Exercice 1 / 8

On considère un problème d'estimation d'un signal z bruité. Le signal observé est $x(n) = z + b(n)$. On suppose que z suit une loi de densité telle que $p(z) = 3e^{-3z}$ et que z est décorrélée du bruit $b(n)$ qui possède une DSP qui vaut 4.

1 1. Rappeler les conditions d'utilisation du filtrage de Wiener
1 2. Que signifie que z et b(n) sont décorrélés ? sont-ils indépendants?
2 3. Calculer les moments d'ordre 1 de de $b(n)$. Est-il SSL?
3.5 4. Déterminer le filtre de Wiener d'ordre N permettant de retrouver le signal utile z.
0.5 5. Exprimer $\hat{z}$.

1- signal utile SSL bruit SSL

2- pas de dépendance linéaire. on ne peut savoir

3- $R_b(k) = 4\,\delta(k)$ $\mu_b = 0$ $\sigma_b^2 = 4$ SSL

4-

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & \cdots & R_{xx}(N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xx}(N-1) & \cdots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{zx}(0) \\ R_{zx}(1) \\ \vdots \\ R_{zx}(N-1) \end{bmatrix}$$

$R_{xx}(k) = E\{z^2\} + 0 + 0 + 4\,\delta(k) = 2/9 + 4\,\delta(k)$ 1.5

$R_{zx}(k) = E\{z^2\} = 2/9$ 1

$$\begin{bmatrix} 2/9+4 & 2/9 & \cdots & 2/9 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & 2/9+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/9 \\ \vdots \\ 2/9 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow b_0 = b_1 = \dots = b_{N-1} = \dfrac{2/9}{2N/9 + 4}$ 1

5- $\hat{z} = \dfrac{2/9}{2N/9+4} \displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} x(n-i)$ 0.5

Exercice 2 /5

Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est $y(n)= 0.5\, y(n-1) + x(n)$

1 1. Quelle est et l'entrée d' filtre formeur (pourquoi l'appelle-t-on filtre formeur?)
1 2. Identifier le modèle et l'ordre.
1.5 3. Déterminer la moyenne de y(n) et montrer que $R_{yy}(k)=0.5^k R_{yy}(0)$,
1 4. Montrer que $R_{yy}(0)=4 R_{xx}(0)/5$
5. Tracer $R_{yy}(k)$ (Prendre $R_{xx}(0)=0.25$).

1° bb + forme le signal de sortie

2° AR 1

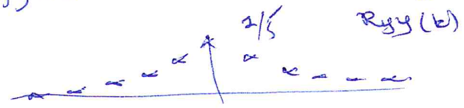
3° $\mu_y = 0.5\,\mu_y + \cancel{x(n)}$ ← bb $\Rightarrow \mu_y = 0$ 0.5

$R_{yy}(k) = -(-0.5)\, R_{yy}(k-1)$ $\Rightarrow R_{yy}(k) = (0.5)^k R_{yy}(0)$ 0.5

$$\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx} \\ 0 \end{bmatrix}$$

4° $R_{yy}(0) - 0.5\, R_{yy}(1) = R_{xx}(0) \Rightarrow R_{yy}(0)\,[1 + 0.25] = R_{xx}(0) \Rightarrow R_{yy}(0) = \frac{R_{xx}(0)}{1.25}$ 0.5

5°



1

Exercice 3 /7

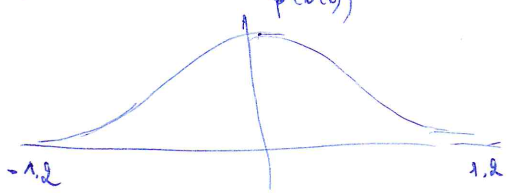
On considère le signal suivant : $s(t) = \begin{cases} 2\sin(2\pi f_0 t) & 0 \leq t \leq T = 1/f_0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

Lors d'une transmission, ce signal est affecté d'un bruit additif Gaussien b(t) dont la densité spectrale de puissance est: $S_{bb}(f) = 0.16$ ⇒ $R_{bb}(\tau) = 0{,}16\,\delta(\tau)$

Nous allons appliquer un filtrage adapté.

1 1. Donner le tracé de la densité de probabilité de b(t).
1 2. Donner l'expression du signal $x(t)$ transmis et tracer le.
2 3. Expliquer pourquoi sans faire de calcul, on peut déterminer la loi de probabilité de x(t). Est-il stationnaire d'ordre 1 ?
1 4. Donner l'expression et le tracé du filtre adapté h(t) causal.
0.5 5. Superposer le tracé de $y(t)$ au tracé de $x(t)$.
1 6. Exprimer la DSP du signal y(t) en fonction de celle de x(t).

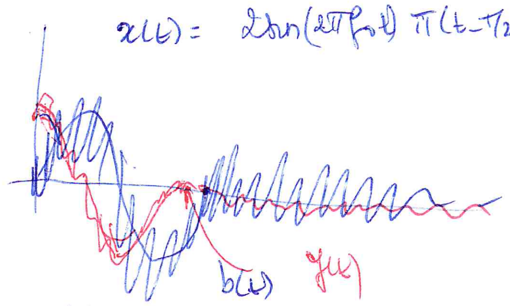
1°



1

6° $S_y(f) = |H(f)|^2 . S_x(f)$
$= \delta(f-f_0) + \delta(f+f_0) . S_x(f)$
$= S_x(f-f_0) + S_x(f+f_0)$

2° $x(t) = 2\sin(2\pi f_0 t)\,\Pi(t - T/2)$ 0,5



0,5

3° s(t) : Gaussienne + s(t)

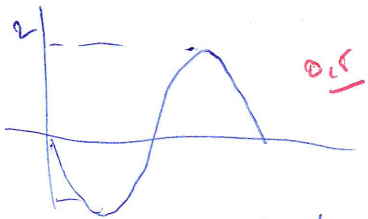
⇒ x(t) Gaussienne même variance 0,5

et la moyenne s(t) 0,5

$p(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,0{,}4} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x(t)-s(t))^2}{2\times 0.16}}$ 0,5

non s(t) = f(t) ⇒ pas stationnaire d'ordre 1 0,5

4°



0,5

$h(t) = 2\sin(2\pi f_0(t + T/2))\;\Pi(t - T/2)$

0,5

✓ Si k=0, $R_{yy}(0) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$ - Si k≠0, $R_{yy}(k) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$

✓ $R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$ $H(f)_{optimal} = k.X^*(f)e^{-2\pi jfT0} / S_b(f)$ $SNR(T_0)_{\max} = \int \frac{|X(f)|^2}{S_b(f)} df$