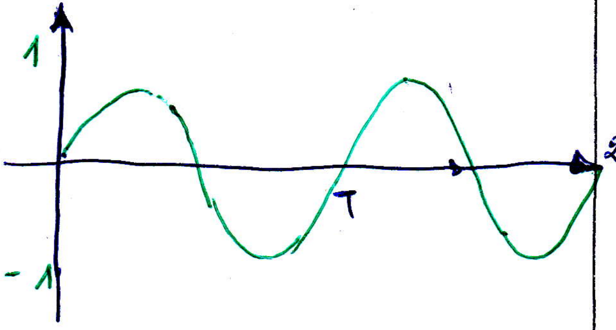
Sig. et Proces.Aleat.: Interro 2 (ST 2018/2019) Nom&Prénom : ....

Exercice 1 5.9

On transmet le signal $x(t)=\sin(2\pi f_0 t)$ pour $0 \le t \le 2T$ où $T = 1/f_0$ à travers un canal tel qu'à la réception le signal soit retardé de t' et bruité par un bruit blanc additif de variance $\sigma^2 = 0.25$. On désire maximiser le rapport signal sur bruit en employant un filtre h(t) causal.

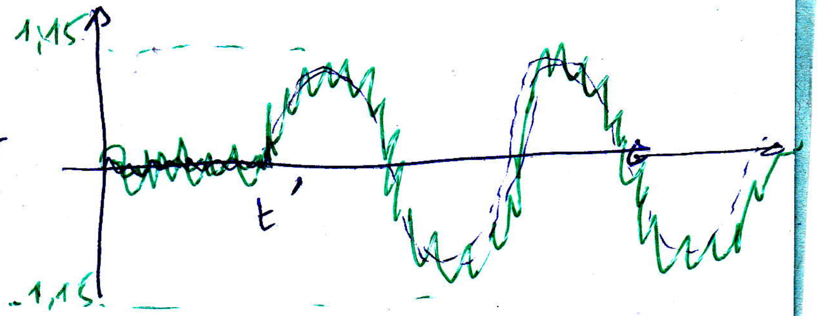
1. Tracer avec précision les 4 signaux : signal transmis, signal reçu, le filtre h(t) et le signal filtré.
2. Calculer le SNR après filtrage.

1/



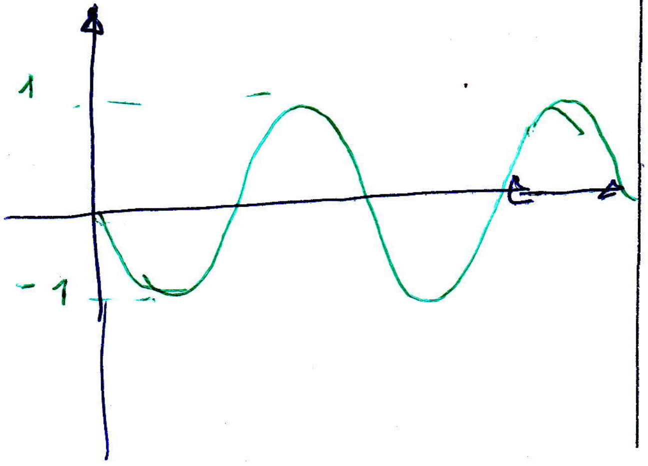
Signal transmis

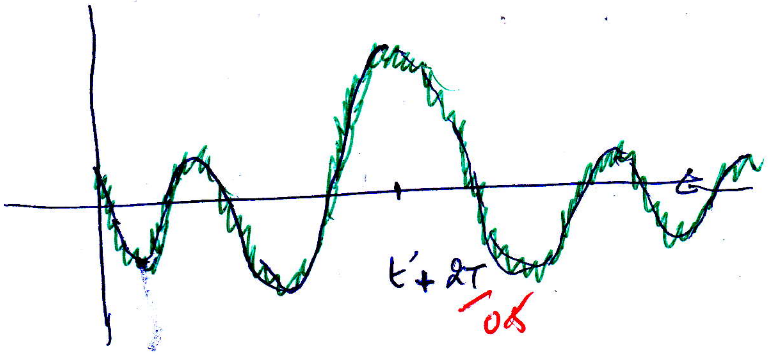
1



Signal Reçu

1,0





0.5

1.0

h(t) causal 1/

2/ $SNR_{t'} = \dfrac{Ex}{\sigma^2} = \dfrac{\int_0^{2T} (\sin 2\pi f_0 t)^2\, dt}{0.25} = \dfrac{1}{0.25}\left[\int_0^{2T} 1/2\, dt - \cancel{\int_0^{2T} \cos 4\pi f_0 t\, dt}\right]$

$= 4T$ 1/

$$H(f)_{optimal} = k.X^*(f)e^{-2\pi jfT0} / S_b(f$$

$$SNR(T_0)_{\max} = \int \frac{|X(f)|^2}{S_b(f)} df$$

Exercice 2 4

On considère un signal de parole dont l'autocorrélation est donnée par $R_{yy}(k)=0.5^{|k|}$. On veut déterminer les coefficients du filtre linéaire modélisant ce signal en supposant que l'entrée est un bruit blanc de variance σ^2.

1. Identifier la nature du filtre AR ou MA (justifier)
2. En supposant que le modèle est d'ordre 2 , déterminer les paramètres du modèle.
3. Expliquer le principe de la compression en employant un modèle AR ou MA.

1°/ $R_{yy}(k) \longrightarrow 0$ ⇒ AR
$k \longrightarrow +\infty$

0.5

2°/

$$\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) & R_{yy}(2) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) & R_{yy}(1) \\ R_{yy}(2) & R_{yy}(1) & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

0.5

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

0.5

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

0.5

$$a_1 = \frac{-0.5 \cdot 1 + 0.5 \times 0.25}{0.75} = -0.5$$

~~0.5~~

0.5

$$a_2 = \frac{1 \times -0.25 + 0.5 \times 0.5}{0.75} = 0$$

$$\sigma_2 = 1 + 0.5 \times a_1 + 0.25 \times a_2$$

0.5

$$= 0.75$$

3° Envoyer les coefficients au lieu du signal .. Après réception le bb + $\boxed{\text{filtre}}$ → signal Reconstruit

1

-Si k=0, $R_{yy}(0) = R_{xx}(0).h(0) - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(-i) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$

$$R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$$

-Si k≠0, $R_{yy}(k) = 0 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$

Exercice 3 5.5

Soient $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_N)$, N variables aléatoires indépendantes suivant la loi $p(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$. On considère l'estimateur suivant de $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$.

1. Montrer que cet estimateur est consistant.
2. On suppose que l'on observe l'échantillon suivant (1.5, -0.6, -1.7, 0.3, 2.4, -2.5) donner $\hat{\theta}$, le biais et la variance d'estimation.

1° $p(x)$ loi de ~~Exp~~ Exponentiel 0.5

$\Rightarrow \mu_x = \theta$ et $\sigma_x^2 = \theta^2$ 0.5

$$E\{\hat{\theta}\} = \frac{1}{N} E\left\{\sum_{i=1}^{N} x_i\right\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{E\{x_i\}}_{\theta}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot N \cdot \theta = \theta$$

$$b_{\hat{\theta}} = \theta - \theta = 0$$ 1.0

$$\sigma^2_{\hat{\theta}} = E\{(\hat{\theta} - E\{\hat{\theta}\})^2\} = E\left\{\left(\frac{\sum^{N} x_i}{N} - E\left\{\frac{\sum^{N} x_i}{N}\right\}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{N^2} E\left\{\left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - E\{x_i\})\right)^2\right\}$$

Sachant que les x_i sont indépendants et que $E\{x_i - E\{x_i\}\} = 0$ alors

$$\sigma^2_{\hat{\theta}} = \frac{1}{N^2} E\left\{\sum_{i=1}^{N} (x_i - E\{x_i\})^2\right\}$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{E\{(x_i - E\{x_i\})^2\}}_{\sigma_x^2}$$

$$= \frac{\theta^2}{N}$$ 1,5

$$\lim_{N \to +\infty} b_{\hat{\theta}} = \lim \sigma^2_{\hat{\theta}} = 0$$

$\Rightarrow \hat{\theta}$ consistant 0.5

2° $$\hat{\theta} = \frac{1.5 - 0.6 - 1.7 + 0.3 + 2.4 - 2.5}{6}$$

$$= -0.1$$ 0.5

$b_{\hat{\theta}} = 0$ ~~ts~~ biais $= 0$ 0.5

$$\sigma^2_{\hat{\theta}} = \frac{\theta^2}{N} = -\frac{0.01}{6} = 0.0017$$ 0.5