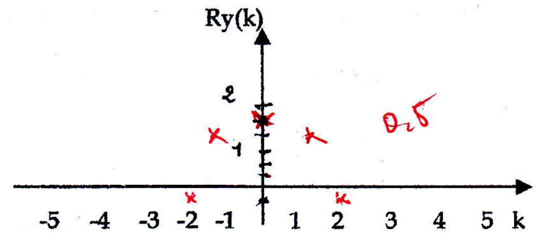
Exercice 1 5

On considère l'équation aux différences suivantes y(n)=x(n)+y(n-1)-0.25 y(n-2)

On suppose que l'autocorrélation statistique du signal d'entrée est 0.25 δ(k)

1. Déterminer les moments statistiques d'ordre 1 du signal d'entrée.
2. S'agit-il d'un modèle AR ou MA? Justifier.
3. Déterminer l'ordre du modèle.
4. Déterminer les valeurs de Ry(k) pour -2≤k≤2 puis tracer la pour ces valeurs.



1° $\sigma_x^2 = 0.2$ $\mu_x = 0$ 1

2° Sortie en fct des sorties précédentes ⇒ AR   1

3° y(n-2) ⇒ d'ordre 2   0.5

4° $$\begin{bmatrix} Ry(0) & Ry(1) & Ry(2) \\ Ry(1) & Ry(0) & Ry(1) \\ Ry(2) & Ry(1) & Ry(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 0.5

$a - b + 0.25c = 0.25$

$b - a + 0.25b = 0$ ⇒ $a = 5/3$, $b = 4/3$, $c = -1/3$

$c - b + 0.25a = 0$

1.5

✓ Pour un modèle AR, si k=0, $R_{yy}(0) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$ - Si k≠0, $R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$

✓ Pour un modèle MA : $R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$

Exercice 2 4.5

Soient $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_N)$ des échantillons indépendants correspondant à une population suivant la loi donnée ci-dessous :

$$p_x(x;\theta) = (1+\theta)x^{\theta} \qquad 0 < x < 1 \qquad et \quad \theta > -1$$

1. Montrer que $\mu_x = \frac{1+\theta}{2+\theta}$
2. calculer σ_x^2 et en déduire que $\theta > -1$
3. Montrer par intégration par partie que $E\{\ln(x)\} = \frac{1}{\theta+1}$

On considère les 2 estimateurs suivants de θ : $\widehat{\theta_1} = \frac{1-\left(\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)}{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)-1}$ et $\widehat{\theta_2} = -1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{N}\ln(x_i)}$

4. Montrer qu'ils sont non biaisés.

1°_ $\mu x = E\{x\} = \int_0^1 (1+\theta)\, x^{\theta+1}\, dx$

$= \frac{\theta+1}{\theta+2}$ 0,5

2: $\sigma_x^2 = \int x^2 p(x)\, dx - \mu x^2$

$= \int_0^1 (1+\theta)\, x^{\theta+2} dx - \left(\frac{\theta+1}{\theta+2}\right)^2$

$= \frac{1+\theta}{\theta+3} - \left(\frac{\theta+1}{\theta+2}\right)^2 = \frac{1+\theta}{(\theta+3)(\theta+2)}$ 1

Sachant que

$\sigma_x^2 > 0 \Rightarrow \theta > -1$ 0.5

3° $E\{Ln(x)\} = \int_0^1 ln(x)\, p(x)\, dx$

$= \int Ln(x)\,(1+\theta)x^{\theta}\, dx$

$= \frac{1}{\theta+1}\left[x^{\theta+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\theta+1}$ 1

4°_ $E\{\hat{\theta}_1\} = E\left\{\frac{1 - \frac{2}{N}\sum xi}{\frac{1}{N}\sum xi - 1}\right\}$

$= \frac{1 - \frac{2}{N}\sum E\{xi\}}{\frac{1}{N}\sum E\{xi\} - 1}$

$= \theta \Rightarrow b_{\hat{\theta}_1} = 0$ 0.75

$E\{\hat{\theta}_2\} = E\left\{-1 + \frac{N}{\sum Ln(xi)}\right\}$

$= -1 + \frac{N}{\sum E\{Ln\, xi\}}$

$= \theta \Rightarrow b_{\hat{\theta}_2} = 0$ 0.75

Exercice 3 6

Soit le système LIT suivant : $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

A] On fournit à ce système en entrée le signal suivant $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) - B\sin(2\pi f_0 t)$ où A et B sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes à moyennes nulles et de variances 1 ; f_0 est une constante

1. Montrer que x(t) est SSL.
2. Calculer sa DSP $S_x(f)$

On fournit à l'entrée de ce système le signal $x'(t)=x(t)+b(t)$ où b(t) est un bruit blanc de variance σ^2 supposé décorréle du signal x(t)

3. x'(t) est-il SSL? Si oui calculer et tracer sa DSP

On suppose que $H(f) = \Pi_{f0}(f)$

4. Déterminer $S_{y'}(f)$ puis $R_{y'}(\tau)$ et en déduire la variance du signal de sortie.

1°) $E\{x(t)\} = \underbrace{E\{A\}}_{0} \cos 2\pi f_0 t + \underbrace{E\{B\}}_{0} \sin 2\pi f_0 t = 0$ 0,5

$R_x(t,\tau) = E\{x(t)\, x^*(t-\tau)\}$

$= E\{A^2\} \cos(2\pi f_0 t) \cos 2\pi f_0(t-\tau) + E\{B^2\} \sin(2\pi f_0 t) \sin 2\pi f_0(t-\tau) + \underbrace{E\{A\}}_{0} E\{B\} \dots$

$= \cos 2\pi f_0 \tau$ 0,5

$\mu_x = 0 = cste$, $R_x(t,\tau) = fct(\tau)$ $\Rightarrow x(t)$ SSL 0,5

2°) $S_x(f) = \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)$ 0,5

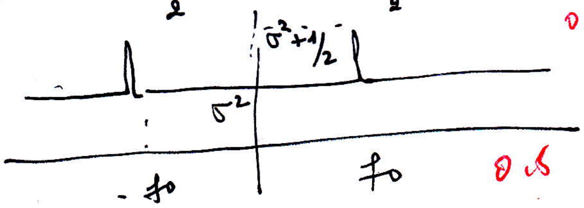
3°) $E\{x'(t)\} = E\{\underbrace{x(t)}_{0}\} + E\{\underbrace{b(t)}_{0\ bb}\} = 0$ 0,5

$R_{x'}(t,\tau) = R_x(\tau) + R_b(\tau) + \underbrace{E\{b\}}_{0} \underbrace{\mu_x}_{0}$

$= \cos(2\pi f_0 \tau) + \sigma^2 \delta(\tau)$ 0,5

$\mu_{x'}(t) = 0$, $R_{x'}(t,\tau) = fct(\tau)$ $\Rightarrow x'(t)$ SSL 0,5

$S_{x'}(f) = \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \sigma^2$ 0,5



0,5

4°) $S'_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$

$= \Pi_{f0}(f) \cdot \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \sigma^2\right]$

$= \sigma^2 \Pi_{f0}(f)$ 0,5

$R'_y(\tau) = TF^{-1} S'_{y}(f)$

$= \sigma^2 f_0 \,\text{sinc}(f_0 t)$ 0,5

$R'_y(0) = \mu_y^2 + \sigma_y^2$

$R_{y'}(\infty) = \mu_y^2 = 0 \Rightarrow \mu_y = 0$

$\Rightarrow \sigma_{y'}^2 = R_{y'}(0) = \sigma^2 f_0$ 0,5

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$TF\{\delta(t-t_0)\} = e^{-2\pi j f t_0}$ $TF\left\{A \Pi_\theta(t)\right\} = A\theta \,\text{sinc}(f\theta)$

$TF\left\{A \Lambda_\theta(t)\right\} = A\theta \,\text{sinc}^2(f\theta)$ $TF\left\{e^{-at}U(t)\right\} = \frac{a}{a + 2\pi j f}$

$TF\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{\dots}$

B] On suppose maintenant que 4,5

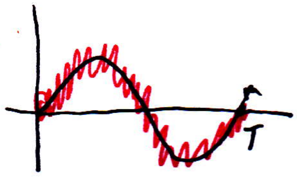
$x(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$ pour $0 \le t \le T$ où A est une constante et $T=1/f_0$

On considère le signal x'(t)=x(t)+b(t) où b(t) est un bruit blanc de variance σ^2 et on veut déterminer le filtre optimal h(t) permettant de filtrer le bruit.

1. S'agit-il d'un filtrage adapté? Justifier.
2. Tracer x'(t).
3. Dans le cas d'un filtrage adapté, déterminer l'expression générale de la réponse impulsionnelle du filtre h(t) (dont l'énergie vaut 1) permettant de maximiser le rapport signal sur bruit.
4. Tracer h(t) causal
5. Tracer le signal en sortie du filtre

1° Filtrage optimal + b blanc ⇒ filtrage adapté 0,5

2°



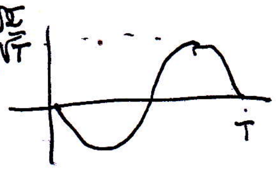
0,5

3° $h(t) = \frac{k}{\sigma^2} x^*(T_0 - t) = \overbrace{\frac{kA}{\sigma^2}}^{k'} \sin 2\pi f_0 (T_0 - t)$

$\int |h(t)|^2 dt = 1 \Rightarrow \int k'^2 \sin^2(2\pi f_0 (T_0 - t)) = 1$

$\Rightarrow \int_{T_0 - T/2}^{T_0 + T/2} \frac{k'^2}{2} dt = 1 \Rightarrow k' = \sqrt{\frac{2}{T}}$ 1

4°



1

5° 1,5