Exercice 1 3.5

Soit le signal x(n)=e^{-an} U(n) transmis à travers le système h(n) dont la réponse impulsionnelle ~~est~~ h(n) est donnée par h(0)=h(1)=h(2)=1/3. où $a > 0$

1. Calculer l'énergie et la puissance du signal d'entrée
2. Calculer et tracer l'autocorrélation de h(n)
3. Déterminer le signal y(n) résultant de la convolution numérique x(n)*h(n).

1°. x(n) Signal à énergie finie

$\Rightarrow P = 0$ 0.5

$E = \sum |x(n)|^2 = \sum_{0}^{+\infty} e^{-2an}$

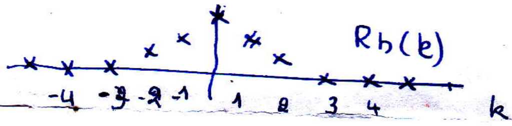
$= \frac{1}{1-e^{-2a}}$ 0.5

2°. $R_h(k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(n)\, h^*(n-k)$

$R_h(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$

$R_h(1) = R_h(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$

$R_h(2) = R_h(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ 1



0.5

3°. $y(n) = x(n) * h(n)$

$= \sum_k x(n-k)\, h(k)$

$= \sum_{k=0}^{2} x(n-k)\, \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}\left[x(n) + x(n-1) + x(n-2)\right]$

$= \frac{1}{3}\left[e^{-an}U(n) + e^{-a(n-1)}U(n-1) + e^{-a(n-2)}U(n-2)\right]$

1

Exercice 2 3

Soit Z=2X-3Y où X et Y sont deux v.a. telles $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $p(y)=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{8}}$ x et y décorelées

1. Calculer la moyenne, la variance et la puissance de Z
2. Déterminer p(z) la densité de probabilité de Z.

1°. $\mu_Z = E\{Z\} = E\{2X - 3Y\}$

$= 2\mu_x - 3\mu_y = 2\times 0 - 3\times 1$

$= -3$ 0.5

- $\sigma_Z^2 = E\{Z^2\} - \mu_Z^2$

$= E\{Z^2\} - 9 = E\{(2X - 3Y)^2\} - 9$

$= 4E\{X^2\} + 9E\{Y^2\} - 12E\{XY\} - 9$

$= 4(\mu_x^2 + \sigma_x^2) + 9\{\mu_y^2 + \sigma_y^2\} - 12\mu_x\mu_y - 9$ 0.5

$= 4\times 1 + 9\{1 + 4\} - 9$

$= 40$ 0.5

- $P = E\{Z^2\} = 49$ 0.5

2°. Z combinaison linéaire de Gaussiennes, sa loi est donc Gaussienne. 0.5

$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} e^{-\frac{(z-\mu_z)^2}{2\sigma_z^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{80\pi}} e^{-\frac{(z+3)^2}{80}}$

0.5

Exercice 3 3.5

Soient X et Y 2 v.a. Gaussiennes centrées de variance unité et soient 2 autres variables aléatoire R et θ tels que X=Rcosθ et Y= Rsinθ. x et y sont supposées indépendantes

1. Déterminer p(R,θ) puis p(θ) et p(R)
2. Les 2 v.a. R et θ sont-elles indépendante ? décorrélées? (Justifier)

1° $p(R,\theta) = |J|\ p(x,y) \Big|_{\substack{x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta}}$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dR} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dR} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -R\sin\theta \\ \sin\theta & R\cos\theta \end{vmatrix}$$

$= R\cos^2\theta + R\sin^2\theta = R$ 1

x et y indépendantes

$\Rightarrow p(R,\theta) = |J|\ p(x)\cdot p(y) \Big|_{\substack{R = \cos\theta \\ R = \sin\theta}}$

$= \frac{R}{2\pi} e^{-\frac{R^2}{2}}$

R : Rayon $\in [0, +\infty[$

θ : phase $\in [-\pi, \pi]$

- $p(R) = \int_{-\pi}^{\pi} p(R,\theta)\, d\theta = \frac{R}{2\pi} e^{-R^2} [\theta]_{-\pi}^{\pi}$

$= R e^{-R^2}$ 0.5

- $p(\theta) = \int_0^{+\infty} p(R,\theta)\, dR = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} R e^{-\frac{R^2}{2}} dR$

$= \frac{1}{2\pi} \left[e^{-\frac{R^2}{2}} \right]_0^{+\infty}$ 0.5

$= \frac{1}{2\pi}$

0.5

θ et R indep $\Rightarrow$ décorrelées 0.5 $p(\theta)\cdot p(R) = \frac{1}{2\pi}\cdot R e^{-R^2} = p(\theta, R)$ 0.5 Indep

Exercice 4 5

Soient X(t) et Y(t) deux signaux aléatoires indépendants et stationnaires au sens large (SSL) tels que $R_X(\tau) = 9e^{-a|\tau|}$ et $R_Y(\tau) = b\,\delta(\tau) + c$. On considère Z(t) = X(t) + Y(t),

1. Quelle condition doit-on imposer sur les constantes a, b et sur c (Justifier)
2. Calculer les statistiques de premier ordre de Z(t)
3. Calculer Rz(t,τ). Z(t) est-il SSL?
4. Peut-on calculer sa DSP $S_z(f)$? si oui calculer la.

1°- $R_x(0) > R_x(\tau) \Rightarrow a > 0$ 1.5

$R_y(0) = \sigma_y^2 + \mu_y^2 \Rightarrow b > 0$ et $c > 0$

2°- $\mu_z(t) = E\{z(t)\} = \mu_x + \mu_y = 0 + \sqrt{c} = \sqrt{c}$

- $\sigma_z^2(t) = E\{z^2(t)\} - \mu_z^2(t)$ 0.5

$= E\{(x(t) + y(t))^2\} - c$

$= \underbrace{\sigma_x^2 + \cancel{\mu_x^2}}_{} + \sigma_y^2 + \mu_y^2 + \cancel{2\mu_x}\mu_c - c$

$= 9 + b + \cancel{c} - \cancel{c}$

$= 9 + b$ 1

3° $R_z(t,\tau) = E\{z(t)\, z^*(t-\tau)\}$

$= E\{[x(t) + y(t)]\, [x(t-\tau)^* + y(t-\tau)^*]\}$

$R_z(t,\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + \cancel{2\mu_x}\cdot\mu_y$

$= 9e^{-a|\tau|} + b\,\delta(\tau) + c = \text{fct}(\tau)$ 0.5

$\left.\begin{array}{l}\mu_z(t) = \sqrt{c} = \text{cste} \\ R_z(t,\tau) = \text{fct}(\tau)\end{array}\right\}$ z(t) SSL 0.5

4°- Oui car z(t) SSL 0.5

$S_z(f) = TF\{R_z(\tau)\}$

$= \frac{18}{a^2 + 4\pi f^2} + b + c\,\delta(f)$ 0.5

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \qquad \sin a \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \qquad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$TF\{\delta(t - t_0)\} = e^{-2\pi j f t_0} \qquad TF\left\{A \prod_\theta (t)\right\} = A\,\theta\, \sin c(f\theta)$

$TF\left\{A \bigwedge_\theta (t)\right\} = A\,\theta\, \sin c^2(f\theta) \qquad TF\left\{e^{-at} U(t)\right\} = \frac{a}{a + 2\pi j f}$

$TF\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$