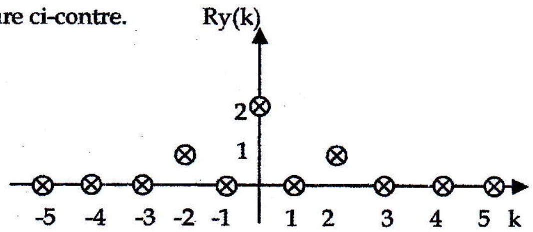
Sig. et Proces. Aléat.: Examen (ST 2017/2018) Nom & Prénom : ....

Exercice 1 4.5

On veut modéliser le signal y(n) dont l'autocorrélation statistique est donnée à la figure ci-contre.



On suppose que l'autocorrélation statistique du signal d'entrée est $4\delta(k)$

1. Déterminer les moments statistiques d'ordre 1 du signal à modéliser.
2. S'agit-il d'un modèle AR ou MA? Justifier
3. Déterminer l'ordre du modèle

On veut déterminer les coefficients du modèle

4. A partir des valeurs de Ry(k), déduire que l'un des coefficients est nul.
5. Sachant que les coefficients restants sont égaux, déterminer les coefficients de ce modèle puis donner l'équation aux différences liant y(n) et x(n)

1°- $R_y(0) = \sigma_y^2 + \mu_y^2 = 2$; $R_y(\infty) = \mu_y^2 = 0$ $\Rightarrow$ $\mu_y = 0$; $\sigma_y^2 = 2$ 1

2°- $R_y(k \geq 3) = 0 \Rightarrow$ MA 0.5

3°- MA d'ordre 3 $\Rightarrow R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{n-k} b_{j+k} b_j$ 0.5

4°- Modèle MA d'ordre 3

$\Rightarrow$ 3 coefficients à déterminer

b_0, b_1, b_2

$$\begin{cases} \sigma^2(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2) = 2 & (1) \\ \sigma^2(b_0 b_1 + b_1 b_2) = 0 & (2) \\ \sigma^2(b_0 b_2) = 1 & (3) \end{cases}$$ 0.5

(2) $\Rightarrow b_1(b_0 + b_2) = 0$

5°- $b_1 = 0$ ou $b_0 + b_2 = 0$ 0.5

or coefficients restants (b_0, b_2) égaux

$\Rightarrow b_1 = 0$ et $b_0 = b_2$

On a $\sigma^2 b_0 b_2 = 4 \cdot b_0^2 = 1$ 1

$\Rightarrow b_0^2 = 1/4 \Rightarrow b_0 = \pm 1/2 = b_2$

$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{2} x(n) + \frac{1}{2} x(n-2)$ 0.5

ou $y(n) = -\frac{1}{2} x(n) - \frac{1}{2} x(n-2)$

- Pour un modèle AR, si k=0, $R_{yy}(0) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$ - Si k≠0, $R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$
- Pour un modèle MA : $R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$

Exercice 2 5.5

Soient (x_1, x_2, ...x_N) des échantillons indépendants correspondant à une population suivant la loi donnée ci-dessous :

$$p_x(x;\theta) = \begin{cases} \frac{3\theta^3}{x^4} & 0 < \theta < x \\ 0 & x < \theta \end{cases}$$

1. Montrer que $\mu_x = \frac{3\theta}{2}$ et que $\sigma_x^2 = \frac{3\theta^2}{4}$

On considère l'estimateur suivant de θ: $\hat{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

2. Montrer que cet estimateur est biaisé
3. Proposer, alors, un estimateur non biaisé de θ et calculer sa variance et en déduire son erreur quadratique moyenne.
4. Etudier la consistance de l'estimateur proposé.

1°- $\mu x = E\{x\} = \int x\, p(x)\, dx$

$= \int_\theta^{+\infty} x \frac{3\theta^3}{x^4} dx$

$= 3\theta^3 \int_\theta^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

$= 3\theta^3 \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_\theta^{+\infty}$

$= 3\theta^3 \left[-0 - \left(-\frac{1}{2\theta^2}\right)\right]$

1.5

$= 3\theta/2$

- $\sigma_x^2 = E\{x^2\} - \mu x^2$

$= \int_\theta^{+\infty} x^2 p(x)\, dx - 9\theta^2/4$

$= 3\theta^3 \int_\theta^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx - 9\theta^2/4$

$= 3\theta^3 \left[-\frac{1}{x}\right]_\theta^{+\infty} - 9\theta^2/4$

$= 3\theta^2 \times \frac{\cancel{4}}{4} - 9\theta^2/4 = \frac{3\theta^2}{4}$

2°- $b_{\hat\theta} = E\{\hat\theta\} - \theta$

$= E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right\} - \theta$

$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\{x_i\} - \theta$ 0.5

$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{3\theta}{2} - \theta = \frac{1}{\cancel{N}} \cdot \cancel{N} \cdot \frac{3\theta}{2} - \theta$

$= 1/2\,\theta \neq 0 \Rightarrow$ biaisé

3°- pour que $b_{\hat\theta'} = 0$ il faut

que $E\{\hat\theta'\} = \theta \Rightarrow \hat\theta' = \frac{2}{3N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

1.0

$\sigma^2_{\hat\theta'} = E\{(\hat\theta' - E\{\theta'\})^2\}$

$= E\left\{\left(\frac{2}{3N}\sum_{i=1}^{N} x_i - E\left\{\frac{2}{3N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right\}\right)^2\right\}$

$= \frac{4}{9N^2} E\left\{\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - E\{x_i\})\right]^2\right\}$

Sachant que les x_i sont indépendants et que $E\{x_i - E\{x_i\}\} = 0$ alors

$\sigma^2_{\hat\theta'} = \frac{4}{9N^2}\sum_{i=1}^{N} E\{\underbrace{(x_i - E\{x_i\})^2}_{\sigma_x^2}\}$

$= \frac{4}{9N^2} \cdot N \cdot \sigma_x^2 = \frac{4}{9N}\sigma_x^2$ 1

$= \frac{\cancel{4}}{9N} \cdot \frac{3\theta^2}{\cancel{4}} = \frac{\theta^2}{3N}$

$eqm_{\hat\theta'} = \underbrace{b_{\theta'}^2}_{0} + \sigma^2_{\hat\theta'} = \frac{\theta^2}{3N}$ 1

4°- $b_{\hat\theta'} = 0 \quad \sigma^2_{\hat\theta'} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ estimateur consistant

0.5

Exercice 3 6.0

Soit le système LIT suivant :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

A] On fournit à ce système en entrée le signal suivant $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ où A est une constante et φ une v.a. uniforme sur [-π,π]

1. Montrer que x(t) est SSL.
2. Calculer sa DSP $S_x(f)$

On suppose que la réponse impulsionnelle est $h(t) = Be^{-t}U(t)$ où B est une constante.

3. Calculer μ_y.
4. Déterminer $S_y(f)$ puis $R_y(\tau)$.
5. En déduire la variance du signal de sortie.

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ $\quad p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$

1° $E\{x(t)\} = E\{A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\}$

$= A\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos(2\pi f_0 t + \varphi) \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\varphi}_{0}$

$= 0$ 0,5

$R_x(t,\tau) = E\{A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) A\cos(2\pi f_0(t-\tau) + \varphi)\}$

$= \frac{A^2}{2} E\{\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\varphi)\}$

$= \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f_0\tau + \frac{A^2}{2}\int \cancel{\cos(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\varphi) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\varphi}_{0}$

$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$ 1

$\begin{cases} \mu_x(t) = cste \\ R_x(t,\tau) = f(\tau) \end{cases} \Rightarrow x(t)$ SSL 0,5

2° $S_x(f) = TF\{R_x(\tau)\}$

$= \frac{A^2}{4}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$ 0,5

3° $h(t) = Be^{-t}U(t)$

$\Rightarrow H(f) = \frac{B}{1 + 2\pi j f}$

$\mu_y = \mu_x \cdot H(0) = 0 \cdot B = 0$ 0,5

4° $S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)$ 0,5

$= \frac{B^2}{1 + 4\pi^2 f^2} \cdot \frac{A^2}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$ 0,5

$= \frac{A^2 B^2}{2(1 + 4\pi^2 f_0^2)}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$ 0,5

$\Rightarrow S_y(f) = \frac{\alpha}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$

~~Sachant~~ que $R_y(\tau) = TF^{-1}\{S_y(f)\}$

alors $R_y(\tau) = \alpha\cos(2\pi f_0 \tau)$

$= \frac{A^2B^2}{1 + 4\pi^2 f_0^2}\cos(2\pi f_0 \tau)$ 1

5° $R_y(0) = \sigma_y^2 + \mu_y^2$

$\Rightarrow \sigma_y^2 = R_y(0) - \cancel{\mu_y^2}_{0} = \frac{A^2B^2}{1 + 4\pi^2 f_0^2}$ 0,5

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \qquad \sin a \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \qquad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$TF\{\delta(t - t_0)\} = e^{-2\pi j f t_0} \qquad TF\left\{A\prod_\theta(t)\right\} = A\theta \,\mathrm{sinc}(f\theta)$

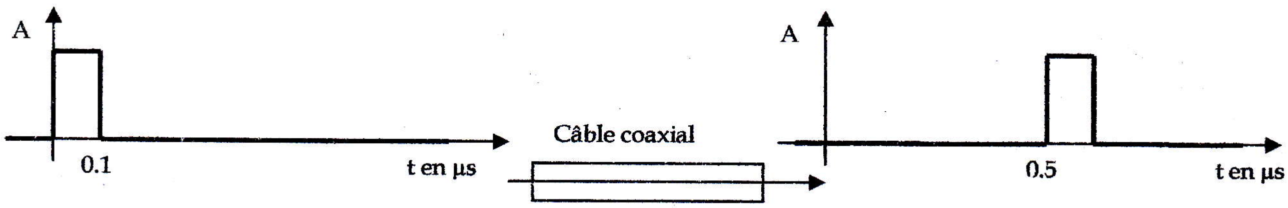
$TF\left\{A\bigwedge_\theta(t)\right\} = A\theta\,\mathrm{sinc}^2(f\theta) \qquad TF\left\{e^{-at}U(t)\right\} = \frac{a}{a + 2\pi j f}$

$TF\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$

Exercice 4

4

On désire déterminer la vitesse de propagation d'une impulsion dans un câble coaxial sans perte. L'intensité est alors une fonction de longueur de câble traversé 'l' et du temps 't'. Les mesures relevées donnent l'évolution de cette intensité pour l=0 correspondant au signal en entrée du câble et pour une longueur l =100m en fonction du temps.

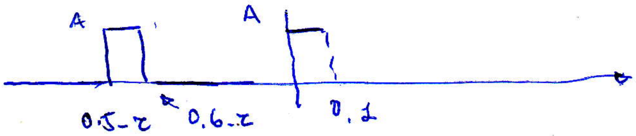


1. A partir de la figure ci-dessus, écrire les 2 signaux sous forme de 2 portes de mêmes amplitude et largeur en déterminant le centre de chacune (décalage).
2. Calculer la fonction de corrélation entre les 2 signaux.
3. Montrer que la détection du maximum de la fonction de corrélation permet de calculer la vitesse de propagation dans le câble. Calculer cette vitesse.
4. Dans le cas où les 2 signaux mesurés sont bruités (rajout d'un bruit supposé blanc), donner l'expression du filtre qu'il faudra leur appliquer pour optimiser le SNR.

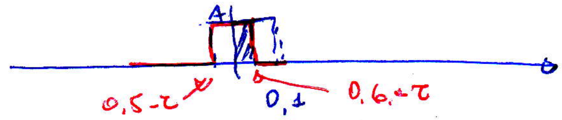
1°- $x(t) = A\,\Pi_{0.1}(t-0.05)$ 0.5

$y(t) = A\,\Pi_{0.1}(t-0.55)$ 0.5

2°- $R_{xy}(\tau) = \int x(t)\,y(t-\tau)\,d\tau$

* 

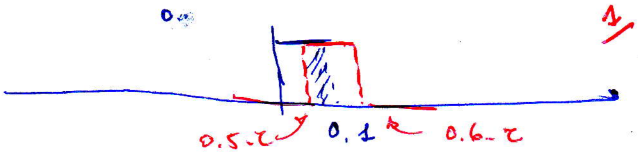
$0.6-\tau<0 \Rightarrow \tau>0.6 \quad R_{xy}(\tau)=0$

* 

$0.6-\tau>0$ et $0.6-\tau<0.1 \Rightarrow 0.5<\tau<0.6$

$R_{xy}(\tau) = A^2\int_0^{0.6-\tau} dt = A^2(0.6-\tau)$

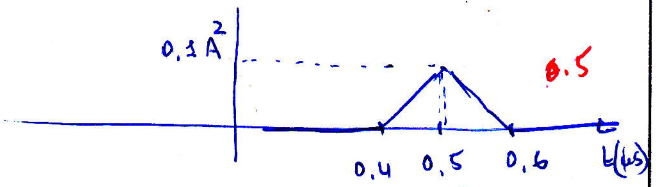
1

* 

$0.5-\tau>0$ et $0.5-\tau<0.1 \Rightarrow 0.4<\tau<0.5$

$R_{xy}(\tau) = A^2\int_{0.5-\tau}^{0.1} dt = A^2(-0.4+\tau)$

* $0.5-\tau>0.1 \Rightarrow \tau<0.4 \quad R_{xy}(\tau)=0$

3°- 

0.5

3°- le maximum est atteint pour $t=0.5$ µs donc sa détection donne le temps

or $v = d'/t = 100\,m / 0.5\cdot10^{-3}$

$= 10^5/0.5 = 2\cdot10^5$ m/s 0.5

4°- Bruit blanc additif ⇒ filtrage adapté ⇒ $h(t) = \frac{k}{\sigma^2}\,x^*(T_0-t)$

$x(t)$ = porte ⇒ $h(t) = \alpha\,\Pi(T_0-t)$

1