Exercice 1 / 6

Soient $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_N)$, N variables aléatoires positives indépendantes suivant la loi $p(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad \theta \geq 0$

1. Déterminer les statistiques d'ordre 1 de x
2. Comparer les 3 estimateurs suivants de θ

$$\widehat{\theta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \qquad \widehat{\theta_2} = \frac{x_1 + 2x_N}{3} \qquad \widehat{\theta_3} = \frac{2\sum_{i=1}^{N/2} x_{2i}}{N} - \frac{1}{N^2}$$

1° p(x) Loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta}$ => $\begin{cases} \mu x = \theta \\ \sigma_x^2 = \theta^2 \end{cases}$ 1

2° a/ $\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

$* \; b_{\hat{\theta}_1} = E\{\hat{\theta}_1\} - \theta = E\left\{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}\right\} - \theta$
$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\{x_i\} - \theta = \frac{1}{\cancel{N}} \cdot \cancel{N}\theta - \theta$
$= 0$ 0,5

$* \; \sigma^2_{\hat{\theta}_1} = E\{(\hat{\theta}_1 - E\{\hat{\theta}_1\})^2\}$
$= E\{(\frac{1}{N}\sum x_i - E\{\frac{1}{N}\sum x_i\})^2\}$
$= \frac{1}{N^2} E\{[\sum(x_i - E\{x_i\})]^2\}$

Sachant que les x_i sont indep et que $E\{x_i - E\{x_i\}\} = 0$ alors 0,5

$\sigma^2_{\hat{\theta}_1} = \frac{1}{N^2} E\{\sum(x_i - E\{x_i\})^2\}$
$= \frac{1}{N^2}\sum \underbrace{E\{(x_i - E\{x_i\})^2\}}_{\sigma_x^2}$
$= \theta^2/N$ 0,5

b/ $\hat{\theta}_2 = \frac{x_1 + 2x_N}{3}$

$* \; b_{\hat{\theta}_2} = E\{\frac{x_1 + 2x_N}{3}\} - \theta$
$= \frac{1}{3}[\theta + 2\theta\} - \theta = 0$ 0,5

$* \; \sigma^2_{\hat{\theta}_2} = E\{(\frac{x_1 + 2x_N}{3} - E\{\frac{x_1 + 2x_N}{3}\})^2\}$
$= \frac{1}{9} E\{(x_1 - E\{x_1\} + E\{2x_N - E\{2x_N\})^2\}$
$= \frac{1}{9} E\{(x_1 - E\{x_1\})^2 + 4E\{(x_N - E\{x_N\})^2\}$
$- 4E\{\underbrace{x_1 - E\{x_1\}\}.\{x_N - E\{x_N\}}_{indep}\} = 0$
$= \frac{1}{9}(\theta^2 + 4\theta^2\} = \frac{5\theta^2}{9}$ 1

c/ $\theta_3 = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N/2} x_{2i} - \frac{1}{N^2}$

$* \; b_{\hat{\theta}_3} = E\{\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N/2} x_{2i} - \frac{1}{N^2}\} - \theta$
$= \frac{2}{\cancel{N}} \cdot \frac{\cancel{N}}{\cancel{2}}\theta - \frac{1}{N^2} - \theta = -\frac{1}{N^2}$ 0,5

$* \; \sigma^2_{\hat{\theta}_3} = E\{(\frac{2}{N}\sum_1^{N/2} x_{2i} - \frac{1}{N^2} - E\{\frac{2}{N}\sum_1^{N/2} x_{2i} - \frac{1}{N^2}\})^2\}$
$= \frac{4}{N^2} E\{(\sum_1^{N/2} x_{2i} - \cancel{\frac{1}{N^2}} - E\{\sum_1 x_{2i}\} + \cancel{\frac{1}{N^2}})^2\}$
$= \frac{4}{N^2} E\{[\sum_1^{N/2}(x_{2i} - E\{x_{2i}\})]^2\}$

Sachant que .... alors

$\sigma_{\hat{\theta}_3} = \frac{4}{N^2} E\{\sum_1^{N/2}(x_{2i} - E\{x_{2i}\})^2\}$
$= \frac{4}{N^2}\sum_1^{N/2} \underbrace{E\{(x_{2i} - 2E\{x_{2i}\})^2}_{\sigma_x^2}$
$= \frac{4}{N^2} \cdot N/2 \cdot \sigma_x^2 = 2\theta^2/N$ 1

Le premier a un biais nul et la plus petite variance 0.5

Exercice 2 /6

On modélise un signal y(n) comme suit $y(n) = \alpha\, y(n-1) + \alpha\, y(n-2) + x(n)$ où $x(n)$ est un bruit blanc de variance σ_b^2. On suppose que $R_{yy}(2) = R_{yy}(1) = -\frac{1}{3}R_{yy}(0)$

1. Identifier le modèle employé AR ou MA (Justifier)
2. Identifier l'ordre du modèle.
3. Déterminer α et σ_b^2.
4. Calculer alors $R_{yy}(3) et R_{yy}(4)$

1° y(n) depend des sorties precedentes uniquement ⇒ AR

0.5

2° y(n-2) ⇒ modele d'ordre 2

0.5

3°
$$(2)\begin{bmatrix} Ryy(0) & -\frac{1}{3}Ryy(0) & -\frac{1}{3}Ryy(0) \\ -\frac{1}{3}Ryy(0) & Ryy(0) & -\frac{1}{3}Ryy(0) \\ -\frac{1}{3}Ryy(0) & -\frac{1}{3}Ryy(0) & Ryy(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.0

$(2) \Rightarrow -\frac{1}{3}\cancel{Ryy(0)} - \alpha \cancel{Ryy(0)} + \frac{1}{3}\alpha \cancel{Ryy(0)} = 0$

$\Rightarrow -2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -0.5$ 1

$\sigma_x^2 = Ryy(0)(1 - \frac{1}{3}\cdot 0.5 - \frac{1}{3}\, 0.5) = \frac{2}{3}\, Ryy(0)$

1.0

4° $\begin{bmatrix} Ryy(3), & Ryy(2), & Ryy(1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0$

$Ryy(3) = -0.5\, Ryy(2) - 0.5\, Ryy(1)$

$= +\frac{1}{3}\, Ryy(0)$ 1

$Ryy(4) = -0.5\, Ryy(3) - 0.5\, Ryy(2)$

$= -\frac{1}{3}Ryy(0) + \frac{1}{3}\, Ryy(0)$ 1

$= 0$

- ✓ Pour un modèle AR, si k=0, $R_{yy}(0) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$ | Si k≠0, $R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$
- ✓ Pour un modèle MA : $R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$

Exercice 3 /8

On considère le problème de détection à distance d'une perturbation dans l'océan (séisme, tempête, etc.) en utilisant plusieurs stations d'enregistrement.

A] En employant 2 stations, on récolte les 2 signaux suivants :

$Y_1(t) = A_1\, X(t - T_1) + B_1(t)$ et $Y_2(t) = A_2\, X(t - T_2) + B_2(t)$ où A_1 et A_2 sont des atténuations

On suppose que $X(t)$ l'onde émise est SSL et décorrélée du bruit $B_i(t)$ de haute fréquence dû aux vagues ($B_1(t)$ *et* $B_2(t)$ sont supposées SSL et décorrélées entre eux).

1. Etudier la SSL au sens large de $Y_1(t)$, en déduire celle de $Y_2(t)$
2. Calculer l'inter-corrélation entre $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$
3. Calculer $S_{Y1Y2}(f)$

On décide de filtrer le bruit, en employant un filtre moyenneur h(t).

4. Pourquoi a-t-on employé un filtre moyenneur dans ce cas ?
5. Exprimer la densité spectrale du signal à la sortie du filtre pour chacun des 2 signaux.

B] On considère le problème d'estimation de la localisation de la perturbation en utilisant un troisième centre d'enregistrement tel que :

$Y_3(t) = A_3\, X(t - T_3) + B_3(t)$ où $B_3(t)$ est SSL décorréle de $X(t)$, $B_1(t)$ et $B_2(t)$

6. Exprimer l'inter-corrélation entre $Y_1(t)$ et $Y_3(t)$ et celle entre l'inter-corrélation entre $Y_2(t)$ et $Y_3(t)$.
7. Expliquer alors comment on peut déterminer T_1, T_2, T_3 et ainsi localiser l'origine de $X(t)$.

1°_ $E\{y_1(t)\} = E\{A_1 X(t-T_1)\} + E\{B_1(t)\}$

$\mu_{y_1}(t) = A_1\, \mu_x + \mu_{B_1} = cste$

$= \mu_{y_1} = A_1 \mu_x + \mu_{B_1}$ 0.5

$R_{y_1}(t,\tau) = E\{y_1(t)\, y_1^*(t-\tau)\}$

$= E\{A_1 x(t-T_1) + B_1(t) \cdot A_1 x^*(t-T_1-\tau) + B_1^*(t-\tau)\}$

$= A_1^2 R_x(\tau) + R_{B_1}(\tau) + 2\mu_x \mu_{B_1}$ 1

$\mu_{y_1} = cste$

$R_{y_1}(t,\tau) = fct(\tau) \Rightarrow y_1(t)$ SSL 0.5

$A_2 = A_1$ et $B_2 = B_1 \Rightarrow y_2(t)$ SSL 0.5

2°_ $R_{y_1y_2}(t,\tau) = E\{y_1(t)\, y_2^*(t-\tau)\}$

$= E\{(A_1 x(t-T_1) + B_1(t)) \times (A_2 x(t-\tau-T_2) + B_2(t-\tau))\}$

$= A_1 A_2 R_x(\tau - T_1 + T_2) + \mu_x (A_1 \mu_{B_2} + A_2 \mu_{B_1}) + \mu_{B_1}\mu_{B_2}$ 0.5 0.5

3°_ $S_{y_1y_2}(f) = TF\{R_{y_1y_2}(\tau)\}$

$= A_1 A_2\, S_x(f)\, e^{-2\pi j f (T_1 - T_2)} + [\mu_x(A_1\mu_{B_2} + A_2\mu_{B_1}) + \mu_{B_1}\mu_{B_2}]\, \delta(f)$ 0.5 0.5

4°_ le Bruit des vagues est supposé être des hautes fréquences et le filtre moyenneur est un filtre passe-bas 0.5

5°_ $S_{z_1}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_{y_1}(f)$

$= sinc^2(fT) \cdot [A_1^2 S_x(f) + S_{B_1}(f) + 2\mu_x \mu_{B_1} \delta(f)]$

$S_{z_2}(f) = |H(f)|^2 \cdot S_{y_2}(f)$

$= sinc^2(fT) \cdot [A_2^2 S_x(f) + S_{B_2}(f) + 2\mu_x \mu_{B_2} \delta(f)]$

~~0.5~~ 0.5

6°_ $R_{y_1y_3}(t,\tau) = A_1 A_3 R_x(\tau - T_1 + T_3) + \mu_x(A_1\mu_{B_3} + A_3\mu_{B_1}) + \mu_{B_1}\mu_{B_3}$

$R_{y_2y_3}(t,\tau) = A_2 A_3 R_x(\tau - T_2 + T_3) + \mu_x(A_2\mu_{B_3} + A_3\mu_{B_2}) + \mu_{B_2}\mu_{B_3}$

~~0.5~~

7°_ A partir des maximaux de $R_{y_1y_2}$, $R_{y_2y_3}$ et $R_{y_1y_3}$ on peut determiner

$T_1 - T_2$

$T_1 - T_3$ et ainsi T_1, T_2, T_3

$T_2 - T_3$ 1.5

$T_1 \Rightarrow D_1$

$T_2 \Rightarrow D_2$ localisation

$T_3 \Rightarrow D_3$