Sig. & Proces. Aleat. Ratt (ST 2018/2019) Nom&Prénom : ....

Exercice 1

Au moment de l'enregistrement d'un signal audio dans une grande salle, on s'est rendu compte de la présence d'un fort écho tel que *x(n)=y(n)+0.7y(n-2)+b(n)* où $b(n)$ est d'un bruit blanc de variance $\sigma^2 = 0.5$ décorrélé du signal utile *y(n)*.

20

A] Questions de cours

1. Quel est le meilleur filtre à utiliser dans ce cas? (Justifier)
2. Pourquoi le bruit blanc est dit blanc ?
3. Expliquer la notion de filtre formeur et donner, en expliquant, 3 applications dans le domaine audio.
4. On demande à deux étudiants de proposer une technique d'estimation de la DSP, l'un propose d'employer le péridogramme moyenné et l'autre suggère de le faire avec recouvrement. Qui a raison ? et pourquoi ?

04,5 pts

1° Wiener (echo ∈ m̂ plage
fréquences 0.5
0.5

2° Occupe toutes les 0.5
freq comme la lumière 0.5
blanche dans le visible

3° Recherche d'un filtre 0.5
(coef.) dont la DSP donne
la forme globale de la DSP 0.5
du signal aléatoire à
modéliser 0.5 avec pour
entrée un bb

- Compression 0.25
- Identification 0.25
- Reconnaissance vocale 0.25

4° Recouvrement + ~~fr~~ $\overset{+}{\text{moyenne}}$
- variance 0.75

Quelques formules

-Si k=0, $R_{yy}(0) = R_{xx}(0).h(0) - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(-i) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$ $\qquad R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$

-Si k≠0, $R_{yy}(k) = 0 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$ $\qquad R_{yx}(j) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i R_{xx}(j-i)$

$$p_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{(n-x)} \qquad \mu_x = np \quad \sigma_x{}^2 = np(1-p)$$

B] On suppose que $R_{yy}(k) = 0.9^{|k|} + 0.2$, on veut estimer le signal utile par un filtrage de Wiener.

1. Déterminer les statistiques d'ordre 1 du signal utile.
2. Déterminer les coefficients du filtre d'ordre 2.

06 pts

1° $\mu_{xy}^2 = R_{xy}(\infty) = 0.2 \Rightarrow \mu_y = \sqrt{0.2}$ 0.5

$\sigma_y^2 = R_y(0) - \mu_y^2$

$= 1.2 - 0.2 = 1$ 0.5

2° $\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{yx}(0) \\ R_{yx}(1) \end{bmatrix}$

$R_{xx}(k) = E\{x(n)\, x^*(n-k)\}$

$= E\{[y(n)+0.7y(n-2)+b(n)]$

$[y(n-k)+0.7\,y(n-2-k)+b(n-k)]\}$

$= R_{yy}(k) + 0.7\,R_{yy}(k+2) + \cancel{\mu_b}_0\,\mu_y$ 1 (decorr)

$+ 0.7\,R_{yy}(k-2) + 0.49\,R_{yy}(k) + 0.7\cancel{\mu_b}_0\,\mu_y$

$+ \cancel{\mu_b}_0\,\mu_y + 0.7\cancel{\mu_b}_0\,\mu_y + R_b(k)$

$= 1.49\,R_{yy}(k) + 0.7\,R_{yy}(k+2)$ 0.5

$+ 0.7\,R_{yy}(k-2) + R_b(k)$

$R_{xx}(0) = 1.49 \times 1.2 + 1.4 \times 0.93 + 0.5$

$= 3.7$

0.5

$R_{xx}(1) = 1.49 \times 1.1 + 0.7\,(0.93 + 1.1)$

$= 3.06$ 0.5

$R_{yx}(k) = E\{y(n)\, x(n-k)\}$

$= E\{y(n)\,(y(n-k) + 0.7\,y(n-k-2) + b(n-k)\}$

$= R_{yy}(k) + 0.7\,R_{yy}(k+2)$

0.5

$R_{yx}(0) = 1.2 + 0.7 \times 0.98 = 1.9$ 0.5

$R_{yx}(1) = 1.1 + 0.7 \times 0.93 = 1.75$

0.5

$b_0 = \dfrac{1.9 \times 3.7 - 3.06 \times 1.75}{3.7^2 - 3.06^2}$ 0.5 $= 0.39$

$b_1 = \dfrac{3.7 \times 1.75 - 3.06 \times 1.9}{4.34} = 0.15$

0.5

Sig. & Proces. Aleat. Ratt (ST 2018/2019) Nom&Prénom : ……………………………………………………………………………

Exercice 2

On dispose d'un signal *y(n)* dont en sait qu'il s'écrit $y(n) = 0.4\,x(n) - 0.1\,x(n-2) + 0.2\,x(n-3)$ où *x(n)* est un bruit Blanc Gaussien de variance 0.25.

1. Expliquer pourquoi *y(n)* suit une loi Gaussienne.
2. Déterminer les moments statistiques d'ordre 1 du signal *y(n)*.
3. Déterminer la densité de probabilité du signal *y(n)*.
4. Déterminer $R_{yy}(k)$ et tracer la

04 pts

1°- Toute combinaison lineaire de v.a Gaussiennes donne une v.a qui suit une loi Gaussienne 0.5

2°- $\mu y(n) = E\{y(n)\} = 0.5\,\overset{bb}{\cancel{\mu x}}_{0} = 0$ 0.5

$Ryy(k=0) = Ryy(0) = E\{y(n)\,y(n-k)\} = \cancel{\mu y^2}_0 + \sigma y^2$

$\sigma y^2 = E\{(0.4\,x(n) - 0.1\,x(n-2) + 0.2\,x(n-3))$

$(0.4\,x(n) - 0.1\,x(n-2) + 0.2\,x(n-3))\}$

$= 0.16\,Rx_x(0) - 0.04\,\cancel{Rxx(-2)}_0 + 0.08\,\overset{bb}{\cancel{Rx(3)}}_0$

$- 0.04\,\cancel{Rxx(-2)}_0 + 0.01\,Rxx(0) - 0.02\,\cancel{Rxx(-1)}_0$

$+ 0.08\,Rx(3) - 0.02\,\cancel{Rxx(-1)}_0 + 0.04\,Rxx(0)$

$= (0.16 + 0.01 + 0.04)\,\sigma_x^2$

$= 0.21 \times 0.25 = \sigma y^2 = 0.0525$ 1

3°- $p(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma y}\, e^{-\dfrac{y^2}{2\sigma y^2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{y^2}{0.1}}$ 0.5

4°- $Ryy(0) = (b_0^2 + \cancel{b_1^2}^{\,0} + b_2^2 + b_3^2)\,\sigma_x^2$

$= 0.21 \times 0.25 = 0.05$ 0.25

$Ryy(1) = (b_0\cancel{b_1} + \cancel{b_1}b_2 + b_2 b_3)\,\sigma_x^2$

$= -0.02 \times 0.25 = 0.005$ 0.25

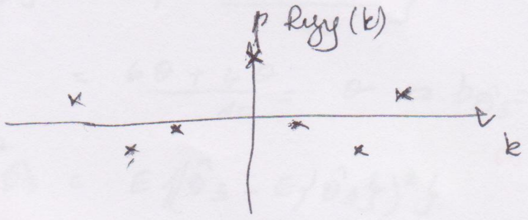
$Ryy(2) = b_0 b_2 + \cancel{b_1}_0 b_3$ 0.25

$= -0.04 \times 0.25$

$= -0.010$

0.75

$Ryy(3) = \sigma_x^2\,(b_0 b_3) = 0.02$



Sig. & Proces. Aleat. Ratt (ST 2018/2019) Nom&Prénom : ....

05,5

Exercice 3

On dispose d'un échantillon $(x_1, x_2, \dots \dots x_N)$ i.i.d suivant la loi $p_X(x) = \frac{2!}{x!(2-x)!}\theta^x(1-\theta)^{(2-x)}$

1. Vérifier que $\mu_x = 2\theta$ et que $\sigma_x^2 = 2\theta(1-\theta)$

On considère les trois estimateurs suivants de θ:

$$\widehat{\theta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{N/2} x_{2i}}{N} \qquad \widehat{\theta_2} = \frac{x_1}{2} \qquad \widehat{\theta_3} = \frac{3x_1+2x_2}{10}$$

2. Etudier le biais et variance des 3 estimateurs.
3. Lequel est préférable ? (Justifier)
4. Proposer en un plus efficace encore.

1° $n = 2 \quad p = \theta$

$\Rightarrow \mu_\theta = np = 2\theta$

$\sigma_\theta^2 = np(1-p) = 2\theta(1-\theta)$ 0.5

2° * $E\{\hat{\theta_1}\} = E\{\sum_{i=1}^{N/2} x_{2i}/N\}$

$= \frac{1}{\cancel{N}} \sum_{i=1}^{N/2} E\{x_{2i}\} = \frac{1}{\cancel{N}} \cdot \frac{\cancel{N}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\theta = \theta$

$b_{\hat{\theta_1}} = 0$ 0.5

$\sigma_{\hat{\theta_1}}^2 = E\{(\frac{\sum_{i=1}^{N/2} x_{2i}}{N} - E\{\sum_{i=1}^{N/2} \frac{x_{2i}}{N}\})^2\}$

$= 1/N^2\, E\{(\sum_{i=1}^{N/2}(x_{2i} - E\{x_{2i}\}))^2\}$ 0.5

Sachant que les x_i sont indép et que $E\{x_i - E\{x_i\}\} = 0$ alors

$\sigma_{\hat{\theta_1}}^2 = \frac{1}{N^2} E\{\sum_{i=1}^{N/2}(x_{2i} - E\{x_{2i}\})^2\}$

$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N/2} E\{\underbrace{(x_{2i} - E\{x_{2i}\})^2}_{\sigma_x^2}\}$ 0.5

$= \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\theta(1-\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{N}$

* $E\{\hat{\theta_2}\} = E\{\frac{x_1}{2}\} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\theta = \theta$

$\Rightarrow b_{\hat{\theta_2}} = 0$ 0.5

$\sigma_1^2 : E\{(x_1 - E\{x_1\})^2\}$

* $E\{\hat{\theta_3}\} = E\{\frac{3x_1 + 2x_2}{10}\}$

$= \frac{6\theta + 4\theta}{10} = \theta \Rightarrow b_{\hat{\theta_3}} =$

0.

$\sigma_{\hat{\theta_3}}^2 = E\{(\hat{\theta}_3 - E\{\hat{\theta}_3\})^2\}$

$= E\{(\frac{3x_1 + 2x_2}{10} - E\{\frac{3x_1}{}$

$= \frac{1}{100} E\{(3x_1 - E\{3x_1\} + E$

$= \frac{1}{100} E\{(3x_1 - \underbrace{E\{3x_1\})^2}_{9\sigma_x^2} + E\{(2x$

$+ 2E\{\underbrace{3x_1 - E\{x_1\}}_{0}\}. E\{$ indép

$= \frac{13}{100}\sigma_x^2 = \frac{13}{100} 2\theta(1-\theta) =$

5.

0.5 Le premier car il est cons

0.

4° $\hat{\theta_4} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{2i}$ 0.5