Exercice 1

On dispose d'un enregistrement bruité $x(n)=y(n)+b(n)$ du cours donné par un enseignant dans un amphi. Le bruit $b(n)$ est supposé additif

A] Questions de cours

20

1. On suppose que le bruit est blanc. Peut-on employer un filtre adapté ? (Justifier)
2. Quel filtre peut-on utiliser pour diminuer le bruit ?
3. Pour analyser le signal, on le découpe en tranches de 25ms, pourquoi ?
4. On veut calculer sa DSP, on emploie le périodogramme moyenné, citer un avantage et un inconvénient à cette technique d'estimation.

04,5 pts

1. Non puisque le signal util donc aleatoire donc inconnu $h(t) = \frac{k}{\sigma^2} x^*(T_0 - t)$ signal deterministe

2. Le signal n'est pas stationnaire on le découpe en tranches où il est supposé stationnaire de telle sorte qu'on peut assimiler les ptés temporelles aux ptés statistiques 1

3. Filtre passe-bas 0.5

4. Avantage : 1) Moins de variance 0.5

Inconvenient : 1) Moins bonne résolution frequentielle 0.5

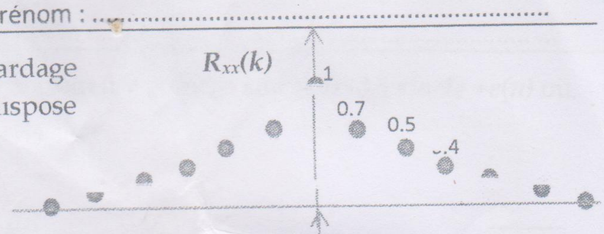
Quelques formules

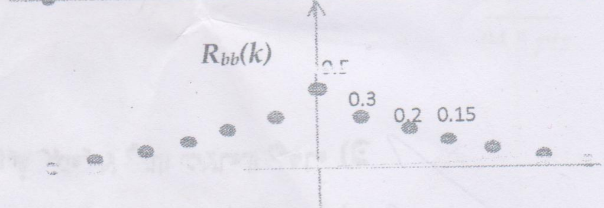
-Si k=0, $R_{yy}(0) = R_{yy}(0) - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(-i) = \sigma^2$ $1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$ $H(f) = k\, X^*(f) e^{-2\pi j f T0} / S(f)$

-Si k≠0, $R_{yy}(k) = 0 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$ $R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k} . b_j$ $SNR(T_0)_{max} = \int \frac{|X(f)|^2}{S(f)} df$

$R_{yx}(j) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i R_{xx}(j-i)$

B] On suppose maintenant que le bruit $b(n)$ provient du bavardage des etudiants et qu'il est decorrele du signal utile $y(n)$. On dispose des corrélations des observations et de celles du bruit.
On veut estimer le signal utile par un filtrage de Wiener





1. Pourquoi utilise-t-on le filtre de Wiener dans ce cas?
2. Donner les équations de Wiener-Hop d'ordre 2
3. Déterminer les paramètres du filtre permettant d'estimer $y(n)$
4. Donner l'équation liant entrée et sortie du filtre.

05 pts

1° Signal utile et bruit (bavardage) sont $\boxed{\text{deux paroles}}$ donc occupent mêmes plages de frequence 0.5

2° $\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{yx}(0) \\ R_{yx}(1) \end{bmatrix}$ 0.5

3° $R_{xx}(k) = E\{x(n)x^*(n-k)\}$

$= E\{(y(n)+b(n))(y(n-k)+b(n-k))\}$

$R_{xx}(k) = R_{yy}(k) + R_{bb}(k) + 2\mu_b\mu_y$ 0.5

D'après les graphes $\begin{cases} R_{yb}(0) = \mu_y\mu_b = 0 \\ R_{bb}(\infty) = \mu_b^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow R_{xx}(k) = R_{yy}(k) + R_{bb}(k)$ 0.5

$R_{yx}(k) = E\{y(n)x^*(n-k)\}$

$= E\{y(n)(y(n-k)+b(n-k))\}$

$= R_{yy}(k) + \cancel{\mu_y\mu_b}_{0}$

$= R_{yy}(k)$ 0.5

$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) - R_{bb}(0) \\ R_{xx}(1) - R_{bb}(1) \end{bmatrix}$ 0.5

$\begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

$b_0 = \dfrac{0.5 \times 1.0 - 0.4 \times 0.7}{1 - 0.49} = 0.43$ 0.5

$b_1 = \dfrac{1 \times 0.4 - 0.7 \times 0.5}{0.51} = 0.09$ 0.5

$\hat{y}(n) = 0.43\,x(n) + 0.09\,x(n-1)$ 0.5

C] A des fins de compression, le signal estimé $\hat{y}(n)=s(n)$ a été modélisé comme suit $s(n)=0.5\,s(n-1)+e(n)$ où $e(n)$ est un bruit blanc de variance 0.25.

04,5 pts

1. Identifier le modèle employé AR ou MA (Justifier)
2. Identifier l'ordre du modèle.
3. Déterminer ~~les moments d'ordre 1~~ moyenne statistique du signal modélisé.
4. Déterminer $R_{ss}(0)$ et $R_{ss}(1)$.
5. Déterminer $R_{ss}(k)$ et tracer la pour 7 valeurs.

1°- Sortie dépend des sorties précédentes ⇒ modèle Récursif (AR) 0.5

2°- $s(n-1) \Rightarrow$ d'ordre 1 0.5

3°- $E\{s(n)\} = 0.5\, E\{s(n-1)\} + \underbrace{E\{e(n)\}}_{0}$

$\Rightarrow \mu_s = E\{s(n)\} = 0$ 0.5

$\cancel{\sigma_s^2 = E\{s(n)^2\} - \mu_s^2}$

$\cancel{= E\{[0.5\,s(n-1)+e(n)][0.5\,s(n-1)+e(n)]\}}$

4° $\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0 \end{bmatrix}$ 0.5

$1\,R_{xx}(0) - 0.5\,R_{xx}(1) = 0.25$

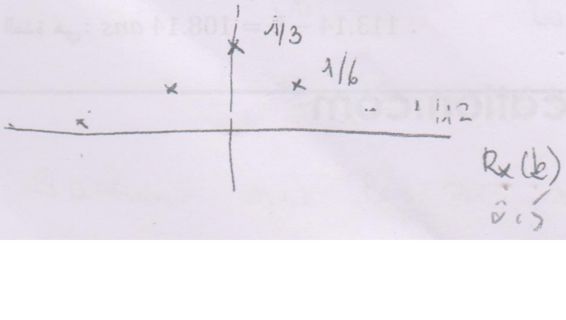
$-0.5\,R_{xx}(0) + 1\,R_{xx}(1) = 0$

$R_{xx}(0) = \dfrac{0.25}{0.75} = 1/3$ 0.5

$R_{xx}(1) = \dfrac{0.25 \times 0.50}{0.75} = \dfrac{1}{3}\,0.50 = \dfrac{1}{6}$

$R_x(2) = 0.5\, R_x(1)$ 0.5

5°- $R_x(k) = (0.5)^k\, 1/3$ 90



Exercice 2

06 pts

A] Montrer, en une ligne, qu'en général $E\left\{\frac{1}{x}\right\} \neq \frac{1}{E\{x\}}$ 1

B] Soient θ_1 et θ_2 deux estimateurs sans biais de θ. Déterminer la relation entre α et β pour que l'estimateur $\widehat{\theta_3} = \alpha\widehat{\theta_1} + \beta\widehat{\theta_2}$ soit sans biais. 1.5

C] Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, N variables aléatoires indépendantes de moyenne m et de variance σ^2

1. On pose $a = \frac{\sum^N}{N}$ déterminer la moyenne et la variance de a. 0.5 1

2. On considère l'estimateur suivant de la variance $\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - a^2$, montrer qu'il est biaisé et en déduire un non biaisé. 1

0.5

A) $E\left\{\frac{1}{x}\right\} = \int \frac{1}{x}\, p(x)\, dx$

$\frac{1}{E\{x\}} = \frac{1}{\int x\, p(x)\, dx} \neq \int \frac{1}{x}\, p(x)\, dx$ 1

B) ~~Soient~~ $b_{\hat\theta_1} = E\{\theta_1\} - \theta = 0$

$b_{\hat\theta_2} = E\{\theta_2\} - \theta = 0$ 0.5

$\Rightarrow E\{\theta_1\} = \theta$ et $E\{\theta_2\} = \theta$

$b_{\hat\theta_3} = E\{\hat\theta_3\} - \theta = 0$

$\Rightarrow E\{\alpha\hat\theta_1 + \beta\hat\theta_2\} - \theta = 0$ 1

$\Rightarrow \alpha\theta + \beta\theta - \theta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 1$

C) $a = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

1°- $\mu_a = E\{a\} = \frac{1}{N}\sum E\{x_i\} = m$ 0.5

$\sigma_a^2 = E\{(a - E\{a\})^2\}$

$= E\left\{\left(\frac{1}{N}\sum x_i - E\left\{\frac{1}{N}\sum x_i\right\}\right)^2\right\}$

$= \frac{1}{N^2} E\left\{\left(\sum (x_i - E\{x_i\})\right)^2\right\}$ 1

$\sigma_a^2 = \frac{1}{N^2} \sum \underbrace{E\{(x_i - m)^2\}}_{\sigma^2}$

$= \sigma^2/N$

2°- $\hat\sigma_1^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - a^2$

$E\{\hat\sigma^2\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - a^2\right\}$

$= \frac{1}{N}\sum E\{x_i^2\} - E\{a^2\}$

$= \frac{1}{N}\sum^{N} (m^2 + \sigma^2) - (\mu_a^2 + \sigma_a^2)$ 0.5 0.5

$= \frac{\sigma^2 (N-1)}{N}$

$b_{\hat\sigma_1} = E\{\hat\sigma_1\} - \sigma^2 = \frac{\sigma^2 (N-1)}{N} - \sigma^2$

$= -\frac{\sigma^2}{N}$ 0.5

$\hat\sigma_2 = \frac{N}{N-1}\left(\frac{\sum x_i^2}{N} - a^2\right)$

$= \frac{1}{N-1}\sum x_i^2 - \frac{N}{N-1} a^2$

1.5

1.0