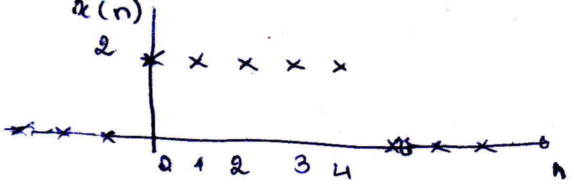
Exercice 1 4.78

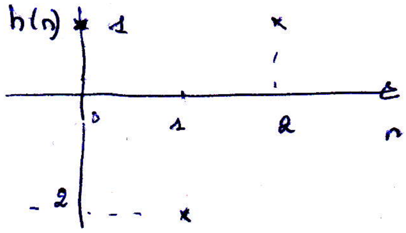
On transmet le signal x(n)=2 $Rect_5(n)$ à travers le système h(n)=δ(n)-2δ(n-1)+δ(n-2) .

1. Tracer les 2 signaux
2. Calculer l'énergie et la puissance du signal d'entrée.
3. Déterminer et tracer son autocorrélation
4. Etudier la stabilité et la causalité du système
5. Déterminer et tracer la sortie y(n) du système

1°/



0.25



0.25

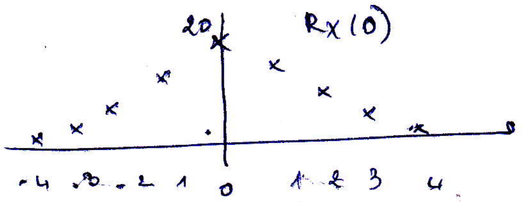
2°/ $E_x = \sum |x(n)|^2 = \sum_0^4 (2)^2 = 20$ 0.5

$\Rightarrow P = 0$ 0.5

3°/

	2	2	2	2	2
×	2	2	2	2	2
	20	16	12	8	4
	Rx(0)	Rx(±1)	Rx(±2)	Rx(±3)	Rx(±4)

1



0.5

4°/ $\sum |h(n)| = 1 + 2 + 1 = 4 < \infty$

$\Rightarrow$ stable 0.5

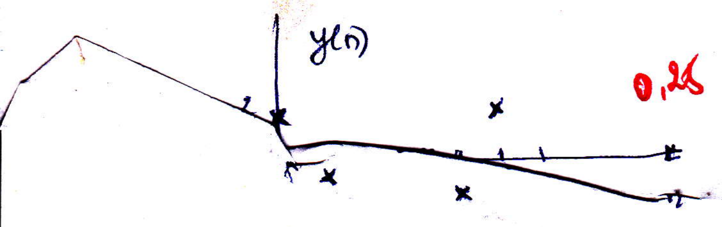
$h(n) = 0$ pour $n < 0 \Rightarrow$ causal

0.5

5°. $y(n) = x(n) * h(n)$

$= x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)$ 0.5

$= 2Rect_5(n) - 4Rect_5(n-1) + 2Rect_5(n-2)$



0,25

Exercice 2 10

Soit x(t)=$A\sin(2\pi f_0 t+\varphi)$ où φ est une variable uniforme sur [-π, π]

1. Déterminer la densité de probabilité et la fonction de répartition de x(t) et tracer cette dernière
2. Etudier la stationnarité au sens large de x(t)

Ce signal est affecté lors de la transmission d'un bruit blanc b(t) Gaussien de variance σ_b^2 décorrélé du signal x(t) tel que z(t)=x(t)+b(t)

3. Le signal obtenu z(t) est-il SSL ? si oui calculer sa DSP

On veut filtrer le bruit en employant un filtre passe-bas tel que h(t)=e^{-at}U(t)

4. Exprimer la DSP du signal filtre y(t)=z(t)*h(t), en déduire son autocorrélation statistique
5. Déterminer la moyenne et la puissance statistique du signal y(t)
6. Tracer z(t) et y(t) en considérant A=2 et $\sigma_b^2=0.25$

1° $p(x;t)=2.\left|\frac{d\varphi}{dx(t)}\right| p(\varphi)\Big|_{\varphi=\mathrm{Arsin}\frac{x(t)}{A}-2\pi f_0 t}$

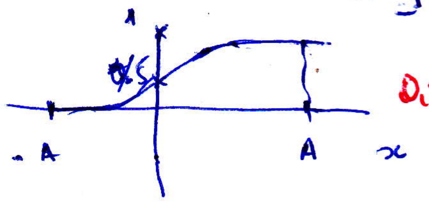
$\Rightarrow p(x;t)=\frac{\cancel{2}/A}{\sqrt{1-\frac{x(t)^2}{A^2}}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\pi}=\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x(t)^2}}$ 0.5

$F(x;t)=\int_{-\infty}^{x}p(v;t)=\int_{-A}^{x}\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-v(t)^2}}dv$ 0.5

$=\int_{-A}^{x}\frac{1/A}{\pi\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{A^2}}}dv$

$=\frac{1}{\pi}\left[\mathrm{Arc\,sin}\frac{v(t)}{A}\right]_{-A}^{x}$ 0.5

$=\frac{1}{\pi}\left[\mathrm{Arsin}\frac{x(t)}{A}+\frac{\pi}{2}\right]$



0.5

2° $\mu x(t)=E\{x(t)\}=E\{A\sin(2\pi f_0 t+\varphi)\}$

$=\int_{-\pi}^{\pi}A\sin(2\pi f_0 t+\varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}d\varphi$ = 0 0.5

$Rx(t,\tau)=E\{x(t)x^*(t-\tau)\}$

$=E\{A\sin(2\pi f_0 t+\varphi).A\sin(2\pi f_0(t-\tau)+\varphi)\}$

$=A^2E\{-\frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t+2\varphi-2\pi f_0\tau)\}+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$ 1.0

$Rx(t,\tau)=\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)=fct(\tau)$

$\mu x=0$ $\Rightarrow$ SSL 0.5

3° $z(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\varphi)+b(t)$

x(t) decorrelé de b(t) $\Rightarrow$ 0.5

$Rz(t,\tau)=Rx(\tau)+Rb(\tau)+2\mu b\,\mu x$

$=\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)+\sigma b^2\delta(\tau)$ 0.5

$\mu z=\mu b+\mu x=0$, $Rz(t,\tau)=fct(\tau)$ $\Rightarrow$ z(t) SSL 0.5

$\Rightarrow Sz(f)=TF\{Rx(\tau)\}$

$=\sigma b^2+\frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$ 0.5

4° $h(t)=e^{-at}U(t)$

$\Rightarrow H(f)=\frac{a}{a+2\pi jf}$ 0.5

$Sy(f)=|H(f)|^2.Sz(f)$ 1

$=\frac{a^2}{a^2+4\pi^2f^2}\left[\sigma b^2+\frac{A^2}{4}\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$

$=\frac{\sigma b^2.a^2}{a^2+4\pi^2f^2}+\underbrace{\frac{A^2a^2}{4(a^2+4\pi^2f_0^2)}}_{\beta}(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))$

$Ry(\tau)=\frac{\sigma b^2a}{2}e^{-a|\tau|}+\frac{\beta}{2}\cos 2\pi f_0\tau$ 1

5° $\mu y=\mu z.H(0)=0$ 0.5

$P=Ry(0)=\sigma b^2a/2+\beta/2$ 0.5

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

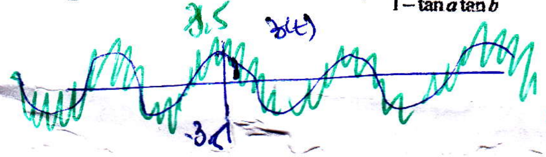
$\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$ $\sin a\sin b=-\frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$

$\sin a\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$ $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

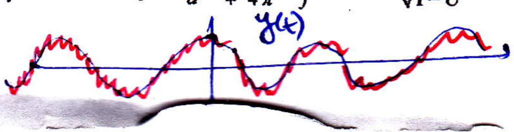
$TF\{\delta(t-t_0)\}=e^{-2\pi jft_0}$ $TF\left\{A\prod_\theta(t)\right\}=A\theta\sin c(f\theta)$

$TF\left\{A\Lambda_\theta(t)\right\}=A\theta\sin c^2(f\theta)$ $TF\{e^{-at}U(t)\}=\frac{a}{a+2\pi jf}$

$TF\{e^{-a|t|}\}=\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$ $\int\frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}dx=ar\sin(U)$



0.5



0.50