

**TP n° 3 : Processus aléatoires (Stationnarité et Ergodisme) sous Python**

Buts : Manipuler des signaux aléatoires, les caractériser grâce à leurs moments d'ordre 1 (moyenne, variance) et d'ordre 2 (autocorrélation, covariance). Aborder et acquérir les notions de stationnarité et d'ergodicité. Aborder le concept de filtre formeur.

**Exercice 1:**

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt;
N_R=500; N_va=1000; A=1; f0=.002; X=[];
phi=np.random.uniform(0,2*np.pi,N_R);
t = np.linspace(0,N_va-1,N_va)
for i in range (N_R):
    X=np.append(X,A*np.cos(2*np.pi*f0*t+phi[i]));

X= np.resize(X,new_shape=(N_R,N_va))
plt.figure(1);plt.plot(t,X[0,:]); plt.plot(t,X[1,:]);plt.plot(t,X[2,:]);plt.plot(t,X[3,:]);
"""Stationnarité d'ordre 1"""
moy=np.mean(X,0); var=np.var(X,0);
plt.figure(2); plt.subplot(211); plt.plot(moy); plt.subplot(212); plt.plot(var);
"""Stationnarité d'ordre 2"""
Cx=np.cov(np.transpose(X),np.transpose(X))
plt.figure(3); plt.imshow(Cx);
plt.figure(4); plt.plot(Cx[0,:]); plt.plot(Cx[10,:]);plt.plot(Cx[20,:]);plt.plot(Cx[30,:]);
"""Ergodisme d'ordre 1"""
moy_t=np.mean(X[1,:]); var_t=np.var(X[1,:]);
"""Ergodisme d'ordre 2"""
Cx_t=np.cov((X[1,:],X[1,:]),mode='full');
plt.figure(5); plt.plot(Cx_t);
```

1. Quelle est la différence entre les 4 réalisations affichées.
2. A partir d'une visualisation peut-on prévoir la stationnarité ou l'ergodicité?
3. Ce processus est-il stationnaire d'ordre 1 ? Justifier
4. Calculer l'auto-covariance statistique théorique puis commenter la figure 3.
5. Utiliser l'explorateur de variables pour visualiser Cx, ce processus est-il stationnaire d'ordre 2 ? Justifier.
6. Comparer les moments statistiques et temporels et conclure. En déduire la DSP de X.
7. Faites les changements nécessaires pour générer le processus aléatoire  $X(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$  considérant  $\varphi$  cste et A uniforme entre -1 et 1 et reprendre toutes les questions.

**Exercice 2**

On suppose le processus suivant b est ergodique d'ordre 2 et on se contente de déduire les propriétés statistiques des propriétés temporelles en étudiant une réalisation unique bb.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt;
sigma=0.25; fe=22050; N=1000;Te=1/fe;
bb = (sigma**0.5)*np.random.randn(N); t = np.linspace(0, N-1, N)*Te;
Rb = np.correlate(bb,bb,mode='full')/N; tt = np.linspace(1-N, N-1, 2*N-1)*Te;
plt.figure(1);plt.subplot(311); plt.plot(t,bb); plt.grid(True);
plt.subplot(312); plt.plot(tt,Rb); plt.grid(True);
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Autocor du bruit blanc');
TFb = np.fft.fft(bb); TFb=np.fft.fftshift(TFb);
Sbf=abs(TFb)**2/N; ff = np.linspace(-N/2, N/2-1, N)*fe/N;
plt.subplot(313); plt.plot(ff,Sbf); plt.grid(True);
plt.xlabel('freq'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('DSP du bruit blanc');
```

1. Commenter les graphes obtenus.
2. Pourquoi n'obtient-on pas une DSP cste?
3. Prendre une moyenne de 2 et une variance de 4 et retrouver ces caractéristiques à partir de l'autocorrélation
4. Rajouter ce qui suit :

```
import scipy.signal as sp;
a = np.array([1,-0.839,-0.015,-0.320,0.197,0.055,-0.285,0.067,0.044,0.003,0.178])
b = np.array([1,0]);
L = 500; fe=1; f,H= sp.freqz(b,a,L); f=f*0.5*fe/np.pi;
Y = sp.lfilter(b,a,bb) ;
TFb = TFb[0:L];
plt.figure(2); plt.subplot(121);plt.plot(f, 20*np.log10(abs(TFb/TFb.max())));
plt.title('Signal d entree'); plt.xlabel('Fréq (Hz)');plt.ylabel('Amp');
plt.subplot(122);plt.plot(f, 20*np.log10(abs(H/H.max())));
plt.title('Module du Filtre (bleu)+ Sortie du filtre (orange)'); plt.xlabel('Fréq (Hz)');plt.ylabel('Amp');
TFy = np.fft.fft(Y); TFy = TFy[0:L];
plt.plot(f, 20*np.log10(abs(TFy/TFy.max())));
```

5. Quel est le but des lignes rajoutées ? Commenter chaque figure.
6. Quelle est la nature du filtre formeur ? A quoi peut servir ce filtre ?
7. Rajouter les instructions nécessaires pour vérifier les formules suivantes :

$$- \mu_y = \mu_x \quad H(f)|_{f=0} \quad - S_y(f) = TF(R_y(\tau)) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

Remarque : f=0 correspond sous matlab au 1er élément de H

4. Inverser a et b et commenter.
5. Donner une application cette notion de filtre formeur.

**Exercice 5**

Télécharger le fichier ‘vous avez du courrier en attente.wav’ et le placer dans le même répertoire que votre programme commençant comme suit :

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt;
from scipy.io import wavfile as wf; import winsound ;
fname = 'vousavezducourrierenattente.wav';
winsound.PlaySound(fname, winsound.SND_FILENAME)
fe, X = wf.read(fname);
Te=1/fe; N=len(X); t = np.linspace(0, N-1, N)*Te;
plt.figure(1);plt.subplot(211); plt.plot(t,X); plt.grid(True);
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Phrase');
N1=21000;N2=21500; Y=X[N1:N2] ; ty=np.linspace(N1, N2-1, N2-N1)*Te;
plt.subplot(212); plt.plot(ty,Y); plt.grid(True);
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('morceau de la phrase');
#zz=np.int8(Y) ; wf.write("z.wav", fe, zz);
#winsound.PlaySound("z.wav",winsound.SND_FILENAME) ;
```

1. Le signal étudié est un processus aléatoire ou une réalisation d’un signal aléatoire?
2. Calculer la DSP. Est-elle d’origine statistique ou temporelle?
3. Calculer et visualiser la moyenne et la variance temporelles pour différentes parties du signal qui se chevauchent pour des durées de N=1000,500, 250, 125. Pour quelle valeur de N peut-on considérer le processus stationnaire?