\ & & ..... & \\ R_{yy}(N) & R_{yy}(N-1) & ..... & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ . \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

R est la matrice d'autocorrélation dont le terme général r_{ij} ne dépend que de la différence *i-j* (Matrice de Toeplitz). La résolution de ces équations dites de Yule-Walker permet de connaître les paramètres du filtre et la variance du bruit blanc.

On peut reformuler cette matrice sous la forme suivante (On l'emploiera en TP) :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & ..... & R_{yy}(P-1) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & ..... & R_{yy}(P-2) \\ & & ..... & \\ R_{yy}(P-1) & R_{yy}(P-2) & ..... & R_{yy}(0) \end{bmatrix}}^{C} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_P \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -R_{yy}(1) \\ -R_{yy}(2) \\ . \\ -R_{yy}(P) \end{bmatrix}}^{B}$$

$$\sigma^2 = R_{yy}(0) + \sum_{i=1}^{P} a_i R_{yy}(i)$$

Remarques :

- Nous ne disposons pas d'un processus aléatoire mais d'une seule réalisation soit *y(n),* il n'est pas donc pas possible de calculer l'auto-corrélation statistique $R_{yy}(k)$. Cette dernière sera remplacée par l'autocorrélation temporelle en faisant l'hypothèse que le processus est ergodique (voir exo 1 du TP n°4).

- Il existe divers algorithmes (Burg, Levinson) qui permettent d'estimer assez rapidement les a_i et σ sans passer par l'inversion matricielle. Tout comme il est possible de déterminer l'ordre N adéquat (critère AIC).

Exemple d'application

1. On considère le modèle auto-régressif (AR) d'ordre 1 tel que : $x(n)=-a_1.x(n-1)+b(n)$

- Déterminer les équations de Yule-Walker pour ce modèle
- En supposant que x(n) est connu, déterminer les paramètres du modèle.
- Déterminer les $R_x(k)$ (les $a_i$sont supposés connus)

Réponses :

- (a_1=-Rx(1)/Rx(0) σ^2=Rx(0)(1-a_1^2))
- (Rx(0)= σ^2/(1-a_1^2) Rx(1)=-$a_1\sigma^2$/(1-a_1^2)Rx(k)=(-a_1)$^k\sigma^2$/(1-a_1^2))

2. Refaire le même travail pour un modèled'ordre 2 tel que : x(n)=-a_1.x(n-1)-a_2.x(n-2)+b(n)

Réponses :

- a_1=Rx(1)[Rx(2)-Rx(0)]/[Rx(0)^2-Rx(1)^2] a_2=[Rx(1)^2-Rx(0)Rx(2)]/[Rx(0)^2-Rx(1)^2]
- σ^2=Rx(0)+Rx(1)^2[Rx(2)-Rx(0)]/[Rx(0)^2-Rx(1)^2]+Rx(2)[Rx(1)^2-Rx(0)Rx(2)]/[Rx(0)^2-Rx(1)^2]
- Rx(1)=-a_1Rx(0)/(a_2+1) Rx(2)=(-a_2+a_1^2/(1+a_2))Rx(0)Rx(0)=(1+a_2)σ^2/(1+a_2- a_1^2–a_1^2-a_2^3+$a_2a_1^2$)

Modèle à moyenne ajustée (MA)

Les signaux à moyenne mobile sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre purement transverse.

Ce filtre est aussi appelé filtre à réponse impulsionnelle finie : $H(z)=\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}$

Le signal *y(n)* est supposé pouvoir s'écrire comme une combinaison linéaire d'échantillons décorrélés entre eux, ce qui peut se formaliser comme une combinaison linéaire d'échantillons d'un bruit blanc *x(n)*.

On a donc : $y(n)=\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i)$

et $\mu_y = E\{y(n)\} = \sum_{i=0}^{M} b_i \mu_x = \mu_x \sum_{i=0}^{M} b_i = \mu_x . H_f(0)$

On cherche les paramètres du filtre qui génèrent y(t) à partir de x(t), bruit blanc centré :

$$R_{yy}(k) = E\{y(n)\,y(n-k)\} = E\left\{\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i).\sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j-k)\right\}.$$

$$R_{yy}(k) = \sum_{i=0}^{M} b_i . \sum_{j=0}^{M} b_j E\{x(n-i).x(n-j-k)\} = \sum_{i=0}^{M} b_i . \sum_{j=0}^{M} b_j R_{xx}(j+k-i)$$

- Si j+k≠i $\Rightarrow R_{yy}(k)=0$
- Sinon $\Rightarrow R_{yy}(k)=\sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$

Le problème est non linéaire en fonction des coefficients, il faut un algorithme de programmation non linéaire pour obtenir b_i à partir des $R_{yy}(k)$. Cependant, l'algorithme de Durbin permet d'approcher la solution optimale avec de bons résultats. Le principe de cet algorithme consiste à identifier le modèle MA d'ordre M avec un modèle AR d'ordre N>>M (TP n°4). En effet, tout modèle MA peut être identifié à un modèle AR d'ordre infini: $\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} = 1/\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}$

Exemple

On considère le modèle à moyenne ajustée (MA) :

A. d'ordre 1 tel que $x(n)=e(n)+b_1.\ e(n-1)$

- Calculer μ_x.
- En supposant que x(n) est connu, déterminer les paramètres du modèle.
- Connaissant les paramètres du modèle, déterminer les $R_x(k)$

B. d'ordre 2 tel que : $x(n)=e(n)+b_1.\ e(n-1)+b_2.\ e(n-2)$

- Calculer μ_x.
- Connaissant les paramètres du modèle, déterminer les $R_x(k)$

Réponses

$\mu_x=0$ $Rx(0)=(1+b_1^2).\sigma^2$ $Rx(1)=b_1.\sigma^2$ $Rx(k)=0$ pour $k\geq 2$

$b_1=(Rx(0)\pm sqrt(Rx(0)^2-4Rx(1)^2)/2Rx(1)$ $\sigma^2=2/(Rx(0)\pm sqrt(Rx(0)^2-4Rx(1)^2)$

$Rx(0)=(1+b_1^2+b_2^2).\sigma^2$ $Rx(1)=(b_1+b_1\ b_2).\sigma^2$ $Rx(2)=b_2.\sigma^2$ $Rx(k)=0$ pour $k\geq 3$

Remarque : Il est très important de remarquer que nous ne disposons que d'une seule réalisation du signal aléatoire à modéliser *y(n)*, de ce fait l'auto-corrélation statistique $R_{yy}(k)$ est obtenu de l'auto-corrélation temporelle en considérant le processus ergodique.

Modèle ARMA

Les signaux ARMA sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre récursif appelé aussi filtre à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I). Ces signaux sont une combinaison des signaux AR etMA. La fonction de transfert du filtre présente un numérateur et un dénominateur:

Soit $y(n)=\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)$ $\qquad H(z)=\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} \Big/ \left(1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}\right)$

La corrélation statistique de y(n) s'écrit alors : $R_{yy}(k)=-\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)+\sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$

C'est une équation non linéaire en a_i et b_j.

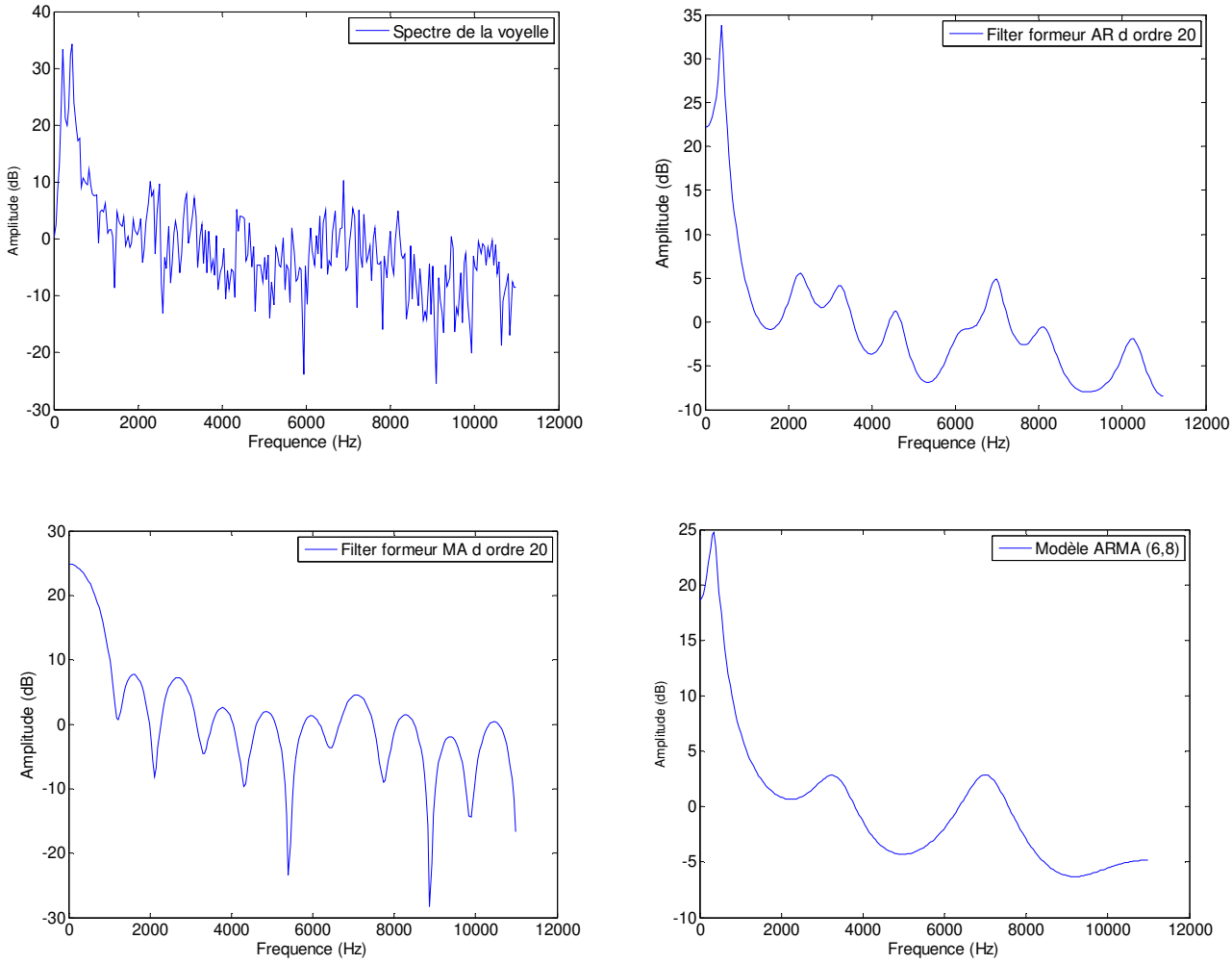
La modélisation ARMA peut se décomposer en une modélisation AR suivie d'une modélisation MA. Le modèle AR présente une simplicité de calcul par rapport aux modèles MA et ARMA du fait où les coefficients AR sont solutions d'un système linéaire d'équations. Alors que la détermination des coefficients MA et ARMA requiert la résolution d'équations non linéaires. Cependant, le modèle ARMA permet de modéliser aussi bien les minima que les maxima de la DSP et est donc moins restrictif que le modèle AR.

Les applications des modèles AR, MA, ARMA sont nombreuses, entre autres :

- la modélisation et la prédiction de série temporelle dite séries chronologiques Une série chronologique est une suite formée d'observations au cours du temps que l'on cherche à modéliser pour la prédiction de données futures. Ainsi, en finance, cela permet de modéliser le cours des devises ou du pétrole. Alors qu'en météorologie, les cela permet de faire des prévisions sur la température ou les précipitations. Dans chacun des cas, on essaiera à partir d' un échantillon de données de construire le meilleur modèle qui s'ajuste ces données.

- l'estimation du spectre d'un signal aléatoire, etc. Cette dernière application est basée sur l'identification des paramètres du modèle considéré : Le modèle AR est bien adapté aux signaux composés de raies pures dans du bruit blanc. Alors que le modèle MA est bien adapté aux signaux dont la puissance est nulle dans certaines bandes de fréquences.

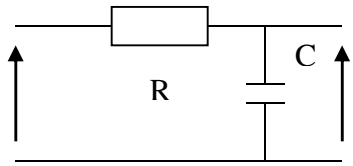
Exemple : Reprenons à nouveau l'exemple de parole, pour lequel, nous avons testé les trois variantes



Rappelons que pour un ordre du filtre faible, le modèle ne sera pas en mesure de capturer toutes les informations pertinentes du signal, à contrario s'il est trop élevé, il modélisera le bruit. Nous n'irons pas plus loin, dans le cadre de ce cours, le but n'étant que d'introduire les notions de modélisation et prédiction linéaire.

TD n° 4 : Filtrage et Modélisation des signaux aléatoires

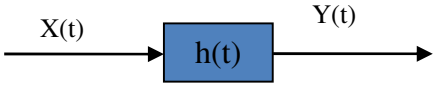
1. L'entrée x(t) du circuit est un bruit blanc de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \sigma_x^2\delta(\tau)$



- Déterminer la densité spectrale de la sortie y(t), notée $S_y(f)$
- Déterminer la fonction d'autocorrélation de la sortie y(t), notée $R_y(\tau)$ ainsi que sa puissance
- Remplacer R par une self L et C par une résistance et reprendre les questions

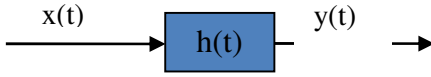
2. Soit X(t) = A + b(t) un signal réel aléatoire, où A est une constante réelle et b(t) est un bruit blanc de densité spectrale de puissance σ_b^2, et soit un filtre moyenneur de réponse impulsionnelle:

$$h(t) = \frac{1}{T}\prod_T(t - T/2)$$



- Exprimer l'autocorrélation statistique du signal d'entrée $R_{xx}(t,\tau)$. X(t) est-il SSL ?
- Déterminer la moyenne statistique de y(t).
- Montrer que $R_{yy}(\tau) = \frac{\sigma^2}{T}\Lambda_T(\tau) + A^2$ et en déduire σ_y et μ_y.
- Prendre A=2 et tracer X(t) et Y(t).

3. On considère le schéma ci-contre où x(t)=s(t)+b(t) avec s(t) = $\prod_1(t)$ et b(t) est un bruit blanc Gaussien centré de variance 1



- Déterminer la densité de probabilité de x(t) . x(t) est-il SSL ?

On considère b'(t) et s'(t) les sortes correspondant respectivement à b(t) et s(t).

- Calculer $S_{b'}(f)$ et $S_{s'}(f)$ en fonction de H(f)

On veut maximiser le rapport signal sur bruit (SNR):

- Déterminer et tracer h(t) pour k=2 et T_0=2.Calculer alors le SNR.
- Quelle loi de probabilité suit y(t) (justifier).
- Donner un exemple concret de l'utilisation de ce type de filtre
- Si s(t) est déterministe et inconnu, quel filtre utilise-t-on ?

4. On dispose d'un signal reçu qui est la version bruitée, retardée et atténuée d'un signal d'intérêt s(n). Le bruit b(n) est supposé blanc gaussien de variance σ^2. Le problème est de déterminer l'amplitude A et le retard $n_0$dans le signal reçu x(n) = A.s(n -n_0) + b(n). Sachant que le rapport signal-à-bruit est maximum en sortie du filtre adapté de réponse h(n) = s(-n).

- Vérifier que la sortie y(n) de ce filtre s'exprime comme la somme de deux fonctions de corrélation.
- Calculer la variance $\sigma_{b'}^2$du bruit de sortie.
- On prend pour s(n) une impulsion rectangulaire de largeur L, tracer alors un exemple de signal reçu et de sortie du filtre adapté.

5. Soit le signal aléatoire x(t) SSL dont la DSP est donnée par Sx(f)= $\sigma^2 B\prod_B(f)$

- Déterminer l'autocorrélation statistique de x(t)
- En déduire la moyenne et la variance statistique de x(t).

Ce signal est transmis à travers un SLIT dont la fonction de transfert H(f) = $\prod_A(f)$ avec A <B

- Le signal de sortie est-il aléatoire? (Justifier) SSL? (Justifier)
- Déterminer Sy(f) et en déduire Ry(τ) puis les moments statistiques d'ordre 1 de y(t).

6. Soit un signal aléatoire y(n) SSL et ergodique dont l'autocorrélation temporelle $\overline{R}_y(k) = \alpha^{|k|}$ avec 0<α<1

- Identifier le modèle linéaire adéquat (AR ou MA) pour y(n).
- En supposant que le système h(n) est filtre purement récursif, donner le schéma du modèle en définissant l'entrée, le système, et la sortie.
- Rappeler les hypothèses nécessaires liées à l'emploi de ce modèle.
- On considère que le modèle est d'ordre 1, déterminer ses paramètres.

7. On considère le filtre linéaire à temps discret défini par $y(n) = x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$.

où X(n) et Y (n) désignent respectivement les processus aléatoires réels d'entrée et de sortie du filtre où b1 et b2 sont 2 coefficients réels. On suppose que x(n) est une suite de variables aléatoires centrées**,** indépendantes et de variance σ^2**.**

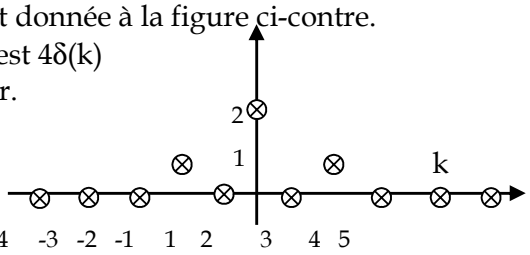
- Donner l'expression de Rx(k) et Sx(f) puis donner l'expression de Ry(k) et tracer la pour b_1=1 et b_2=-1.
- Connaissant la DSP du signal y(n), sur quoi se base-t-on pour le choix du modèle ?

8. Soit un processus AR défini par : $y(n)=-a_1 y(n-1) - a_2\, y(n-2) + x(n)$ où x(n) bb décorrélé de variance 1

- Calculer $\mu_y(n)$ puis sans calcul, expliquer pourquoi y(n) est SSL.
- Montrer que pour k>0, $Ry(k)=-a_1 Ry(k-1)-a_2\, Ry(k-2)$
- Déterminer $a_1$et a_2

9. On veut modéliser le signal y(n) dont l'autocorrélation statistique est donnée à la figure ci-contre. Ry(k). On suppose que l'autocorrélation statistique du signal d'entrée est 4δ(k)

- Déterminer les moments statistiques d'ordre 1 du signal à modéliser.
- S'agit-il d'un modèle AR ou MA? Justifier
- Déterminer l'ordre du modèle
- En supposant que 2 coefficients sont égaux, à partir des valeurs de Ry(k), déduire que l'un des coefficients est nul puis déterminer les coefficients de ce modèle puis donner l'équation aux différences liant y(n) et x(n)



Solutions

1. H(f)=1/(1+2πjfRC), $S_y(f)= \sigma_x^2/(1+4(\pi fRC)^2 R_y(\tau)=\sigma_x^2/2RC\, e^{-|\tau|/RC}$, $P=R_y(0)=\sigma_x^2/2RC$, interro1 16/17

2.$R_{xx}(t,\tau)=A^2+\sigma_b^2\delta(\tau)=fct(\tau)$ $\mu_x(t)=A \Rightarrow$SSL H(f)=sinc(fT)$e^{-\pi jfT}$ $\mu_y(t)=A$ filtre moyenneur

3. x(t) Gaussien de moyenne s(t) et de variance 1. x(t) non stationnaire $S_{b'}(f)=|H(f)|^2$ $S_{s'}(f)=|H(f)^2|\text{sinc}^2(f)$

h(t)= $2\prod_1(2-t)$ SNR=1 y(t) Gaussien Radar ou Sonar Passe-bas (moyenneur)

4.$y(n)=A.R_s(n-n_0)+ R_{bs}(n)$ $\sigma_{b'}^2=R_{b'}(0)$ $S_{b'}(f)=\sigma_b^2|H(f)|^2 \Rightarrow R_{b'}(0)=\sigma_b^2 \int_{-1/2}^{1/2} |H()f|^2\, df$

5. $R_x(\tau)=\sigma^2B^2\text{sinc}(B\tau)$,$\mu_x=0$,$\sigma_x^2=\sigma^2B^2$, x(t) SSL+h(t) SLIT⇒y(t) SSL, $S_y(f)=\sigma^2 B\prod_A(f)$, $R_x(\tau)=\sigma^2AB\text{sinc}(A\tau)$

6. Modèle AR ($R_y(k)\neq 0$) x(n) entrée bb, y(n) signal aléatoire à modéliser h(n) filtre formeur (modèle math)entrée bb + ergodisme $a_1= -\alpha$ $\sigma_x^2=1-\alpha^2$

7.$R_x(k)=\sigma_x^2\delta(k)$ $S_x(f)=\sigma_x^2$ MA d'ordre 2 $R_y(0)=1+b_1^2+b_2^2 R_y(1)=b_1(1+b_2)$ $R_y(2)= b_2$ $R_y(k)= 0$ pour $k\geq 0$

8. $\mu_y(n)=0$ entrée bb SSL ⇒sortie SSL voir cours (page 41) ou Interro1 14/15 **9.** Voir examen 17/18

Exercices supplémentaires

1. Soit Y(t) un processus aléatoire défini par Y(t) = X(t+1) - X(t-1), où X(t) est un processus aléatoire stationnaire de moyenne nulle. Montrer que $S_Y(f) = 4 . S_X(f) .\sin^2(2\pi f)$

2. On considère le signal $x(n) = g(n)\cos(2\pi k_0 n/N+\varphi)$ défini pour $n\in [0,N-1]$, et où g(n) est une fonction aléatoire SSL, indépendante de φ v.a uniforme ente 0 et 2π .

- Calculez l'autocorrélation de x(n)
- Déduisez en sa densité spectrale de puissance, en fonction de la DSP de g, $S_g(f)$.

3. On considère la transmission de deux symboles :

$s_0(t)=A$ $t\in[0,T]$

$s_1(t)=-A$ $t\in[0,T]$

à travers un canal à bruit blanc additif Gaussien. Le signal reçu s'écrit : $x(t)= s_i(t)+b(t)$ où b(t) est un bruit blanc centré de DSP σ_b^2

- Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre adapté h(t) correspondant à $s_0(t)$ telle que $\int h(t)^2dt=1$
- Même question pour $s_1(t)$.
- Donner le rapport signal sur bruit, dans chaque cas.

On note $y_{si}(t)$, la sortie du filtre correspondant à $s_i(t)$,

- Montrer que pour b(t) elle s'écrit : $y_b(T) = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T b(t)dt$
- Déterminer la moyenne et la variance de $y_b(T)$
- Dans l'hypothèse où le bruit blanc est Gaussien, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y= y_{si}(t)+y_b(t)$

4. On considère un signal déterministe s(t) qui modélise une impulsion (par exemple radar/sonar). Cette impulsion est réfléchie sur une cible et on suppose que le signal reçu en retour (par exemple sur l'antenne de réception) s'écrit :

$x(t) = s(t - \tau) + b(t)$

où $\tau \geq 0$ représente un retard et b(t) est un bruit blanc centré. Un traitement est appliqué au signal x(t) en réception afin de maximiser le critère de "rapport signal sur bruit". Plus précisément, on applique à x(t) un filtre dont la réponse impulsionnelle est notée h(t) et la réponse en fréquence est notée H(f).

- Rappeler comment s'exprime l'énergie E_s du signal s(t) ?
- Si y(t) est la sortie du filtre h(t) lorsque x(t) est en entrée, justifier en deux mots que l'on puisse écrire $x'(t) = s'(t - \tau) + b'(t)$ où s'(t) et b'(t) sont les sorties du même filtre h(t) avec respectivement s(t) et b(t) en entrée.
- Exprimer s'(t) en fonction de H(f) et S(f) et en déduire $s'(0) = \int H(f)S(f)\, df$.
- On note $N_0/2$ la densité spectrale de puissance de b(t).

(a) Que vaut la densité spectrale de puissance de b'(t) (notée $S_{b'}(f)$) ?

(b) En déduire la puissance de b'(t). Que vaut $E\{|b'(\tau)|^2\}$?

On désire maximiser le critère "rapport signal sur bruit" en sortie du filtre à l'instant τ par un filtrage adapté.

- Donner l'expression de h(t),H(f) et du RNS.

5. Expliquer le filtrage adapté

- Que permet-il de faire?

- Donner un exemple : Prendre un signal, le tracer puis tracer le signal bruité, le filtre adapté et la sortie après le filtrage adapté.
- Quelles hypothèses fait-on sur le bruit?

6. Soit $x(t) = t$ avec $0 \le t \le T$

On utilise ce signal pour déterminer la distance d'un objet. Sachant que le signal reçu y(t) par le recepteur est retardé de T' et bruité par un bruit blanc Gaussien de densité spectrale de puissance σ^2:

1. Tracer approximativement y(t).
2. Déterminer l'expression générale de la réponse impulsionnelle du filtre *h(t)* (dont l'énergie vaut 1) permettant de maximiser le rapport signal sur bruit.
3. Tracer h(t) en fonction de $T_0 = 2T$ et $k = \sigma^2$, puis z(t) la sortie du filtre (prendre T'=10).
4. Donner le rapport signal sur bruit après filtrage.
5. Pourquoi ce filtrage est dit, en général, optimal et, en particulier, adapté?

7. Soit le système LIT suivant : x(t) → h(t) → y(t)

A] On fournit à ce système en entrée $x_1(t)+x_2(t)$ deux signaux aléatoires décorrélés SSL.

1.Exprimer$E\{y(t)\}$

2. Exprimer $Rx_{1X2}(t,\tau)$ puis $S_y(f)$

B] On considère que $x_1(t) = \prod_2(t)$ et que $x_2(t)$ est un bruit blanc de variance 0.25. On veut maximiser le rapport signal sur bruit.

1. Exprimer et tracer h(t) causal.
2. Tracer le signal de sortie y(t)
3. Calculer le SNR après filtrage

8.Les signaux x(n) et y(n) ont été obtenus en filtrant, au moyen d'un filtre à réponse impulsionnelle finie, un bruit blanc b(n) gaussien centré de variance σ^2.

A]L'équation de filtrage est la suivante : x(n) = 2.b(n) + 0.5.b(n -1) -0.2.b(n - 2) + 0.1.b(n - 3)

- Calculez, en fonction de σ^2, les coefficients d'autocorrélation d'ordre 0,1,2,3 du signal x(n) .
- On notera Rxx (0), Rxx (1), Rxx (2), Rxx (3) ces coefficients.
- La répartition des niveaux d'amplitude du signal x(n) est elle gaussienne (sans justifier)?

B]y(n) = b(n) - b(n - 2)

- Donnez la TZ de la réponse impulsionnelle du filtre qui a permis d'obtenir y(n) à partir de b(n).
- Placez les zéros de ce filtre sur un cercle unité, quelles sont la ou les fréquence(s) coupées par ce filtre ?
- Tracez approximativement sa réponse en fréquence.

C]On considère maintenant le coefficient d'intercorrélation Rxy(k), entre les signaux x(n) et y(n) donné par Rxy(k) = E[x(n) y(n - k)*].

Calculez Rxy (0), Rxy (1), Rxy (2), Rxy(-1), Rxy(-2)

9.On considère un signal aléatoire stationnaire x(n) et l'on suppose connu ses coefficients d'autocorrélation :

$R(0) = 3\sigma^2$, $R(1) = 2\sigma^2$, $R(2) = \sigma^2$, $R(3) = 0$

- On cherche le filtre MA d'ordre 3 de ce signal. Identifiez les paramètres du filtre.
- Si le signal x(n) a été obtenu par filtrage d'un bruit blanc gaussien de variance σ^2 par un filtre à réponse impulsionnelle finie de fonction de transfert $H(z) = 1 + a.z^{-1} + b.z^{-2}$, en déduire les valeurs de a et b.

10. Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est y(n)=0.5 (x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3))

- Expliquer la notion de filtre formeur puis identifier ce modèle linéaire AR ou MA
- Donner la moyenne, l'autocorrélation et la DSP de son entrée *x(n).*
- Calculer et tracer $R_{yy}(k)$ puis déterminer $S_{yy}(f)$

11. Les signaux x(n) et y(n) ont été obtenus en filtrant, au moyen d'un filtre à réponse impulsionnelle finie, un bruit blanc b(n) gaussien centré de variance σ^2.

x(n) = 2.b(n) + 0.5.b(n -1) -0.2.b(n - 2) + 0.1.b(n - 3)y(n) = b(n) - b(n - 2)

- Identifier les 2 modèles puis pour chacun, calculer et tracer les coefficients d'autocorrélation
- x(n) et y(n) sont-ils Gaussiens (justifier)
- Calculer les intercorrélations Rxy(k), et Ryx(k) et commenter
- Donner quelques applications des modèles AR,MA, ARMA

12. Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est y(n)= - αy(n-1) - β y(n-2) + x(n)

- Identifier l'ordre du modèle linéaire AR.
- Déterminer les paramètres du modèles, on suppose que $R_{yy}(k)=2*0.5^{|k|}$

13. Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est y(n)= αy(n-1) + x(n)

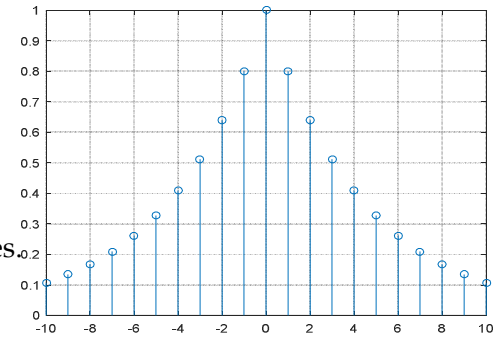
- Identifier l'ordre du modèle linéaire AR.
- Déterminer la moyenne de y(n) et montrer que $R_{yy}(k)=\alpha^k R_{yy}(0)$, déduire une condition sur α.
- Montrer que $R_{yy}(0)=R_{xx}(0)/(1-\alpha^2)$
- Tracer $R_{yy}(k)$ (Prendre $R_{xx}(0)=\sigma^2=1$).
- Citer 2 applications concrètes des modèles AR.

14. Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est y(n)= 0.25 y(n-1) - 0.25 y(n-2) + x(n)

- Identifier ce modèle linéaire AR ou MA (Justifier)
- Déterminer la moyenne de y(n) et donner l'expression de $R_{yy}(k)$.
- Calculer et tracer $R_{yy}(k)$ (Prendre $R_{xx}(0)=\sigma^2=1$).

15.On veut modéliser le signal y(n) SSL dont la corrélation statistique n'a été tracée que de -10 à 10. Elle est donnée à la figure ci-contre.

- S'agit-il d'un modèle AR ou MA? Justifier
- Donner les propriétés statistiques du signal d'entrée.
- On suppose que le modèle est d'ordre 1, déterminer ses paramètres.
- Expliquer la notion de filtre formeur et son utilité en téléphonie



Solutions

2.$R_x(m)=R_g(m)\cos(2\pi k_0 m/N)/2$ $S_x(f)=[S_g(f-k_0)+S_g(f+k_0)]/4$

3. Interro1 14/15 **4.** Interro2 15/16**5.** Ratt 15/16 **6.** Examen 15/16 **7.** Examen 16/17

8.$R_x(0)=(b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2).\sigma^2$ $R_x(1)=(b_0b_1+b_1b_2+b_2b_3).\sigma^2$ $R_x(2)=(b_0 b_2+ b_1 b_3).\sigma^2$ $R_x(3)=(b_0 b_3).\sigma^2$ $R_x(k\geq 4)=0$

$H(z)=(z^2-1)/z^2$ $R_{xy}(0)=2.2$ $R_{xy}(1)=0.4$ $R_{xy}(2)=-0.2$ $R_{xy}(3)=0.1$ $R_{xy}(-1)=-0.5$ $R_{xy}(-2)=-2$

9. $b_0=1$ $b_1=1$ et $b_2=1$ etpar identification, on trouve a=1 et b=1

10. MA, $\mu_x=0$ et $S_x(f)=\sigma^2 R_y(0)=\sigma^2$, $R_y(1)=R_y(-1)=0.75\ \sigma^2$, $R_y(-2)=R_y(2)=0.5\ \sigma^2$, $R_y(-3)=R_y(3)=0.25\ \sigma^2$, $R_y(k>3)=0$.$S_y(f)=\sigma^2\ (1+1.5\cos(4\pi f)+\cos(6\pi f)+\ 0.5\cos(8\pi f))$

11. Interro2 15/16**12.** Ratt 15/16 **13.** Examen 15/16 **14.** Ratt 14/15 **15.** Examen 16/17

TP n° 4 : Filtrage et Modélisation des signaux aléatoires (Sous Matlab)

Ce TP a pour objectif :
- Aborder une application directe qui est le filtrage adapté pour la détection d'un signal connu noyé dans du bruit blanc en augmentant le SNR.
- Modéliser un signal aléatoire par les modèles AR et MA (par approximation AR) et d'en extraire les informations utiles. Puis, une application d'identification sera envisagée.

Exercice 1

On veut simuler l'émission et la réception d'un signal radar. On suppose que le signal émis s(n) est un signal sinusoïdal et que le signal reçu x(n) est une version bruitée (bruit blanc) atténuée et retardée du signal émis.

```
clc; clear all; close all;
%Signal émis de longueur L
L = 300; t = (1 :L)'; f0=0.02; s=sin(2*pi*f0*t);
%Signal reçu
N=1000;  var = 4; bruit = sqrt(var)*randn(N,1);Retard = 500; A=0.8;
x= bruit; x(Retard+t) = A*x(Retard+t)+s;
figure; subplot(211); plot(s);  xlabel('Sig émis'); subplot(212); plot(x); xlabel('Sig reçu');
% Création du Filtre adapté
for i=0:L-1
h(i+1)=s(L-i);
end
figure; subplot(211); plot(s);xlabel('Sig émis');
subplot(212); plot(h); xlabel('Filtre adapté');
% Filtrage
y = conv(h,x); y = y/(length(y));figure; subplot(2,1,1); plot(x); xlabel('Signal reçu');
subplot(2,1,2); plot(y); xlabel('Signal reçu filtré');
tems_aller_retour=find(y>=max(y))-L
```

1. Montrer que pour $y(t) = a.x(t - T_{AR}) + b(t)$ où b(t) est un bb, on obtient lors d'un filtrage adapté($h(t) = x^*(T_0 - t)$) en sortie l'expression suivante $R_{yx}(t\text{-}T_0) = a.R_{xx}(t - T_0\text{-}T_{AR}) + R_{bx}(t\text{-}T_0)$.
2. Que représentent A, s et x?
3. Arrive-t-on à identifier la partie comportant la sinusoïde dans le signal reçu? pourquoi?
4. Expliciter la boucle. Quel est, alors, le lien entre x et h ?
5. Expliquer l'instruction `tems_aller_retour=find(y>=max(y))-L`
6. Commenter le programme plus particulièrement les figures. Quel est le but de ce programme ?
7. Tester d'autres signaux utiles (par ex : `s = ones(L,1)`) et commenter. Pour détecter le temps d'aller-retour, lequel des 2 signaux vous paraît préférable ?
8. Faire varier la puissance du bruit (var=2 puis 4 en gardant une moy=0) et commenter.
9. Simuler le processus de l'aide au stationnement en mettant ce programme dans une boucle pour un Retard de 700 à 0 avec un pas de 50 et rajouter à la fin les instructions :
   `pause(tems_aller_retour/500);beep;` dans la boucle.
   Mettre les figure en commentaires

Exercice 2:Télécharger le fichier 'vous avez du courrier en attente.wav' et le placer dans le même répertoire que votre programme commençant comme suit :

```
clc; clear all; close all;
nom_fich = uigetfile('*.wav', 'Selectionner le fichier son');
% Lire, écouter et afficher le son complet
[x,fe]=wavread(nom_fich);sound(x,fe); t=(0:length(x)-1)/fe; subplot(2,1,1);plot(t,x);
legend('Son');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude');
% lire, écouter et afficher une partie du son qui correspond à une voyelle
N1=21000;N2=21500;[y,fe]=wavread(nom_fich,[N1 N2]);sound(y,fe)
N=length(y);t=(N1:N2)/fe; subplot(2,1,2);plot(t,y);
legend('Voyelle sur 25 ms');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude');
% Afficher le spectre
Sy=fft(y); f=(0:fe/N:fe/2-1/N);figure;plot(f,20*log10(abs(Sy(1:length(f)))+eps));
legend('Spectre'); xlabel('Frequence (Hz)'); ylabel('Amplitude (dB)');
```

I.Nous allons commencer par **déterminer les paramètres du** modèle soit l'étape de **modélisation**

```
% Déterminer et afficher les coefficients de prédiction linéaire
P=20;           % Nbre de coefficicents du modèle AR>2
R= autocorr(y,P); C = toeplitz(R(1:P));  B = -R(2:P+1); a = inv(C)*B;a = [1 a'];
sigma= sum(a.*R');
% Visualisation de la réponse fréquentielle du filtre formeur
[h,f]=freqz(1,a,length(f),fe);
figure; plot(f,20*log10(abs(h(1:length(f)))+eps),'r',f,20*log10(abs(Sy(1:length(f)))),'b');
xlabel('Frequence (Hz)'); ylabel('Amplitude (dB)')
legend('Filter formeur AR d ordre 20','Spectre de la voyelle')
```

II. Entamons la partie **synthèse** en ayant comme **données de départ les paramètres du modèle (a_i et sigma)**. Donc à partir de σ^2 et des coefficients AR 'a' trouvés, synthétisons et écoutons le son 'zz' .

```
%Synthèse du signal modélisé à partir des coefficients AR
noise = sqrt(sigma)*randn(N,1);son_synt= filter(1,a,noise);
son_synt = son_synt/max(son_synt); %Normalisation
y = y/max(y);figure;  t=t-P/fe; plot(t,y);
legend('Voyelle à modéliser');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude');
hold on; plot(t,son_synt,'g');
legend('Voyelle synthétisée');xlabel('Temps (s)');ylabel('Amplitude');sound(son_synt,fe)
```

1. L'autocorrélation R_{yy} intervenant dans les équations de Yule-Walker est-elle statistique ou temporelle ? Qu'en est-il de celle calculée dans ce programme? Commenter.
2. Visualiser le son modélisé et le son synthétisé ainsi que leurs spectres en db sur le même graphe.
3. Modifier P et commenter les graphes précédents.

III. Rajouter les lignes suivantes et donner une application possible.

```
r=roots(a);  r=r(imag(r)>0.01);  % Racines du dénominateur et Recherche des pôles positifs
req_form=sort(atan2(imag(r),real(r))*fe/(2*pi));  % convert en Hz et trier
for i=1:length(freq_form)
fprintf('Formant %d Frequence %.1f\n',i,freq_form(i));
end
```

4. Pourquoi utilise-t-on le modèle AR pour trouver les fréquences principales au lieu du signal 'y'?

IV. Sachant qu'un modèle MA peut être obtenu en **identifiant le modèle MA d'ordre M avec un modèle AR d'ordre P>>M** :

$$\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} = 1/\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}$$

5. Modifier le programme précédent en rajoutant l'instruction suivante au bon endroit:`b=impz(1,a,P);`
6. Expliquer comment on s'est servi de cette instruction pour obtenir les b_i.
7. Faire la modification suivante `son_synt= filter(b,1,noise);`et expliquer pourquoi
8. Observer les spectres de la voyelle modélisée et synthétisé et commenter.

TP n° 4 : Filtrage et Modélisation des signaux aléatoires (Sous Python)

Ce TP a pour objectif :
- Aborder une application directe qui est le filtrage adapté pour la détection d'un signal connu noyé dans du bruit blanc en augmentant le SNR.
- Modéliser un signal aléatoire par les modèles AR et MA (par approximation AR) et d'en extraire les informations utiles. Puis, une application d'identification sera envisagée.

Exercice 1

On veut simuler l'émission et la réception d'un signal radar. On suppose que le signal émis s(n) est un signal sinusoïdal et que le signal reçu x(n) est une version bruitée (bruit blanc) atténuée et retardée du signal émis.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt; import time; import winsound;
L=300; f0=0.02; N=1000; Te=1; Tar=500;
t = np.linspace(0, L-1, L)*Te; s=np.cos(2*np.pi*f0*t)
var=4; bb = (var**0.5)*np.random.randn(N);
x=bb; x[Tar:Tar+L]=x[Tar:Tar+L]+s;
h=s[::-1] ;y=np.convolve(x,h);
plt.figure(1);plt.subplot(311); plt.plot(s); plt.grid(True); plt.title('signal Emis');
plt.subplot(312); plt.plot(x); plt.grid(True);plt.title('signal Reçu Bruité');
plt.subplot(313); plt.plot(y); plt.grid(True);plt.title('signal Reçu Filtré');
TAR_estim=np.argmax(y)-L+1;
TARR=np.where(y==y.max())
```

1. Montrer que pour $y(t) = a.x(t - T_{AR}) + b(t)$ où b(t) est un bb, on obtient lors d'un filtrage adapté($h(t) = x^*(T_0 - t)$) en sortie l'expression suivante $R_{yx}(t-T_0) = a.R_{xx}(t - T_0 - T_{AR}) + R_{bx}(t-T_0)$.
2. Que représentent A, s et x?
3. Arrive-t-on à identifier la partie comportant la sinusoïde dans le signal reçu? pourquoi?
4. Expliciter l'instruction `h=s[::-1]`. Quel est, alors, le lien entre x et h ?
5. Expliquer l'instruction `TAR_estim=np.argmax(y)-L+1;`
6. Commenter le programme plus particulièrement les figures. Quel est le but de ce programme ?
7. Tester d'autres signaux utiles; par ex : `s = np.ones(L)` et commenter. Pour détecter le temps d'aller-retour, lequel des 2 signaux vous paraît préférable?
8. Faire varier la puissance du bruit (var=2 puis 4 en gardant une moy=0) et commenter.
9. Simuler le processus de l'aide au stationnement en mettant tout le programme dans une boucle pour un Retard (Tar) de 700 à 0 avec un pas de -50 et rajouter à la fin les instructions : `time.sleep(TAR_estim/500); winsound.Beep(500, 100)` dans la boucle. Mettre les figures en commentaires.

Exercice 2:Télécharger le fichier 'vous avez du courrier en attente.wav' et le placer dans le même répertoire que votre programme commençant comme suit :

Reprendre le programme de l'exo 3 dut TP n°3 (Chargement de la phrase Vous avez du courrier en attente et sélection d'une partie de la phrase)

I.Nous allons commencer par **déterminer les paramètres du** modèle soit l'étape de **modélisation**

```
import scipy.linalg as la; import scipy.signal as sp;
""" Modélisation AR"""
P=20;           "P Nbre de coefficicents du modèle AR>2"
y=y-np.mean(y)
R = np.correlate(y,y,mode='full')[len(y)-1:];
#R=R/R.max();  "Autocor"
C = la.toeplitz(R[0:P]);
B = -R[1:P+1];
a = la.inv(C).dot(B)
a = np.append(1,a)
sigma_carre = sum(a*R[0:P+1]);

""" Visualisation de la réponse fréquentielle du filtre trouvé et du signal y de départ"""
b = np.array([1,0]);
f,H= sp.freqz(b,a,L//2);  f=f*0.5*fe/np.pi;
TFy = np.fft.fft(y); TFy = TFy[1:L//2+1];
plt.figure(2); plt.subplot(121);plt.plot(f, 20*np.log10(abs(TFy/TFy.max())));
plt.plot(f, 20*np.log10(abs(H/H.max())));
plt.title('Module du Filtre trouvé (orange)+ Signal original modélisé(bleu)');
plt.xlabel('Fréq (Hz)');plt.ylabel('Amp');
```

II. Entamons la partie **synthèse** en ayant comme **données de départ les paramètres du modèle (a_i et sigma**). Donc à partir de σ^2 et des coefficients AR 'a' trouvés, synthétisons et écoutons le son 'zz' .

```
""" Synthèse à partir du filtre trouvé"""
bb = (sigma_carre**0.5)*np.random.randn(L); bb=bb-np.mean(bb);
y_synt = sp.lfilter(b,a,bb) ;)
```

1. L'autocorrélation R_{yy} intervenant dans les équations de Yule-Walker est-elle statistique ou temporelle ? Qu'en est-il de celle calculée dans ce programme? Commenter.
2. Visualiser les spectres du son synthétisé t du filtre en db sur le même graphe.
3. Modifier P et commenter les graphes précédents.

III. Rajouter les lignes suivantes et donner une application possible.

```
""" Détermination des fréquences principales """
from math import atan2
freq_form=[];
r=np.roots(a);
for i in r:
    freq_form=np.append(freq_form,atan2(np.imag(i),np.real(i))*fe/(2*np.pi))
freq_form=sorted(freq_form)
```

4. Pourquoi utilise-t-on le modèle AR pour trouver les fréquences principales au lieu du signal 'y'?

IV. Sachant qu'un modèle MA peut être obtenu en **identifiant le modèle MA d'ordre M avec un modèle AR d'ordre P>>M** :

$$\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} = 1/\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}$$

5. Modifier le programme précédent en rajoutant l'instruction suivante au bon endroit :
Dirac=np.zeros(10*P); Dirac[0]=1; bMA = sp.lfilter(b,a,Dirac); aMA = np.array([1,0]);
y_synt = sp.lfilter(bMA,aMA,bb) ;
6. Expliquer comment on s'est servi de ces instructions pour obtenir les b_i.
7. Faire la modification suivante `son_synt= filter(b,1,noise);` et expliquer pourquoi
8. Observer les spectres de la partie modélisée et synthétisé et commenter.

Chapitre 5 : Estimations statistique

Supposons que l'on veuille connaître le poids 'p' ou la taille 'T' que devrait avoir un enfant de 4 ans. Pour ce faire, on prendra un échantillon d'enfants de 4 ans que l'on pèsera et dont on mesurera la taille. Une moyenne sur ces mesures nous fournira une estimation $\hat{p}$ du poids une estimation $\hat{T}$ de la taille. Cet échantillon devra bien sûr être le plus grand possible et le plus hétérogène possible (plusieurs ethnies). L'estimation de la durée moyenne d'une communication téléphonique est très utile aux opérateurs de téléphonie pour ajuster les prix et offres en conséquence ou pour la gestion du trafic. Autre exemple : les intentions de vote. Dans chacun des cas, un échantillon est considéré pour représenter la population.

1. Estimateur

Dans de nombreuses situations, on ne dispose pas directement de mesures sur la variable d'intérêt mais que d'une observation liée à notre variable inconnue. Le but des techniques d'estimation est d'utiliser les observations pour extraire de l'information sur la grandeur d'intérêt. Ceci doit fait de la meilleure façon qui soit et implique plusieurs choix dont la relation mathématique entre l'observation et la variable à estimer.

Dans les problèmes d'estimation, on a, en général, affaire à deux catégories de variables :

X: Un vecteur de variables inconnues que l'on cherche à déterminer

Y: Un vecteur de variables mesurées (observation ou échantillon) liées à x.

Déterminer **X**à partir de **Y**(et donc en fonction de **Y**) consiste à traiter de manière déterministe les mesures **Y**pour obtenir une grandeur $\hat{X}$, proche de**X**, soit :$\hat{X} = fct(Y)$.

On peut distinguer les deux cas suivants :

-X et Y sont aléatoire (estimateurs de Bayes).

- Si X est déterministe et Y aléatoire (estimateurs de Fisher)

Un estimateur est donc une valeur $\hat{X}$ calculée sur un échantillon Y tiré au hasard (dit aussi observations), ce qui fait de $\hat{X}$ une variable aléatoire possédant une moyenne et une variance.

Exemple

Considérons que l'on veuille estimer la valeur d'une résistance R (TP n°5). On procède comme suit : On réalise N expériences indépendantes où l'on mesure le courant I(k) passant par la résistance et la tension U(k) à ses bornes. Ces mesures de courant et de tension sont toutes bruitées par un bruit dont on ignore la densité de probabilité.

Observations :Y = (I(1), U(1), I(2), U(2), . . ., I(N), U(N))

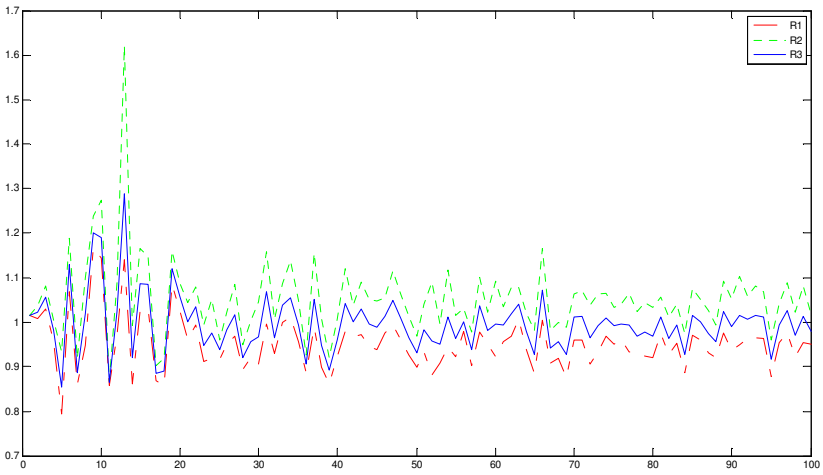
Variable à estimer : X= R

Bien que X et Y ne soient pas supposés avoir une densité de probabilité, on peut construire différents estimateur de R en fonctions des observations U(k) et I(k)

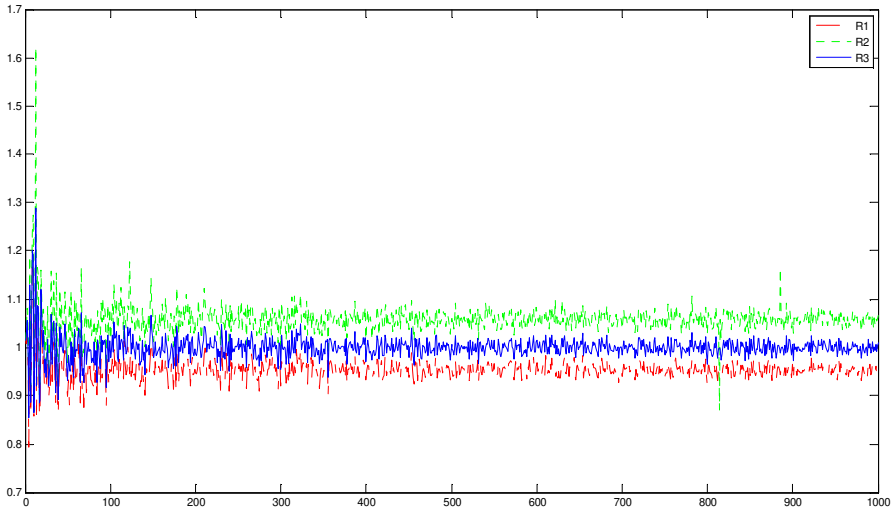
Estimateur 1 : $\hat{R}_1 = \dfrac{\sum_{k=1}^{N} U(k)I(k)}{\sum_{k=1}^{N} I^2(k)}$

Estimateur 2 : $\hat{R}_2 = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \dfrac{U(k)}{I(k)}$

Estimateur 3 : $\hat{R}_3 = \dfrac{\sum_{k=1}^{N} U(k)}{\sum_{k=1}^{N} I(k)}$



Ces figures montrent l'évolution de l'estimée d'une résistance R=1 en fonction du nombre de mesures pour U=I=1. Ci-contre une estimation pour N=100 et ci-bas pour N=1000



On remarque que le premier estimateur donne des valeurs comprises entre 0.9 et 1. Le deuxième fournit une estimation proche de 1 et 1.2 Ils sont donc tous deux fortement biaisés. Le troisième estimateur est quant à lui non biaisé.

Ainsi, pour pouvoir déterminer d'une façon constructive une règle d'estimation, il faut définir un critère qui évalue la qualité des résultats, et définir l'estimée comme l'application de Y en X qui optimise ce critère (minimiser une erreur ou une distance, dite aussi fonction de coût). Deux mesures de qualité de l'estimation sont largement utilisées, il s'agit du biais et de la variance.

2. Propriétés des estimateurs

Le biais est la moyenne de l'écart et la variance est la puissance de l'écart (mesure les fluctuations de l'estimateur autour de la valeur moyenne).

L'estimateur $\hat{x}$ a pour biais $b = E\{\hat{x} - x\}$ et pour variance: $\sigma^2 = E\{(\hat{x} - E\{\hat{x}\})^2\} = E\{\hat{x}^2\} - E\{\hat{x}\}^2$

- Si x est déterministe, alors le biais est $b = E\{\hat{x}\} - x$

- Si x est aléatoire, alors le biais vaut $b = E\{\hat{x}\} - \mu_x$

❑ Le biais indique la valeur moyenne de l'erreur d'estimation, trois cas sont possibles:

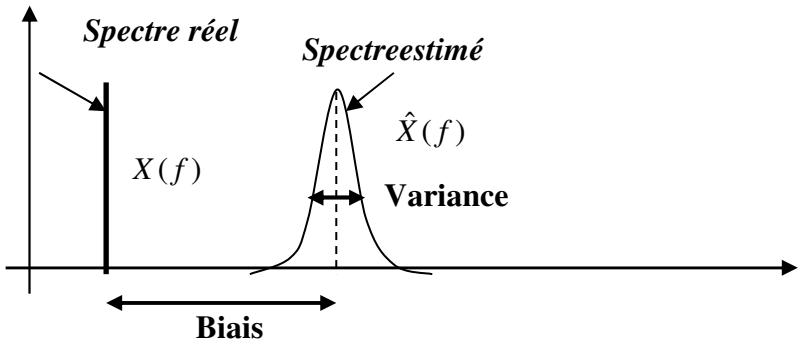
• $E[\hat{x}] = x$ ou μ_x pour toutes les valeurs possibles du paramètre. On dit alors que l'estimée est non-biaisée ;

• $E[\hat{x}] = x + b$ ou $\mu_x + b$. Si b est indépendant de x, dans ce cas l'estimateur a un biais constant et connu, qui peut toujours être éliminé ;

• $E[\hat{x}] = x + b(x)$, c'est-à-dire, on a un biais qui dépend de x(qui est inconnu).

❑ La variance doit être aussi petite que possible, de façon à que l'estimée soit concentrée autour de la vraie valeur du paramètre.

❑ Plus b et σ^2 sont faibles, meilleur est l'estimateur (estimateur non biaisée à variance minimale). Malheureusement, la diminution de l'un provoque l'augmentation de l'autre. Dans ces conditions, un estimateur biaisé pourrait être préférable, si le biais est faible, à un estimateur non biaisé mais de très grande variance. C'est le compromis biais-variance , on peut démontrer que $b^2 = E\{\hat{x} - x\}^2 - \sigma^2$ où $E\{\hat{x} - x\}^2$ est l'erreur quadratique moyenne.



❑ On dit qu'un estimateur est *consistant* s'il tend vers la vraie valeur du paramètre quand le nombre d'observations tend vers infini (comportement asymptotique) :

$$\lim_{N\to+\infty} b_N = \lim_{N\to+\infty} \sigma_N = 0$$

❑ Si l'estimateur est non biaisé, nous avons une borne *inférieure de la variance* (borne de Cramer Rao). Si la variance atteint la borne de CR, on dit que l'estimateur est *efficace.* Autrement dit, un estimateur non-biaisé est appelé efficace si sa variance dans est plus petite que celle de n'importe quelautre estimateur non-biaisé.

Remarque: Dans ce qui suit, on parlera de variables x_i iid (indépendantes et identiquement distribuées). L'exemple classique est celui du lancé de dé ou de pièce de monnaie : Les variables aléatoires représentent chaque résultat des lancers (0 pour face et 1 pour pile) suivent toutes la même loi de Bernoulli. Bien que les lancers soient successifs, le résultats d'un lancé donné ne dépend pas des résultats précédents et n'aura aucune influence sur les prochains lancés (pas de lien de dépendance)

Ce sont des variables aléatoires qui suivent toutes la même loi de probabilité (donc même moyenne et même variance) et sont indépendantes.

On en déduit les propriétés suivantes:

- $E\{x_i\}=m \ \forall i$

- $E\{(x_i-m)^2\}=\sigma^2$

- $E\{(x_i - m)(x_k - m)\} = 0$ pour $k \neq i$ (indépendants et centrés)

Exemple d'application

Supposons que l'on observe N échantillons indépendants $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ d'une variables aléatoire Y de moyenne $m= E\{Y_i\}$ et de variance $\sigma^2=E\{Y_i^2\}-m^2$.

1. On désire estimer X=m (déterministe) en supposant σ^2 connue. Pour cela, on étudie les deux estimateurs suivants :

$$X_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad X_2 = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i.Y_i$$

- Biais de $X_1= E\{\hat{X}_1\} - X=0$ - Variance de $X_1=\sigma^2/n$

- Biais de $X_2= E\{\hat{X}_2\} - X=0$ - Variance de $X_2=2\sigma^2(2n+1)/3n(n+1)$

2. On désire estimer $X= \sigma^2$ en supposant m connue. Pour cela, on étudie les deux estimateurs suivants :

$$X_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - m)^2 \text{ et} \qquad X_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_Y)^2$$

- Biais de $X_1= E\{\hat{X}_1\} - X=0$ - Biais de $X_2= E\{\hat{X}_2\} - X=(n-1).\sigma^2/n$

3. Estimateurs des moyennes statistiques

Les quantités $E\{x\}$,$E\{x\}^2$, ,$Sxx(f)$,... sont impossibles à calculer sur un ordinateur car elles nécessiteraient un nombre de points infini. Sur calculateur, on ne dispose que d'une séquence discrète et finie de N points. En réalité, on calcule des estimées de ces grandeurs en supposant généralement le signal stationnaire et ergodique. On remplace alors le calcul des moyennes statistiques par des moyennes temporelles.

A.Estimation de Moyenne

Soit N échantillons (x_0, x_1, …..,x_{N-1}) indépendants et identiquement distribuées (même loi avec même paramètre) d'un signal aléatoire stationnaire. On définit l'estimée $\hat{m}$ de E{x}

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k$$

On remarque donc qu'on remplace la moyenne statistique par la moyenne temporelle sur la séquence finie. Cet estimateur est non biaisé. En effet, du fait que le signal soit iid ,∀k;E [x_k} = m, alors :

$$E\{\hat{m}\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} E\{x_k\} = \frac{1}{N}.N.m = m \qquad \Rightarrow \qquad b\{\hat{m}\} = 0$$

Pour la variance d'estimation, on obtient :

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \text{var}\{\hat{m}\} = E\{(\hat{m} - E\{\hat{m}\})^2\} = E\left\{\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k - E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k\right\}\right)^2\right\}$$

$$= E\left\{\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} E\{x_k\}\right)^2\right\} = \frac{1}{N^2} E\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1}(x_k - E\{x_k\})\right)^2\right\}$$

Sachant que les x_k sont indépendants et que E{ x_k - E{ x_k } }=0, alors :

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{1}{N^2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} E\{(x_k - E\{x_k\})^2\}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}\sigma^2 = \sigma^2 / N$$

Cet estimateur est consistant, puisque pour N→∞, biais et variance tendent vers 0.

B. Estimateurs de variance

Selon que l'on connaisse ou non la moyenne, on utilisera l'un des deux estimateurs suivants :

$$\hat{\sigma}_1^{\,2} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k - m)^2 \qquad\qquad \hat{\sigma}_2^{\,2} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k - \hat{m})^2$$

Calculons le biais des deux estimateurs

- Pour le premier, on a : $E\{\hat{\sigma}_1^{\,2}\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} E\{(x_k - m)^2\} = \sigma^2 \qquad \Rightarrow \qquad b_{\hat{\sigma}_1^2} = 0$

- Pour le deuxième, on a : $E\{\hat{\sigma}_2^{\,2}\} = \frac{1}{(N-1)}\sum_{k=0}^{N-1} E\{(x_k - \hat{m})^2\} = \frac{1}{(N-1)}\sum_{k=0}^{N-1} E\{(x_k - m + m - \hat{m})^2\}$

$$E\{\hat{\sigma}_2^{\,2}\} = \frac{1}{(N-1)}\sum_{k=0}^{N-1} E\left\{\left(x_k - m + m - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_j\right)^2\right\} = \frac{1}{(N-1)}\sum_{k=0}^{N-1} E\left\{\left((x_k - m) - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(x_j - m)\right)^2\right\}$$

Sachant que $E\{(x_k - m)\} = 0$, on a :

$$E\{\hat{\sigma}_2^{\,2}\} = \frac{1}{(N-1)}\sum_{k=0}^{N-1}\left(E\{(x_k - m)^2\} + \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(x_j - m)\right)^2 - \frac{2}{N}E\{(x_k - m)^2\}\right)$$

$$= \frac{1}{(N-1)}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sigma^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}E\{(x_i - m)^2\} - \frac{2\sigma^2}{N}\right) = \frac{1}{(N-1)}\sum_{i=0}^{N-1}\left(.\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{N} - \frac{2\sigma^2}{N}\right) = \frac{N\sigma^2}{(N-1)}\left(\frac{N-1}{N}\right) = \sigma^2$$

Les deux estimateurs ne sont pas biaisés puisque on obtient la vraie valeur à chaque fois.

C. Estimateurs de la corrélation

Dans le cas discret, la fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire x; supposé ergodique, est définie par : $R_{xx}(k) = E\{x(n)x^*(n-k)\} = E\{x(n)x^*(n-k)\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{n=+N}x(n)x^*(n-k)$

A partir d'un échantillon (x_0, x_1, …..,x_{N-1}) indépendants et identiquement distribuées, plusieurs estimateurs sont alors possible:

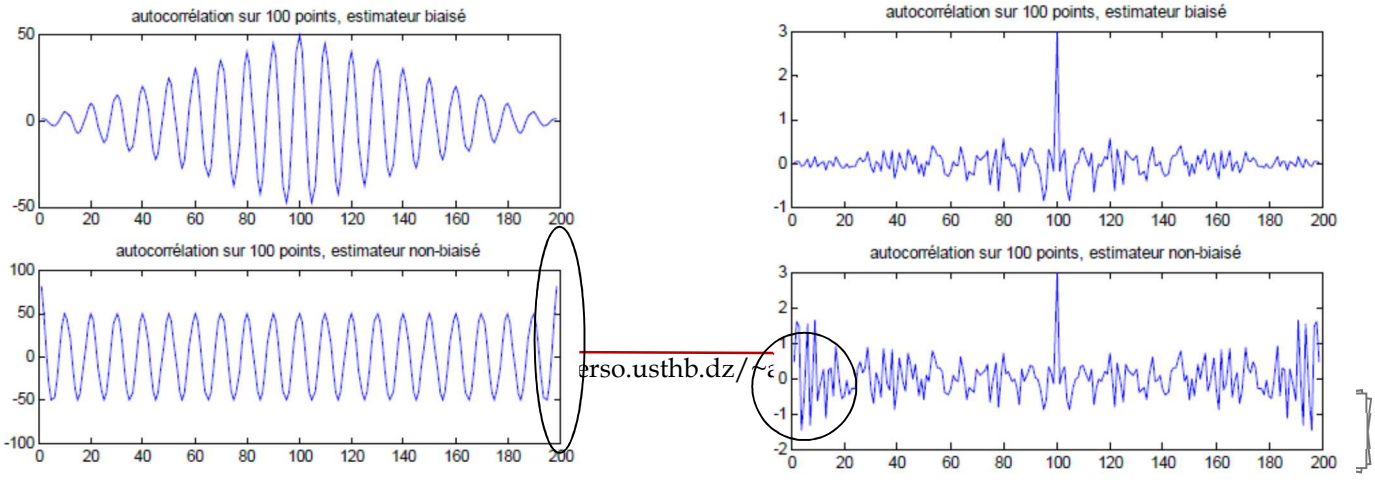
$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=k}^{N-1}x(n)x^*(n-k) \qquad \hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{n=k}^{N-1}x(n)x^*(n-k)$$

Le premier estimateur est biaisé car on ne tient pas compte du nombre d'échantillons disponibles qui varie avec le pas k. Le deuxième en tient compte, il est non biaisé. En effet :

$$E\{\hat{R}_{xx}(k)\} = \frac{1}{N-k}\sum_{n=k}^{N-1}E\{x(n)x^*(n-k)\} = \frac{1}{N-k}\sum_{n=k}^{N-1}R_{xx}(k) = R_{xx}(k)$$

On peut démontrer que la variance de cet estimateur tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Cet estimateur est donc consistant.

On observe par contre que lorsque k approche du nombre d'échantillons N, la variance de l'estimateur non biaisé devient excessive (voir exemple pour un bruit blanc et une sinusoïde).Alors que celle de l'estimateur biaisé varie beaucoup moins. C'est une des raisons pour lesquelles cet estimateur est souvent utilisé par la suite, malgré son biais.



erso.usthb.dz/

D. Estimateurs de la densité spectrale

a.Méthode du périodogramme

Supposons que l'on dispose d'une séquence de N points du signal aléatoire : x [$x_0,x_1,...,x_{N-1}$}.

Soit donc la séquence y_k obtenue à partir de la séquence x_k pondérée par la fenêtre f_k : $y_k=x_k.f_k$

La transformée de Fourier calculée sur la séquence finie sera donc convoluée avec le spectre de la fenêtre rectangulaire c'est-à-dire un sinus cardinal. Rappelons que les propriétés spectrales du sinus cardinal ne sont pas bien adaptées à l'analyse spectrale du signal (lobes secondaires importants). Pour y remédier, on emploie des fenêtres de pondérations (Hamming, Hanning, Kaiser,etc.)

La méthode du périodogramme à prendre la TF d'une réalisation :

$$\hat{S}_{xx}(f)=\frac{1}{N}\left|Y(f)\right|^2 \qquad avec \qquad Y(f)=\sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi jfk}$$

D'où

$$\hat{S}_{xx}(f)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} y_l e^{-2\pi jfl}\sum_{m=0}^{N-1} y_m e^{2\pi jfm}\;\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} y_l y_m\, e^{-2\pi jf(l-m)}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=k}^{N-1} y_l y_{l-k}\, e^{-2\pi jfk}=\sum_{k=0}^{N-1}\hat{R}_{yy}(k)e^{-2\pi jfk}=TF\left(\hat{R}_{yy}(k)\right)$$

Le calcul de l'espérance de $\hat{S}_{xx}(f)$ donne :

$$E\left\{\hat{S}_{xx}(f)\right\}=E\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\hat{R}_{yy}(k)e^{-2\pi jfk}\right\}=E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=k}^{N-1} y_l y_{l-k}\, e^{-2\pi jfk}\right\}$$

$$E\left\{\hat{S}_{xx}(f)\right\}==\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=k}^{N-1}E\left\{y_l y_{l-k}\right\}e^{-2\pi jfk}=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{N-k}{N}R_{yy}(k)\,e^{-2\pi jfk}=S_{yy}(f)*N\sin c(fN)^2$$

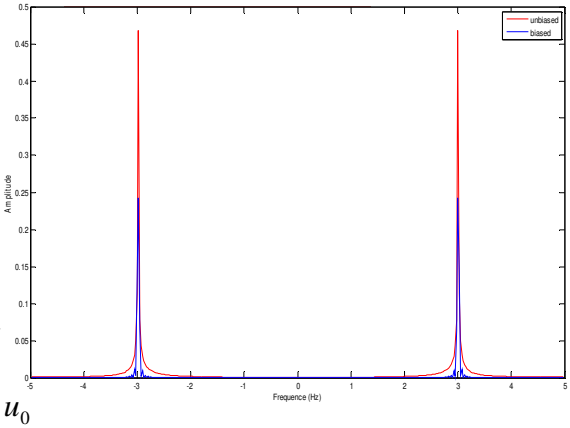
Le périodogramme est un estimateur biaisé. Le périodogramme est donc en moyenne la convolution du véritable spectre avec la transformée de Fourier de la fenêtre triangulaire. Néanmoins, lorsque $N\rightarrow\infty$, le biais devient nul. La variance est pratiquement indépendante de N et proportionnelle au spectre :≃ $Sx(f)^2$/ Remarquons que la qualité de l'estimation par périodogramme sera d'autant meilleure quele signal est observé sur une longue plage de stationnarité.

Afinde diminuer la variance de cet estimateur, on peut utiliser un périodogramme moyenné. Cela consiste à séparer le signal en K tranches (de longueur *N/K*), à calculer le périodogramme sur chaque tranche et à faire la moyenne.Du fait des K moyennages, la variance est presque divisée par K : néanmoins, les tranches étant plus courtes, la résolution diminue(*Δf=fe/N→fe/K*). En pratique, un taux de recouvrement de 40% donne de bons résultats. Au delà, l'indépendance entre les tranches n'est plus respectée.

b. La méthode du corrélogramme consiste à calculer d'abord l'estimée de *Rxx*(*k*) de la fonction d'autocorrélation puis à prendre pour estimée de la densité spectrale la TF de cette estimée.

$$\hat{S}_{xx}(f)=TF\left[\hat{R}_{xx}(k)\right]$$

Les corrélogrammes présentent chacun un extrema pour la fréquence normalisée 3 qui est bien la fréquence de la sinusoïde étudiée. Il ressort également de ces courbes que le corrélogramme non-biaisé permet de mieux faire ressortir la fréquence de la sinusoïde mais au dépend d'une plus grande variance sur les bords.



c) Dans cette méthode, on recherche un modèle AR, MA ou ARMA pour la séquence x_k. Dans le cas d'un modèle auto-régressif $x_k = a_1x_{k-1}+....+a_rx_{k-r}+u_k$

$$\hat{S}_{xx}(f) = \left| \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{r} a_k e^{-i2\pi fk}} \right|^2 u_0$$

5. *Estimateurs*

Le but des techniques d'estimation est d'utiliser les observations *X* (aléatoires) pour extraire de l'information sur la grandeur d'intérêt*Y*. Suivant que *Y* soit déterministe ou aléatoire, on fera appel à différentes techniques. Ainsi :

- Pour estimer une variable certaine, dans le cas le plus général, on souhaite que l'estimateur soit non biaisé, on cherche donc l'estimateur à minimum de variance dont le plus connue est le maximum de vraisemblance (MV) basée sur l'emploi de la probabilité des valeurs observées *p(X/Y)*. Si on autorise un biais, on cherche alors à minimiser l'erreur quadratique moyenne.
- Lorsque *Y* la variable aléatoire à estimer est aléatoire, on aura recours aux estimateurs Bayesiens. Plusieurs cas de figures sont alors possibles :

- Lorsqu'on suppose *p(Y)* connue, on utilisera en fonction de la fonction de coût à minimiser, différents estimateurs tels celui du maximum à postériori (MAP).
- Si seules sont connues les moments d'ordre 1 et 2 de *p(Y)*et*p(X)*, on utilise alors souvent l'estimateur linéaire non-biaiséà variance minimale.Le filtre de Wiener en est un exemple.

- Dans le cas où on ne possède aucune information statistique sur *X* et *Y* et que la seule dont on dispose est que *X* est une mesure bruitée de *fct(Y)*, on adoptera l'estimateur des moindres carrés pour estimer *Y* qui s'affranchit de tout cadre probabiliste.

Estimateur linéaire à variance minimale

Il consiste à chercher une estimée $\hat{y}$ de y qui soit une fonction linéaire des observations, c'est-à-dire:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{n} h_i x_i = h^T x$$

Dans le cas de l'estimation en moyenne quadratique, le filtre h doit alors être déterminé de telle sorte que la variance de l'erreur d'estimation $E\{(y-\hat{y})^2\}$ soit minimale :

$$E\left\{(y-\hat{y})^2\right\} = E\left\{(y-h^Tx)^T(y-h^Tx)\right\} = E\left\{y\,y^T\right\} - E\left\{y^T h^T x\right\} - E\left\{h x^T y\right\} + E\left\{h x^T h^T x\right\}$$

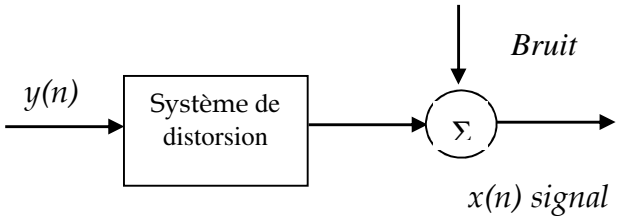
On commence par dériver par rapport à h puis on annule la dérivée, ce qui nousdonne

$$-E\{y^T x\}-E\{x^T y\}+2h\ E\{x^T x\}=0 \Rightarrow h=E\{y^T x\}/E\{x^T x\}=R_{yx}/R_{xx}$$

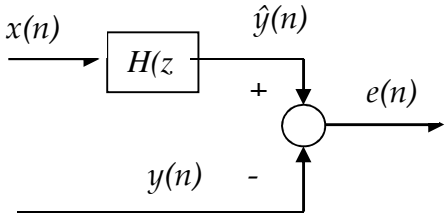
Application : ***Filtre de Wiener***

Dans de nombreuses applications, les signaux temporels sont entachés d'un bruit que l'on souhaite supprimer ou du moins réduire. Comme le signal utile aléatoire occupe les mêmes bandes de fréquences que le signal parasite, on ne peut recourir au filtrage classique. Le filtre de Wiener apporte une solution à ce problème lorsque le processus est stationnaire. Les filtres de Wiener sont dits optimum au sens du critère de l'erreur quadratique moyenne entre leur sortie et une sortie désirée. .

La figure suivante illustre un problème courant d'estimation linéaire. *y(n)* correspond au signal aléatoire stationnaire qui nous intéresse mais n'est pas directement accessible. Seul *x(n)* l'est, il est obtenu après passage de *y(n)* dans un système linéaire suivi de l'addition d'un bruit aléatoire stationnaire *bb(n).*



Le problème qui se pose est comment retrouver *y(n)*à partir de *x(n).* Une solution consiste à filtrer *x(n)* de telle sorte que la sortie $\hat{y}(n)$soit la plus proche possible de *y(n)*. On peut mesurer la qualité de l'estimation par*e(n)* défini par : $e(n)=y(n)-\hat{y}(n)$



On cherche donc un filtre qui minimisera l'erreur. Il est pratique de chercher à minimiser $e^2(n)$ car c'est une fonction quadratique facilement dérivable. Par ailleurs, étant donné que les signaux sont aléatoires, la fonction coût à minimiser est l'erreur quadratique moyenne (MSE) définie par : $\xi(n)=E(e^2(n))$

Si on suppose que le filtre recherché H est un filtre RIF de longueur N, on peut en calculer les coefficients par résolution d'un système linéaire d'équations. $\mathrm{h}=[b_0 \quad b_1 \quad \ldots \quad b_{N-1}]^T$

Le signal estimé $\hat{y}(n)$ peut alors s'écrire : $\hat{y}(n)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)$

Rappelons que l'on cherche à minimiser $\xi(n)=E\{e^2(n)\}=E\left\{\left(y(n)-\sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)\right)^2\right\}$

Pour en obtenir le minimum, il suffit de chercher de dériver et d'annuler la fonction coût par rapport aux variables $b_i$de la réponse impulsionnelle du filtre. La dérivée de la fonction coût par rapport au $j^{\text{ème}}$ point de la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$\frac{\partial \xi}{\partial b_j}=E\left\{\frac{\partial}{\partial b_j}\{e^2(n)\}\right\}=E\left\{2e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial b_j}\right\}=E\left\{2e(n)\frac{\partial}{\partial b_j}\{-b_j\,x(n-j)\}\right\}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial b_j}=-E\{2e(n)\,x(n-j)\}=-E\left\{2\left(y(n)-\sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)\right)x(n-j)\right\}$$

En faisant l'hypothèse que les signaux *x(n)* et *y(n)* sont stationnaires, et en annulant la dérivée, on trouve :

$$R_{yx}(j)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i R_{xx}(j-i)$$

Ce qui pour les différentes valeurs de *j*, nous donne le système d'équations suivantes à résoudre :

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & ..... & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & ..... & R_{xx}(N-2) \\ & & ..... & \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & ..... & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{yx}(0) \\ R_{yx}(1) \\ . \\ R_{yx}(N-1) \end{bmatrix}$$

Il faut noter que l'obtention des coefficients du filtre repose sur la connaissance de la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée et de l'intercorrélation entre les signaux d'entrée et de sortie désirée.

<u>*Exemple 1*</u> : On suppose que l'observation *x(n)=y(n)+bb(n)*et que le bruit additif *bb(n)* est centré et non corrélé au signal. Simplifions les équations de Wiener-Hopf en conséquences:

$R_{yx}(k)=E\{y(n)\ [\ y(n-k)+bb(n-k)\ ]\ \}= R_{yy}(k)$

$R_{xx}(k)=E\{(y(n)+bb(n))(y(n-k)+bb(n-k))\}= R_{yy}(k)+R_{bb}(k)$

Soit le système à résoudre suivant :

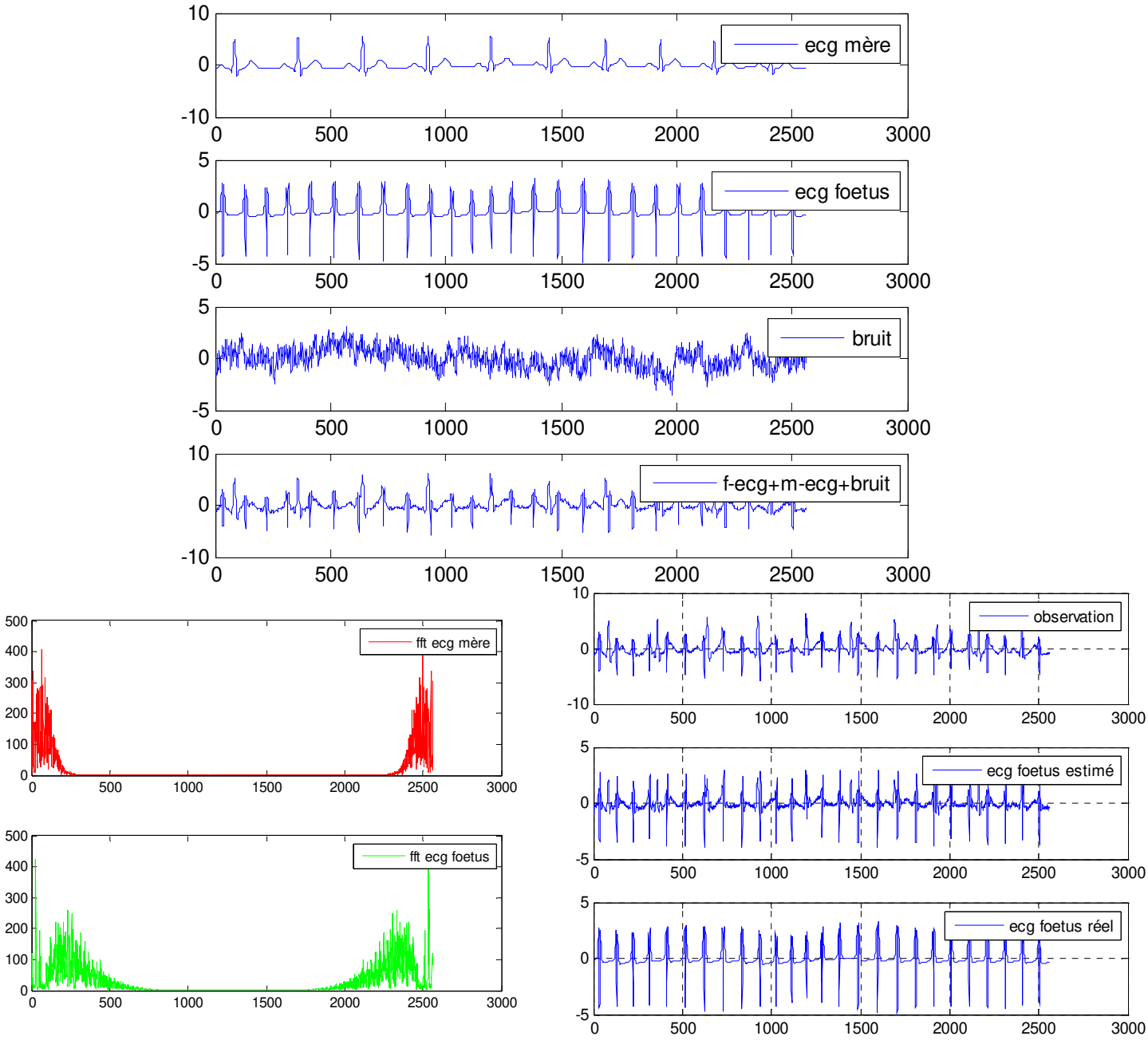
$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & ..... & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & ..... & R_{xx}(N-2) \\ & & ..... & \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & ..... & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0)-R_{bb}(0) \\ R_{xx}(1)-R_{bb}(1) \\ . \\ R_{xx}(N-1)-R_{bb}(N-1) \end{bmatrix}$$

<u>*Exemple 2*</u>:On suppose que l'observation *x(n) = y(n) + bb(n)*

Le signal à estimer *y(n)*a pour la fonction d'autocorrélation $R_y(k)=\alpha^{|k|}$ $0<\alpha<1$. Il est décorrélé du bruit blanc *bb(n)* de variance σ_b^2. Cherchons h(n)tel que $H(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} 1+\sigma_b^2 & \alpha \\ \alpha & 1+\sigma_b^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad H(z)=\frac{1}{\left(1+\sigma_b^2\right)^2-\alpha^2}\left[(1+\sigma_b^2-\alpha^2)+\alpha\sigma_b^2 z^{-1}\right]$$

<u>*Exemple 3*</u>: Comme illustration du filtrage de Wiener, on prend souvent la mesure de l'activité cardiaque d'un fœtus à l'aide d'un électrocardiogramme (ECG) pris au niveau de l'abdomen de la mère (le signal *x(n))* et qui va naturellement être perturbé par l'ECG de celle-ci auquel se rajoute le bruit thermique des électrodes et des équipements électroniques. Pour retrouver l'ecg du foetus, on réalise une deuxième mesure fournissant l'ECG de la mère (le signal bb). On peut employer alors le filtre de Wiener pour estimer le signal *y(n)* représentant l'ECG du foetus.



On peut observer que les TF des deux signaux ecg (mère et foetus) occupent la même plage de fréquences. A partir des auto-corrélations de l'ECG mesuré sur l'abdomen *x(n)* et celui de la mère *bb(n)*, on retrouve les paramètres b_i du filtre qu'on appliquera à x(n) pour obtenir une estimée de y(n) soit l'ECG foetal.

Remarque

Quand les fonctions d'auto et d'intercorrélation ne sont pas connues (cas le plus courant), alors on va approcher le filtre optimal de Wiener en utilisant une boucle de retour et un algorithme de minimisation: c'est ce que l'on appelle **le filtrage adaptatif**. Dans ce cas, on remplacera la connaissance des fonctions de corrélation par une phase d'apprentissage permettant de modifier itérativement la réponse impulsionnelle du filtre.

TD n°5 : Notions d'estimation et Filtrage de Wiener

1. Les éléments d'une population possèdent un caractère X qui suit une loi de probabilité dont la densité est donnée par :

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{kx^3}{\theta^4} & si\ \ 0 < x < \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Où k =cste et θ>0 est le paramètre inconnu.

- Déterminer la constante k.

- Montrer que l'estimateur $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ de θest biaisé et en déduire un non biaisé.

2. Soit $(X_1, X_2, \ldots\ldots X_N)$ avec N>10 un échantillon aléatoire issu d'une population suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. p(x)=p.δ(x-1)+(1-p).δ(x) . Considérons les trois estimateurs du paramètre p :

$$\hat{p}_1 = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i - 1\right)/N \qquad \hat{p}_2 = \frac{1}{N/2}\sum_{i=1}^{N/2} X_{2i} \qquad \hat{p}_3 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$$

- Comparer les trois estimateurs (consistance)

3. Soit $(X_1, X_2, \ldots\ldots X_N)$ une population de moyenneμet de variance σ^2. On considère les deux estimateurs de la moyenne :

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \mu_2 = \sum_{i=1}^{N} a_i X_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} a_i \qquad a_i \geq 1$$

- Montrer que ces deux estimateurs sont non biaisés.

4. Soient $(X_1, X_2, \ldots\ldots X_N)$, N variables aléatoires indépendantes suivant des lois de poisson de paramètre λ. Soient les estimateurs suivants du paramètre λsuivant :

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \qquad \hat{\lambda}_2 = \frac{x_1 + x_N}{2}$$

- Que signifient le biais et la variance pour un estimateur ?
- Calculer biais et variance des 2 estimateurs.
- Lequel est le plus efficace et pourquoi ?

5. On considère un processus de la forme X(n) = θ + W(n) où W(n) est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance 1 tel que W(n) et W(j) sont indépendants si n≠j. On suppose que θ suit une loi N (0,σ²) indépendante de W(n) n∈Z.
- Caractériser le filtre de Wiener permettant d'estimer θ à partir de X_n, X_{n-1}, ..., X_{n-p+1}.
- Calculer les coefficients du filtre.

6. On considère un processus de la forme X(n) = b(n) + αb(n-1) + W(n) où W(n) est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ² tel que W(n) et W(j) sont indépendants si n≠j. On suppose que b(n) est une variable aléatoire uniforme à valeurs dans {−1,1}, indépendante de(W(n))n∈Z et que de même, b(n) et b(j) sont indépendants si n ≠ j (P(b(n) = 1) = P(b(n) = −1) =1/2.
- Construire un filtre qui estime b(n) .

7. On désire dé-bruiter un signal de parole z(n) corrompu par du bruit additif b(n) indépendant du signal sonore et ce, par filtrage de Wiener. On suppose connues quelques valeurs d'autocorrélation pour les deux signaux telles que :
$R_{ZZ}[0] = 1.5$; $R_{ZZ}[1] = 0.5$; $R_{ZZ}[2] = 0.25$; $R_{ZZ}[3] = 0.125$; $R_{ZZ}[4] = 0.0625$
$R_{bb}[0] = 1$; $R_{bb}[1] = 0.25$; $R_{bb}[2] = 0.0625$; $R_{bb}[3] = 0.015625$
-Pourquoi ne peut-on pas employer un filtre adapté ou un filtre moyenneur ?
-Donner les équations de Wiener-Hopf permettant d'estimer z(n).
-Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{z}(n)$.
-Exprimer H(z).

8. On considère un problème d'estimation de bruit b(n).
Le signal observé est $x(n) = s(n) + b(n) - b(n-1)$.
On suppose que le signal s(n) est centré avec $R_{ss}(n)=0.8^{|n|}$et qu'il est décorrélé du bruit dont l'autocorrélation est $R_{bb}(n)=0.8\delta(n)$.

- Déterminer les moyennes statistiques de s*(n)* et *b(n).*
- Quand à-t-on recours au filtre de Wiener?
- Donner les équations de Wiener-Hopf permettant d'estimer *b(n)*
- Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{b}(n)$.
- Exprimer $\hat{b}(n)$

Solutions

1. k=4 b=(4θ/5)-θ $\theta = \frac{5}{4N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

2. p(x)=pδ(x-1)+(1-p)δ(x) μ_x=p σ_x^2=p(1-p)

- p_1	b=1/N	σ^2=p(1-p)/N	(=0	N→∞)	consistant
- p_2	b=0	σ^2=2.p(1-p)/N	(=0	N→∞)	consistant
- p_3	b=0	σ^2=p(1-p)/10	(≠0	N→∞)	non consistant

$p_1$meilleur estimateur pour N→∞

3.μ_1 voir cours μ_2 : b=0 ,$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\sigma^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$

4. $b_{\lambda 1}=0$ $b_{\lambda 2}=0$ $\sigma_{\lambda 1}^2=\sigma^2/N$ $\sigma_{\lambda 2}^2=\sigma^2/2$ Le premier (variance plus petite pour N>2)
5. $R_{xx}(0)=1+\sigma^2$ $R_{xx}(k>0)=\sigma^2$ $R_{\theta x}(k)=\sigma^2$ $b_i=\sigma^2/(N\sigma^2+1)$
6. $R_{xx}(1:3)=(1+\alpha^2+\sigma^2, \alpha, 0)$ $R_{bx}(1:3)=(1, 0, 0)$
7. μz=0, μb=0, signal (parole) aléatoire,
8. μs=0, μb=0 , Sb(f)=0.8. Quand signal utile et bruit occupent même plage de fréquences.
$b_1=1/3$ et $b_2=-1/3$.

Exercices supplémentaires

1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale B(16; p), où p est un paramètreinconnu. On se propose d'estimer p a l'aide d'un échantillon de taille n de X : (x_1; .....;x_N). On se propose d'étudier les estimateurs suivants :

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \hat{p}_2 = \frac{1}{16N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad \hat{p}_3 = \frac{1}{16}\left(X_1 + \frac{1}{N-1}\sum_{i=2}^{N} X_i\right)$$

- Lesquels sont sans biais, consistants.
- Lequel doit-on employer de préférence?

On rappelle que pour une loi Binomiale B(n; p) de paramètre n et p, moyenne et variance sont les suivants

$$m = np \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

2. Soit D la variable aléatoire représentant la durée d'une communication téléphonique. On suppose que la loi de D est la loi Uniforme U sur [0,θ], pour θ> 0. On veut estimer θ, pour cela, on observe un n échantillon : soit les durées D_i de N communications. Etudier l'estimateur suivant : $\hat{\theta} = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} D_i$

- Calculer son biais, sa variance, est-il consistant?

3.Soientσ_1^2, σ_2^2,.....σ_N^2 les N variances obtenues à partir de N échantillons aléatoires i.i.d. de tailles respectives n_1, n_2, ...n_N.

On considère l'estimateur de la variance suivant :$\hat{\sigma}^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_{2+} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n_N\sigma_N^2}{n_1 + n_1 + \ldots\ldots n_N}$

- Est-ce un estimateur biaisé?
- S'il est biaisé, en proposer un non biaisé.

On rappelle que $E\left\{\hat{\sigma}_i^{\,2}\right\} = \left\{(x_i - \hat{m})^2\right\} = \left\{(x_i - m + m - \hat{m})^2\right\} = (n_i - 1)\sigma^2 / n_i$ (voir cours p.52)

4. Soient les variables aléatoires X_1 et X_2 i.i.d. de moyenne μ et de variance σ^2. Comparer les deux estimateurs de μ suivants:

- $\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$ $\hat{\mu}_2 = \frac{aX_1 + bX_2}{a+b}$ avec a et b réels.

5.Soient (x_1, x_2, ...x_N) des échantillons indépendants correspondant à une population dans la moyenne est μ et de variance σ^2 . On considère les 2 estimateurs suivants de la moyenne:

$\widehat{\mu_1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ $\widehat{\mu_2} = ax_1 + (1-a)x_2$où 0≤a≤1

- Calculer le biais et la variance de chaque estimateur.
- Etudier leur consistance.
- Lequel vous semble préférable (Justifier) ?

6. On considère un processus de la forme X(n) = S(n) − 2S(n-1) + S(n-2) + W(n) où W(n) est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 tel que W(n) et W(j) sont indépendants si n≠j. On suppose que S(n) suit une loi N (0,1) indépendante de (W(n)) n∈Z et que de même, S(n) et S(j) sont indépendants si n ≠ j.

- Donner l'équation de Wiener–Hopf permettant de calculer les coefficients du filtre(anti causal) de Wiener d'ordre 3 permettant d'estimer S(n-2) à partir de X(n) , X(n-1) et X(n-2) .

-Vérifier que si σ = 0, la solution est : S(n-2) = -(X(n) + 3X(n-1) + X(n-2))/5

7.On considère une observation x(n)=s(n)+w(n) où w(n) est un bruit blanc de variance σ^2 indépendant de x(n). On suppose aussi que le signal utile x(n) est centrée et réduit et que les x(n) sont indépendants.

- Dans quel cas, utilise-t-on le filtre de Wiener ?
- Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 3 permettant de retrouver le signal utile $\hat{s}(n)$.
- Donner l'expression de $\hat{s}(n)$ en fonction de x(n).

8. On considère un problème d'estimation d'un signal *θ* bruité.

Le signal observé est $x(n) = \theta + b(n)$.

On suppose que *θ* suit une loi uniforme sur $[-\theta_0, \theta_0]$ et qu'elle est décorrélée du bruit *b(n)* qui possède une DSP qui vaut σ^2.

- Que signifie *θ* et b(n) sont décorrélés ? quel est le lien avec l'indépendance?

- Calculer la moyenne et la variance de *b(n)*. Est-il SSL?
- Déterminer le filtre de Wiener d'ordre N permettant de retrouver le signal utile *θ*.
- Exprimer H(z) puis θ.

9. On considère un problème d'estimation d'un signal s(n) bruité..
Le signal observé est $x(n)=\alpha s(n)+b(n)$.
On suppose que s(n) et b(n) sont SSL et décorréles et que le bruit possède une DSP $S_{bb}(f)=0.25$.

- Rappeler les conditions d'applications du filtrage de Wiener
- Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\widehat{s}(n)$. On supposera que $R_{ss}(k)=2*0.5^{|k|}$
- Exprimer H(z) puis $\widehat{s}(n)$

10. On considère un problème d'estimation d'un signal s(n) bruité et ayant subi un écho.
Le signal observé est $x(n)=s(n)+0.5s(n-1)+b(n)$.
On suppose connue l'autocorrélation du signal utile et qu'elle a pour expression $0.5^{|k|}$ et l'on suppose que le signal utile est décorrélé du bruit dont l'autocorrélation est $R_{bb}(k)=0.25^{|k|}$.

1. Déterminer les moyennes statistiques de x*(n)* et *b(n)*
2. Donner les équations de Wiener-Hopf permettant d'estimer *s(n)*
3. Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\widehat{s}(n)$.
4. Exprimer $\widehat{s}(n)$ et commenter

Solutions

1. $b_{\hat{p}1}=15p$, $\sigma^2_{\hat{p}1}=\frac{16}{N}p(1-p)b_{\hat{p}2}=0$, $\sigma^2_{\hat{p}2}=\frac{1}{16N}p(1-p)b_{\hat{p}3}=p$, $\sigma^2_{\hat{p}3}=\frac{N}{16(N-1)}p(1-p)$le 2ème

2. $b_{\hat{\theta}}=0$ $\sigma^2_{\hat{\theta}}=\frac{\theta^2}{3N}$

3.$b_{\widehat{\sigma^2}}=\sigma^2-\frac{N\sigma^2}{n_1+n_1+\ldots\ldots n_N}\hat{\sigma}'^2=\frac{\hat{\sigma}^2}{1-\frac{N}{n_1+n_1+\ldots\ldots n_N}}$.

4.mêmeque exo3 **5**. Interro 2 17/18

6. Solutions données dans énoncés respectifs

7. Estimer un signal aléatoire stationnaire (le débruiter).
$R_{xx}(0)=1+\sigma^2$, $R_{xx}(k>0)=0$, $R_{Sx}(k)=1$, $R_{sx}(k>0)=0$ $\hat{s}(n)=\frac{1}{1+\sigma^2}x(n)$

8. $E\{\theta . b(n)\}=\mu_\theta . \mu_b$ Indépendants⇒Décorrélés $\mu_b=0$ et $\sigma_b^2=\sigma^2$ $b_i=\sigma^2/(N\sigma^2+1)$ voir exo 6
9. Signaux : utile et observation stationnaires et conjointement stationnaires connus
$R_{xx}(k)=\alpha^2R_{ss}(k)+R_{bb}(k)$ $R_{sx}(k)=\alpha R_{ss}(k)$
10. même que 7

TP n° 5 : Notions d'estimation et Filtrage de Wiener (sous Matlab)

Buts : -Aborder les notions d'estimation ainsi que les propriétés des estimateurs (biais, variance) à travers un exemple

- étudier les estimateurs de la moyenne, de la variance, de la corrélation et de la DSP.
- Application du filtrage de Wiener

Exercice 1: On reprend les 3 estimateurs de la valeur d'une résistance R donnés comme suit :

$$\hat{R}_1 = \frac{\sum_{k=1}^{N} U(k)I(k)}{\sum_{k=1}^{N} I^2(k)} \qquad \hat{R}_2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{U(k)}{I(k)} \qquad \hat{R}_3 = \frac{\sum_{k=1}^{N} U(k)}{\sum_{k=1}^{N} I(k)}$$

Le programme suivant permet de simuler des courants et tensions bruitées et d'étudier les 3 estimateurs.

```
clc;clear all; close all;
randn('state', sum(100*clock));N=1000; it=1:N;R=1;
for k=2:N
    U=1+0.22*randn(1,k); I=1+0.22*randn(1,k);
R1(k)=sum(U.*I)/sum(I.^2);     R2(k)=sum(U./I)/k;     R3(k)=sum(U)/sum(I);
end
figure; plot(it(1:100),R1(1:100),'-.r',it(1:100),R2(1:100),':g',it(1:100),R3(1:100),'-b');
legend('R1','R2','R3');
figure; plot(it,R1,'-.r',it,R2,':g',it,R3,'-b');legend('R1','R2','R3');
for k=2:N
biais_R1(k)=mean(R1(1:k))-R;biais_R2(k)=mean(R2(1:k))-R;biais_R3(k)=mean(R3(1:k))-R;
end
figure ;subplot(311); plot(biais_R1); grid; legend('Biais de R1');
subplot(312); plot(biais_R2); grid; legend('Biais de R2');
subplot(313); plot(biais_R3);grid; legend('Biais de R3');
for k=2:N
var_R1(k)=var(R1(1:k));var_R2(k)=var(R2(1:k));var_R3(k)=var(R3(1:k));
end
figure ;subplot(311); plot(var_R1); legend('Var R1');
subplot(312); plot(var_R2); legend('Var R2');subplot(313); plot(var_R3);legend('Var R3');
```

1. Expliquer toutes les boucles.
2. Etudier le biais et la variance de chaque estimateur. Conclure.
3. Lesquels sont consistants? Lequel est le plus efficace?

Exercice 2: Utiliser le programme ci-dessus pour construire les estimateurs de la moyenne et de la variance

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \qquad \hat{\sigma}_1^{\,2} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} (x_k - m)^2 \qquad \hat{\sigma}_2^{\,2} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} (x_k - \hat{m})^2$$

1. Prendre m=1 et σ^2=2. Etudier le biais, la variance et la consistance de l'estimateur de la moyenne
2. Quelle est la différence entre les deux estimateurs de la variance ?
3. Comparer les 2 estimateurs de la variance sur les 100ères valeurs. Quel est le biais de chacun d'eux ?
4. Que remarque-t-on lorsque N augmente ? Les 3 estimateurs sont-ils efficaces?

Exercice 3 : Les deux estimateurs classiques de la fonction d'autocorrélation sont donnés par :

$$\hat{R}_{kk}(k)=\hat{R}_{kk}(-k)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k}x(n)x(n+k) \qquad et \qquad \hat{R}_{kk}(k)=\hat{R}_{kk}(-k)=\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}x(n)x(n+k)$$

```
clc; clear all; close all;
randn('state', sum(100*clock));
N = 200; f0=1; Fe=5*f0; Te=1/Fe; t=(1:N)*Te; m=0; v=2;tt=(-N+1:N-1)*Te;ff=Fe/2*(-N+1:N-1)/N;
bb=m+sqrt(v)*randn(1,N);Rbb1=xcorr(bb,'unbiased');Rbb2=xcorr(bb,'biased');
ss=cos(2*pi*f0*t); Rss1=xcorr(ss,'unbiased');Rss2=xcorr(ss,'biased');
figure ; subplot(2,1,1); plot(tt,Rbb1); subplot(2,1,2) ; plot(tt,Rbb2);
figure ; subplot(2,1,1); plot(tt,Rss1); subplot(2,1,2) ; plot(tt,Rss2);
figure;plot(ff,abs(fftshift(fft(Rss1)/N)),'r',ff,abs(fftshift(fft(Rss2)/N)),'b');
legend('unbiased','biased'); xlabel('Frequence (Hz)'); ylabel('Amplitude');
```

1. Calculer le biais des 2 estimateurs.
2. Des 2 estimations classiques de l'autocorrélation pour le bruit laquelle paraît la plus satisfaisante?
3. Même question pour l'autocorrélation de la sinusoide
4. Observer la DSP dans chaque et commenter en justifiant les différences (amplitude, lobes secondaires, etc.)

Exercice 4 : Il existe différentes méthodes d'estimation de la densité spectrale de puissance. Les méthodes les plus couramment utilisées sont :

- Périodogramme simple: $\hat{S}_{xx}(f)=\frac{1}{N}\left|X_T(f)\right|^2$ Corrélogramme: TF de la corrélation $\hat{S}_{xx}(f)=TF\left[\left\{\hat{R}_{xx}(k)\right\}\right]$
- Périodogramme moyenné **et** Périodogramme moyenné avec recouvrement (overlapping)

```
clc; close all; clear all;
N = 1024;    Te = 1/N;  Fe=N;    t = (0:N-1)*Te;  f1 = 100; f2 = 150; A1 = 2; A2=1.2; A3=4;
x = A1*cos(2*pi*f1*t) + A2*cos(2*pi*f2*t)+A3*randn(1,N); figure;plot(t,x);
% periodogramme
Sx1=abs(fft(x).^2)/N; ff1= Fe*(0:N/2-1)/N;
% spectre de l'autocorrélation
Rx=xcorr(x,'biased'); Sx2=fft(Rx); N2=length(Rx);ff2=Fe*(0:N2/2-1)/N2;
% Méthode de welch
T=256; SXXF=[];k=1;
for ii=1:T:N-T
    xt=x(ii+1:ii+T); Sx3(k,:)=abs(fft(xt,N)).^2/T;   k=k+1;
end
Moy_Sx3=mean(Sx3);
% Périodogramme moyenné avec recouvrement
T=256; Sx4=[];k=1;
for ii=1:T/2:N-T
    xt=x(ii+1:ii+T); Sx4(k,:)=abs(fft(xt,N)).^2/T;   k=k+1;
end
Moy_Sx4=mean(Sx4);
%affichage
figure; plot(ff1,Sx1(1:N/2),'b',ff2,abs(Sx2(1:N2/2)),'r');
legend('Périodo','Correlogramme'); xlabel('Frequence (Hz)'); ylabel('Amplitude');
AXIS([min(ff2) max(ff2) min(Sx1) max(Sx1)]);
figure; plot(ff1,Sx1(1:N/2),'b',ff1,Moy_Sx3(1:N/2),'r');
legend('Périodo','Périodogramme moyenné'); xlabel('Freq(Hz)'); ylabel('Amplitude');
figure; plot(ff1,Sx1(1:N/2),'b',ff1,Moy_Sx4(1:N/2),'r');
legend('Périodo','Périodogramme moyenné avec recouv'); xlabel('Freq(Hz)'); ylabel('Amp');
figure; plot(ff1,Moy_Sx3(1:N/2),'b',ff1,Moy_Sx4(1:N/2),'r');
legend('Périodo moyenné','Périodo moyenné avec recouv'); xlabel('Freq (Hz)'); ylabel('Amp');
```

1. Comparer les 4 techniques en faisant varier A1, A2 et A3 et commenter.

2. Rapprocher les fréquences et observer.
3. Commenter les quatre techniques d'estimation de la DSP en faisant varier N.
4. Quelle est l'avantage et l'inconvénient du moyennage?

Exercice 5: L'extraction d'ECG du fœtus se fait à partir de plusieurs électrodes placées en différents endroits du ventre de la mère ; mais les enregistrements obtenus sont des mélanges de l'ECG du fœtus noté (FECG) et celui de la mère noté (MECG) auquel se rajoute le bruit thermique des électrodes et des équipements électroniques d'où l'emploi du filtre de Wiener.

```
loadmecg1.mat; load fecg1.mat; load noise1.mat; fe=256;
bb=0.1*noise1; mm=mecg1; obs=mecg1+fecg1+bb;
figure; subplot(411);plot(mecg1);legend ('ecg mère');
subplot(412);plot(fecg1);legend ('ecg foetus');
subplot(413);plot(noise1);legend ('bruit');
subplot(414);plot(obs);legend ('observation=fecg+mecg+bruit');
figure; subplot(211); plot(abs(fft(mecg1)),'r'); legend ('fft ecg mère');
subplot(212);  plot(abs(fft(fecg1)),'g');  legend ('fft ecg foetus');
% Détermination de l'ECG du foetus avec comme donnée l'observation et l'ECG
de la mère
%===== Détermination des coefficients du filtre
Ncoeff= 25; N=length(obs);
Rxx= xcorr(obs);Rxx=Rxx(N:N+Ncoeff-1);
Rmm= xcorr(mm); Rmm=Rmm(N:N+Ncoeff-1); Rbb= xcorr(bb); Rbb=Rbb(N:N+Ncoeff-1);
C = toeplitz(Rxx); D= Rxx-Rbb-Rmm; b = C\D;
%=====estimation du Signal
fecg1_est=filter(b,1,obs);
%===== Affichages
figure; subplot(311); plot(obs); legend ('observation');grid
subplot(312); plot(fecg1_est);legend ('ecg foetus estimé'); grid
subplot(313); plot(fecg1);legend ('ecg foetus réel'); grid
```

1. Pourquoi a-t-on utilisé l'instruction `D= Rxx-Rbb-Rmm;` ?
2. Quelles lignes du programmes faut-il changer pour retrouver l'ECG de la mère.

TP n° 5 : Notions d'estimation et Filtrage de Wiener (sous Python)

Buts : -Aborder les notions d'estimation ainsi que les propriétés des estimateurs (biais, variance) à travers un exemple

- étudier les estimateurs de la moyenne, de la variance, de la corrélation et de la DSP.
- Application du filtrage de Wiener

Exercice 1: On reprend les 3 estimateurs de la valeur d'une résistance R donnés comme suit :

$$\hat{R}_1 = \frac{\sum_{k=1}^{N} U(k)I(k)}{\sum_{k=1}^{N} I^2(k)} \qquad \hat{R}_2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{U(k)}{I(k)} \qquad \hat{R}_3 = \frac{\sum_{k=1}^{N} U(k)}{\sum_{k=1}^{N} I(k)}$$

Le programme suivant permet de simuler des courants et tensions bruitées et d'étudier les 3 estimateurs.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt;
N=1000;R1=[];R2=[];R3=[];R=1;
for k in range(2,N):
    U=1+0.22*np.random.randn(k);I=1+0.22*np.random.randn(k);
    R1=np.append(R1,sum(U*I)/sum(I**2));
    R2=np.append(R2,sum(U/I)/k);
    R3=np.append(R3,sum(U)/sum(I));
plt.figure(1);
plt.subplot(311); plt.plot(R1); plt.grid(True); plt.title('R1');
plt.subplot(312); plt.plot(R2); plt.grid(True);plt.title('R2');
plt.subplot(313); plt.plot(R3); plt.grid(True);plt.title('R3');

bR1=[];bR2=[];bR3=[];VarR1=[];VarR2=[];VarR3=[];
for k in range(2,len(R1)):
    bR1=np.append(bR1, np.mean(R1[:k])-R);
    bR2=np.append(bR2, np.mean(R2[:k])-R);
    bR3=np.append(bR3, np.mean(R3[:k])-R);
    VarR1=np.append(VarR1, np.var(R1[:k]));
    VarR2=np.append(VarR2, np.var(R2[:k]));
    VarR3=np.append(VarR3, np.var(R3[:k]));
plt.figure(2);
plt.subplot(321); plt.plot(bR1); plt.grid(True); plt.title('Biais R1');
plt.subplot(323); plt.plot(bR2); plt.grid(True);plt.title('Biais R2');
plt.subplot(325); plt.plot(bR3); plt.grid(True);plt.title('Biais R3');
plt.subplot(322); plt.plot(VarR1); plt.grid(True); plt.title('Variance de R1');
plt.subplot(324); plt.plot(VarR2); plt.grid(True);plt.title('Variance de R2');
plt.subplot(326); plt.plot(VarR3); plt.grid(True);plt.title('Variance de R3');
```

1. Expliquer toutes les boucles.
2. Etudier le biais et la variance de chaque estimateur. Conclure.
3. Lesquels sont consistants? Lequel est le plus efficace?
4. Utiliser le programme ci-dessus pour construire les estimateurs de la moyenne et de la variance

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \qquad \hat{\sigma}_1^{\,2} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k - m)^2 \qquad \hat{\sigma}_2^{\,2} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k - \hat{m})^2$$

5. Prendre m=1 et σ^2=2. Etudier le biais, la variance et la consistance de l'estimateur de la moyenne
6. Quelle est la différence entre les deux estimateurs de la variance ?
7. Comparer les 2 estimateurs de la variance sur les 100ères valeurs. Quel est le biais de chacun d'eux ?
8. Que remarque-t-on lorsque N augmente ? Les 3 estimateurs sont-ils efficaces?

Exercice 2 : Les deux estimateurs classiques de la fonction d'autocorrélation sont donnés par :

$$\hat{R}_{kk}(k)=\hat{R}_{kk}(-k)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k}x(n)x(n+k) \qquad et \qquad \hat{R}_{kk}(k)=\hat{R}_{kk}(-k)=\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}x(n)x(n+k)$$

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt;
N=500; f0=0.02; Te=1;
t = np.linspace(0, N-1, N)*Te; s=np.cos(2*np.pi*f0*t)
var=4; bb = (var**0.5)*np.random.randn(N);
Cor_S= np.correlate(s,s,mode='full'); Cor_bb=np.correlate(bb,bb,mode='full');
Cor_S_biase=Cor_S/N; Cor_bb_biase=Cor_bb/N;
A=np.linspace(1,N-1,N-1); B=A[::-1]; A=np.append(A,N);A=np.append(A,B);
Cor_S_non_biase=Cor_S/ A;
Cor_bb_non_biase=Cor_bb/ A;
plt.figure(1);
plt.subplot(221); plt.plot(Cor_S_biase); plt.grid(True); plt.title('Cor du cos Biaisé');
plt.subplot(223); plt.plot(Cor_bb_biase); plt.grid(True);plt.title('Cor du bb Biaisé');
plt.subplot(222); plt.plot(Cor_S_non_biase); plt.grid(True);plt.title('Cor du cos Non Biaisé');
plt.subplot(224); plt.plot(Cor_bb_non_biase); plt.grid(True); plt.title('Cor du bb Non Biaisé');
```

1. Calculer le biais des 2 estimateurs.
2. Des 2 estimations classiques de l'autocorrélation pour le bruit laquelle paraît la plus satisfaisante?
3. Même question pour l'autocorrélation de la sinusoïde
4. Observer la DSP dans chaque et commenter en justifiant les différences (amplitude, lobes secondaires, etc.)

Exercice 3 : Il existe différentes méthodes d'estimation de la densité spectrale de puissance. Les méthodes les plus couramment utilisées sont :

- Périodogramme simple**:** $\hat{S}_{xx}(f)=\frac{1}{N}\left|X_T(f)\right|^2$ Corrélogramme: TF de la corrélation $\hat{S}_{xx}(f)=TF\left[\left\{\hat{R}_{xx}(k)\right\}\right]$
- Périodogramme moyenné **et** Périodogramme moyenné avec recouvrement (overlapping)

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt;
N=1024; fe=N; Te=1/fe; f1=100; f2=150; A1=2; A2=1.2; A3=4;
t = np.linspace(0, N-1, N)*Te;
x = A1*np.cos(2*np.pi*f1*t)+ A2*np.cos(2*np.pi*f2*t)+A3*np.random.randn(N);
"""Périodogramme"""
TFx = np.fft.fft(x);TFx = np.fft.fftshift(TFx);
Sbx1=abs(TFx)**2/N; ff1 = np.linspace(-N/2, N/2-1, N)*fe/N;
"""Corrélogramme"""
Cor_x= np.correlate(x,x,mode='full')/N; N2=len(Cor_x);
Sbx2 = np.fft.fft(Cor_x);Sbx2 = np.fft.fftshift(Sbx2); ff2 = np.linspace(-N2/2, N2/2-1,
N2)*fe/N;
plt.figure(1);
plt.subplot(211); plt.plot(ff1,Sbx1/N); plt.grid(True); plt.title('DSP par TF au carré');
plt.subplot(212); plt.plot(ff2,abs(Sbx2)/N); plt.grid(True);plt.title('DSP par TD de la
corrélation');
"""Périodogramme moyenné: méthode de Welch"""
"""Périodogramme moyenné avec Recouvrement"""
```

1. Comparer les 4 techniques en faisant varier A1, A2 et A3 et commenter.
2. Rapprocher les fréquences et observer.
3. Commenter les quatre techniques d'estimation de la DSP en faisant varier N.
4. Quelle est l'avantage et l'inconvénient du moyennage?

Exercice 4 : L'extraction d'ECG du fœtus se fait à partir de plusieurs électrodes placées en différents endroits du ventre de la mère ; mais les enregistrements obtenus sont des mélanges de l'ECG du fœtus noté (FECG) et celui de la mère noté (MECG) auquel se rajoute le bruit thermique des électrodes et des équipements électroniques d'où l'emploi du filtre de Wiener.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt;
from scipy.io import loadmat;
import scipy.linalg as la; import scipy.signal as sp;
FF = loadmat('mecg1.mat')
mecg1 = [[element for element in upperElement] for upperElement in FF['mecg1']]
mecg1 = np.array(mecg1);N=len(mecg1); mecg1= np.resize(mecg1,new_shape=N)
FF = loadmat('fecg1.mat')
fecg1 = [[element for element in upperElement] for upperElement in FF['fecg1']]
fecg1 = np.array(fecg1);  fecg1= np.resize(fecg1,new_shape=N)
var = 0.01; bb=(var**0.5)*np.random.randn(N); x=fecg1+mecg1+bb;
plt.figure(1);
plt.subplot(411); plt.plot(fecg1); plt.grid(True); plt.title('ecg bébé');
plt.subplot(412); plt.plot(mecg1); plt.grid(True);plt.title('ecg mère');
plt.subplot(413); plt.plot(bb); plt.grid(True);plt.title('Bruit');
plt.subplot(414); plt.plot(x); plt.grid(True); plt.title('Observation');
"""Détermination des coefficients du Filtre de Wiener"""
P=20;
x=x-np.mean(x); mecg1=mecg1-np.mean(mecg1);
Rxx = np.correlate(x,x,mode='full')[len(x)-1:];
Rmecg = np.correlate(mecg1,mecg1,mode='full')[len(x)-1:];
Ryx = Rxx-Rmecg;
C = la.toeplitz(Rxx[0:P]);
B = Ryx[0:P];
b = la.inv(C).dot(B)
"""Filtrage"""
a = np.array([1,0]);
y = sp.lfilter(b,a,x) ;
plt.figure(2);
plt.subplot(311); plt.plot(fecg1); plt.grid(True); plt.title('ecg bébé');
plt.subplot(312); plt.plot(x); plt.grid(True);plt.title('Observation');
plt.subplot(313); plt.plot(y); plt.grid(True);plt.title('ecg bébé estimé');
```

1. Pourquoi a-t-on utilisé l'instruction `Ryx = Rxx-Rmecg;` ?
2. Quelles lignes du programme faut-il changer pour retrouver l'ECG de la mère.

- F. Auger“ Introduction à la théorie du signal et de l’information ” Technip
- G. Blanchet / M. Charbit “ Traitement numérique du signal : simulation sous Matlab ” Hermès
- M. Bouvet “ Traitement des signaux pour les systèmes sonar ”Masson
- J.M. Brossier “ Signal et communication numérique ” Hermès
- M. Charbit “ Eléments de théorie du signal : aspects aléatoires ” Ellipses
- M. Gevers / L. Vandendorpe “ Processus stochastisques : estimation et prédiction ” UCL
- M. Kunt “ Traitement Numérique des Signaux / Atelier de TNS ”Dunod / PPR
- Y. Thomas“ Signaux & systèmes linéaires : cours / exercices ”Masson
- F. Truchetet“ Traitement linéaire du signal numérique ” Hermès