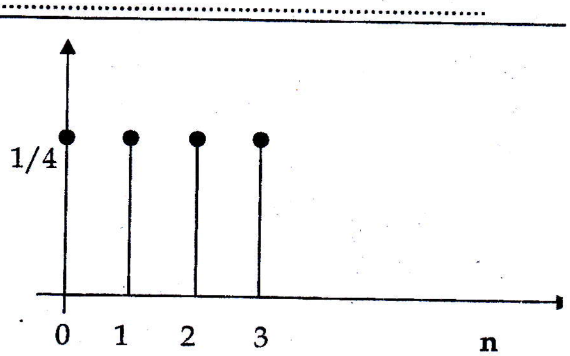
Sig. et Proces. Aleat. : Interro 1 (ST 2019/2020) Nom&Prénom : ....

Exercice 1 / 4.5

On considère le système linéaire et invariant h(n) donné ci-contre

1. Etudier la causalité et la stabilité de ce système (Justifier)
2. Calculer son énergie, sa puissance et son auto-corrélation
3. Exprimer y(n) en fonction de x(n)
4. A partir de cette équation, étudier la linéarité et l'invariance



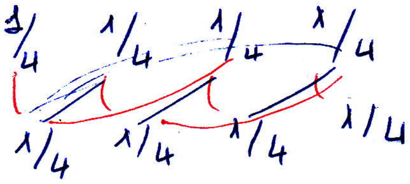
1°- $h(n) = \frac{1}{4}\left[\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)\right]$

$h(n) = 0$ pour $n < 0 \Rightarrow h(n)$ causal 0.5

$\sum_0^3 |h(n)| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 < \infty \Rightarrow$ Stable 0.5

2°- $E = \sum_0^3 |h(n)|^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 4 = \frac{1}{4}$ 0.5

E finie $\Rightarrow P = 0$ 0.5



$Rx(0) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$Rx(1) = Rx(-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$

$Rx(2) = Rx(-2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$ 1.0

$Rx(3) = Rx(-3) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

3°- $y(n) = x(n) * h(n)$

$= \frac{1}{4}\left[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)\right]$ 0.5

4°- De la forme $\sum a_i y(n-i) = \sum b_i x(n-i)$) 1

coeff : 1/4 ⇒ csts

Exercice 2 /3

Soient A et B deux v.a. décorrélées telles que $p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(A-2)^2}{2}}$ et $p(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{B^2}{2}}$ et soit z=2A-3B

1. Déterminer p(A,B)
2. Déterminer p(z)
3. Calculer le coefficient de corrélation ρ_{AB}

1°- A et B sont v.a Gaussiennes et decorelées ⇒ A et B independantes

$\Rightarrow p(A,B) = p(A).P(B) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(A-2)^2 + B^2}{2}}$ 0.5

2°- z combinaison linéaire de Gaussiennes donc Gaussienne 0.5

$\mu_z = E\{z\} = E\{2A - 3B\} = 2.\mu_A - 3\mu_B = 4$ 0.5

$\sigma_z^2 = E\{z^2\} - \mu_z^2 = E\{(2A - 3B)^2\} - 4^2$

$= 4E\{A^2\} + 9E\{B^2\} - 12E\{A\}.E\{B\} - 4^2$

$= 4(\mu_A^2 + \sigma_A^2) + 9(\mu_B^2 + \sigma_B^2) - 16$

$= 20 + 9 - 16 = 13$ 0.5

$\Rightarrow p(z) = \frac{1}{\sqrt{26\pi}} e^{-\frac{(z-4)^2}{26}}$ 0.5

3°- A et B decorrelées ⇒ $\rho_{AB} = 0$ 0.5

$TF\{\delta(t-t_0)\} = e^{-2\pi j f t_0}$ $TF\left\{A \prod_\theta(t)\right\} = A\theta \sin c(f\theta)$

$TF\left\{A \Lambda_\theta(t)\right\} = A\theta \sin c^2(f\theta)$ $TF\left\{e^{-at}U(t)\right\} = \frac{a}{a+2\pi jf}$

$TF\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$

$\int \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}} dx = ar\sin(U)$

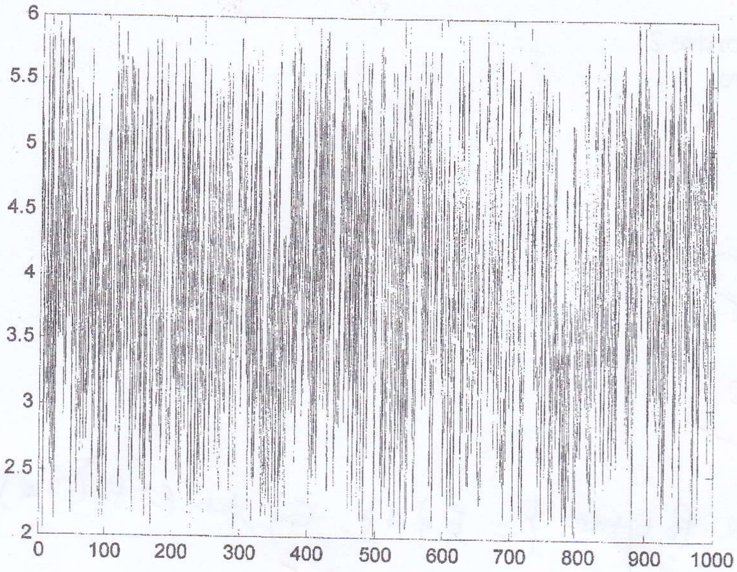
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

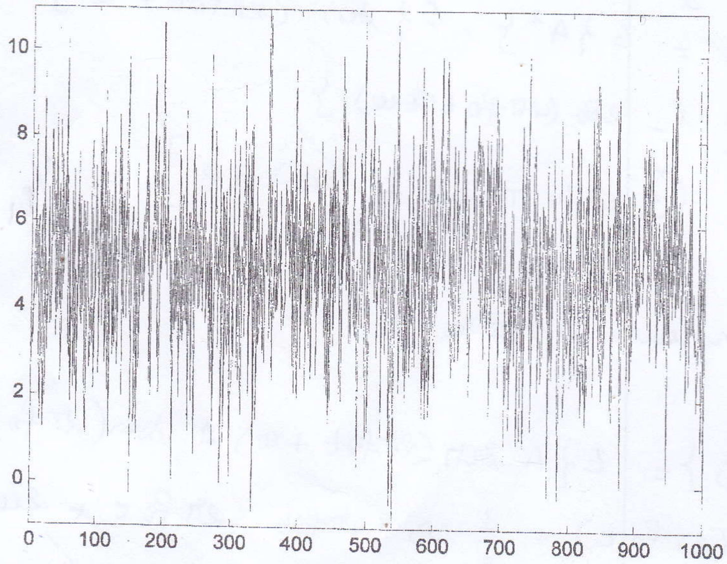
Exercice 3 /3

Donner la densité de probabilité des variables (avec domaine de x) dont le tracé est donné ci-dessous



$$p(x) = \begin{cases} 1/4 & 2 < x \leq 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

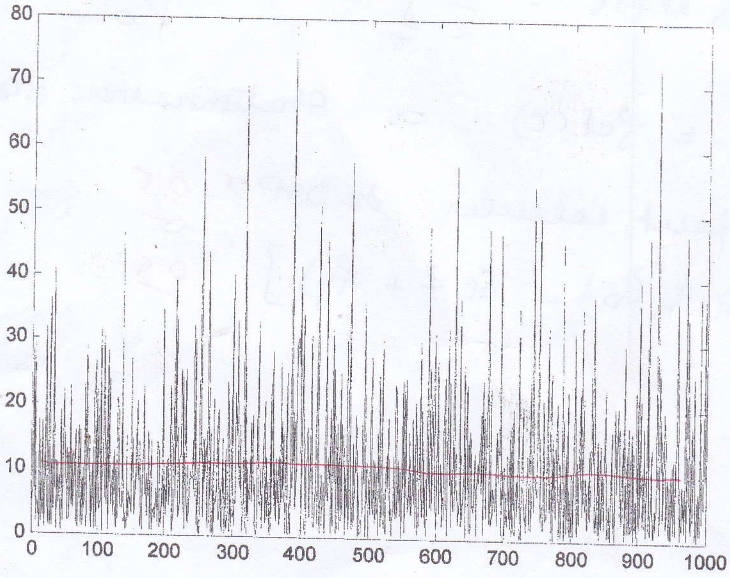
1



$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{8}}$$

$x \in \mathbb{R}$

1



$$p(x) = 10 e^{-10x} \qquad x \geq 0$$

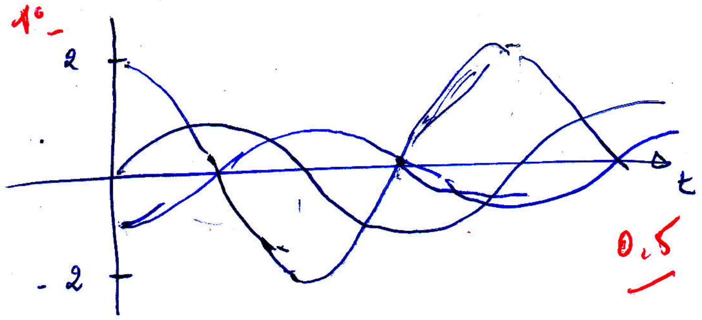
1

Exercice 4 / 4.5

Soit x(t)=$A\ sin(2\pi f_0 t + \varphi)$ où φ est une variable uniforme sur [-π, π] et A une v.a indépendante de φ telle que $p(A) = 2e^{-2A}$

1. Tracer quelques réalisations de x(t)
2. Etudier la stationnarité d'ordre 1 et d'ordre 2
3. Peut-on calculer sa DSP ?. Si oui le faire.

1°-



0,5

2°- $\mu_x(t) = E\{x(t)\} = E\{A \sin(2\pi f_0 t + \varphi)\} = E\{A\}.\ E\{\sin(2\pi f_0 t + \varphi)\}$

$= \mu_A \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi = 0$ 0,5

$\sigma_x^2(t) = E\{x(t)^2\} - \cancel{\mu_x^2(t)}_0 = E\{A^2\} . E\{\sin^2(2\pi f_0 t + \varphi)\}$

$= (\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \frac{1}{2} E\{1 - \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)\}$

$= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) d\varphi\right] = 1/4$ 0,5

0,5

$\mu_x(t) = 0 = cste$
$\sigma_x^2(t) = 1/4 = cste$
} stationnaire d'ordre 1 0,5

$R_x(t,\tau) = E\{x(t)x^*(t-\tau)\} = E\{A \sin(2\pi f_0 t + \varphi) A \sin(2\pi f_0(t-\tau) + \varphi)\}$

$= E\{A^2\} . E\{\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) - \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\varphi)\}$

$= (\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \frac{1}{2} \cos 2\pi f_0 \tau - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\varphi) \cdot \frac{1}{2\pi}$ (= 0) 1,0

$= \frac{1}{4} \cos 2\pi f_0 \tau = fct(\tau) \Rightarrow$ stationnaire d'ordre 2

3°- $R_x(t,\tau) = fct(\tau) \Rightarrow$ on peut calculer sa DSP 0,5

$S_x(f) = TF\{R_x(\tau)\} = \frac{1}{8}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$ 0,5