L'Echantillonnage

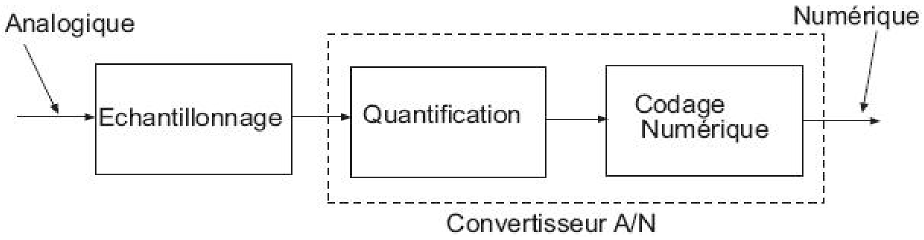
Introduction

Numériques Vs Analogiques

- Simplicité : Les systèmes numériques sont intrinsèquement plus simples à analyser (et donc à synthétiser) que les systèmes analogiques.
- Possibilités de traitement accrues des opérations beaucoup plus complexes qu'en analogique, notamment des opérations non-linéaires.
- Robustesse aux bruits (insensibles aux bruits parasites électromagnétiques)
- Précision et stabilité (précision des calculs, insensible à la température et ne varie pas avec l'âge du système).
- Flexibilité : (Ex : changer valeur en mémoire).

Introduction

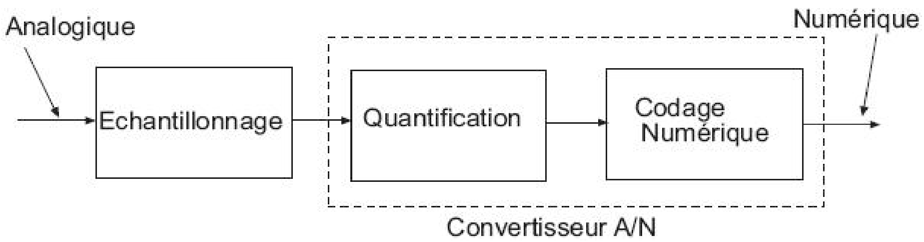
L'échantillonnage constitue la première opération à effectuer lors d'une conversion analogique à numérique (A/N).

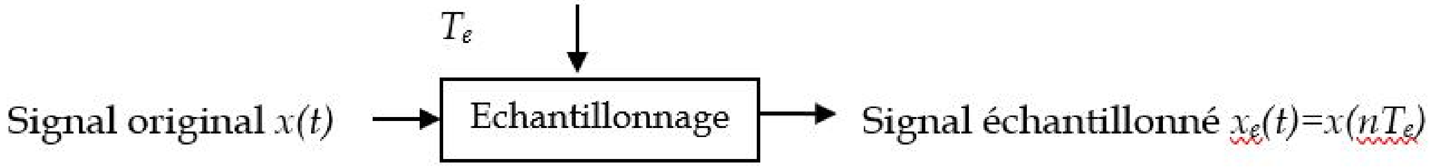


Echantillonner un signal : Prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret (temps) et permettre, ainsi, sa numérisation.

Introduction

L’échantillonnage constitue la première opération à effectuer lors d’une conversion analogique à numérique (A/N).

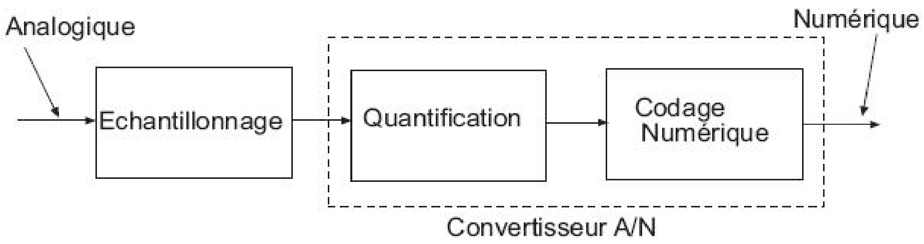


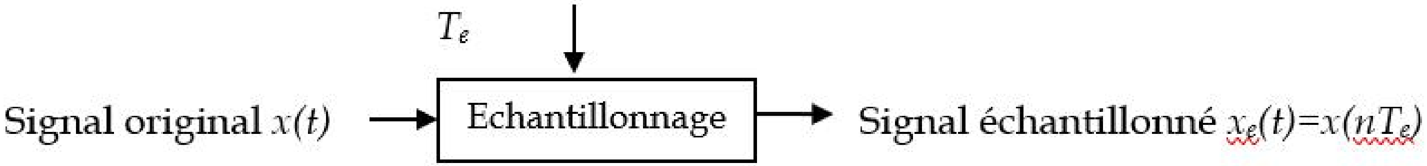


Echantillonner un signal : Prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret (temps) et permettre, ainsi, sa numérisation.

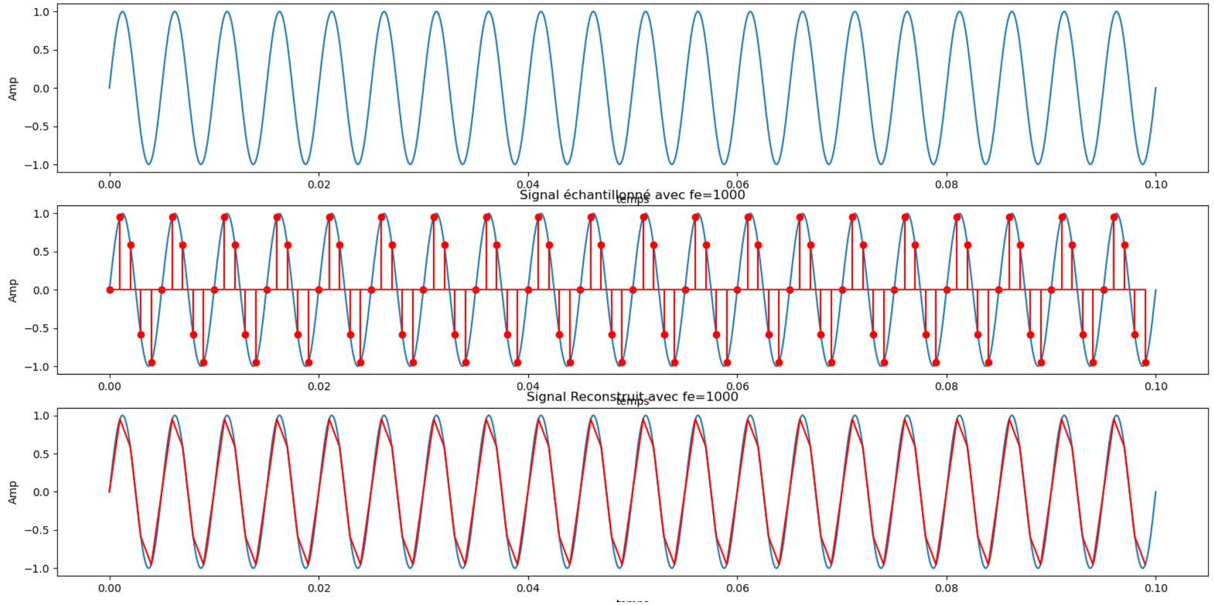
Introduction

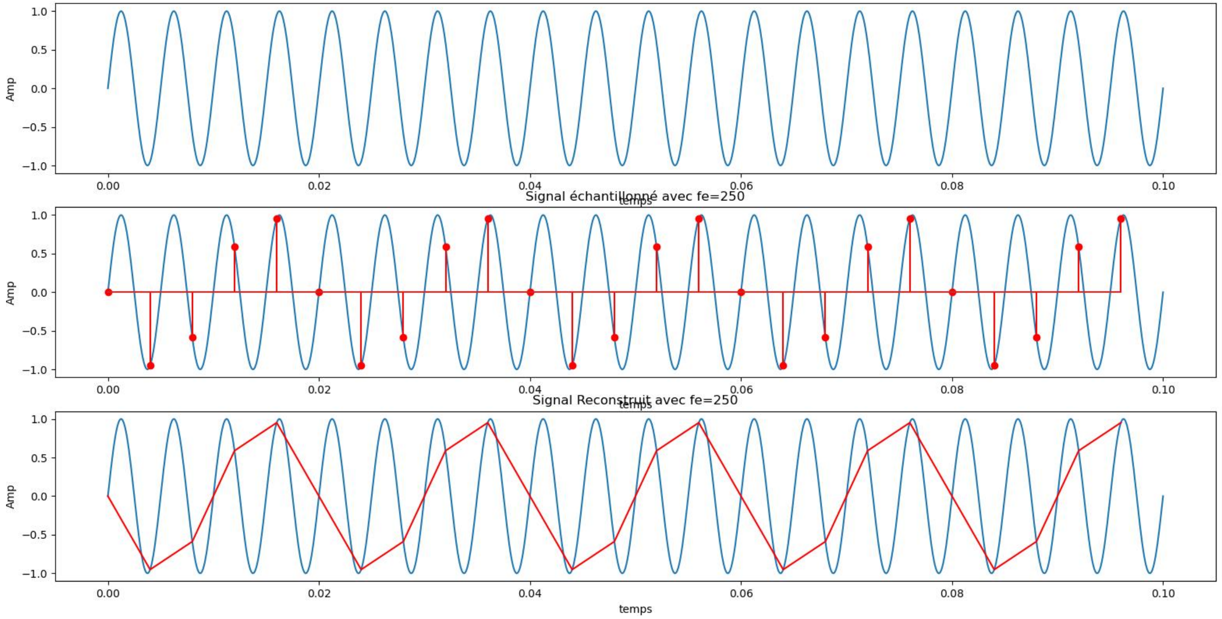
L’échantillonnage constitue la première opération à effectuer lors d’une conversion analogique à numérique (A/N).





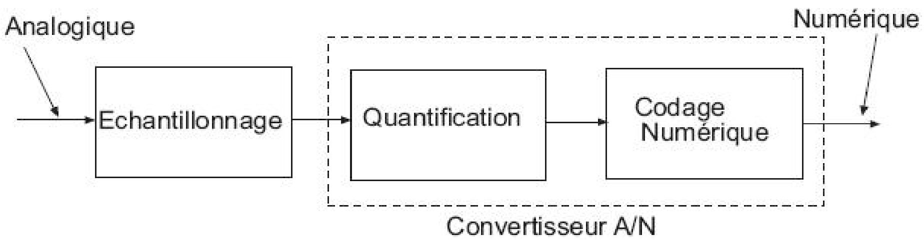
Echantillonner un signal : Prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret (temps) et permettre, ainsi, sa numérisation.

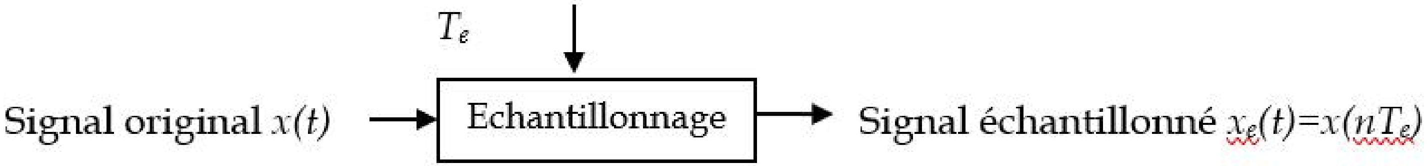




Introduction

L'échantillonnage constitue la première opération à effectuer lors d'une conversion analogique à numérique (A/N).



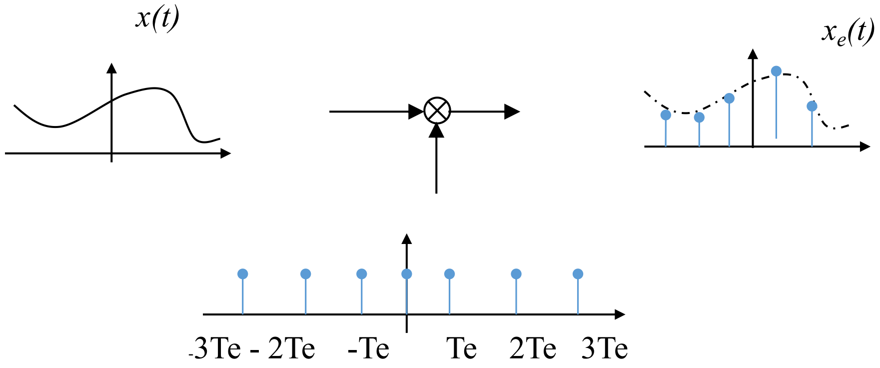


Echantillonner un signal : Prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret (temps) et permettre, ainsi, sa numérisation.

2 contraintes majeures :
- Ne pas détériorer le signal (conserver l'information utile)
-Limiter l'espace mémoire nécessaire au stockage.

I. Echantillonnage et Reconstruction idéale

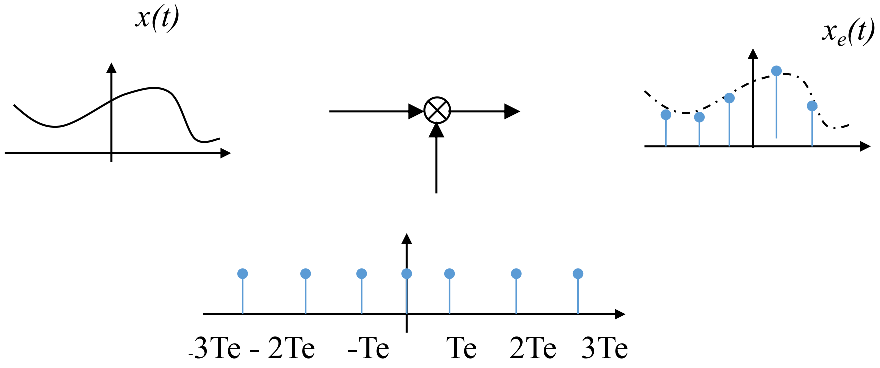
Pas de perte d'information



$$x_e(t) = x(t).\sum_n \delta(t - nT_e) \qquad x_e(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

I. Echantillonnage et Reconstruction idéale

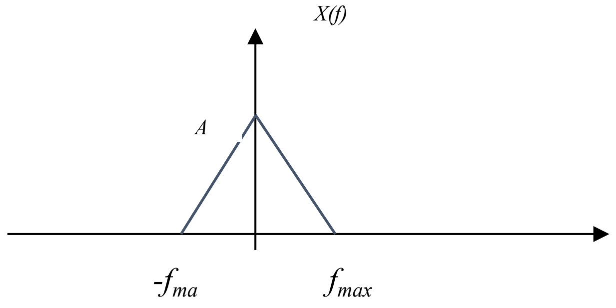
Pas de perte d'information

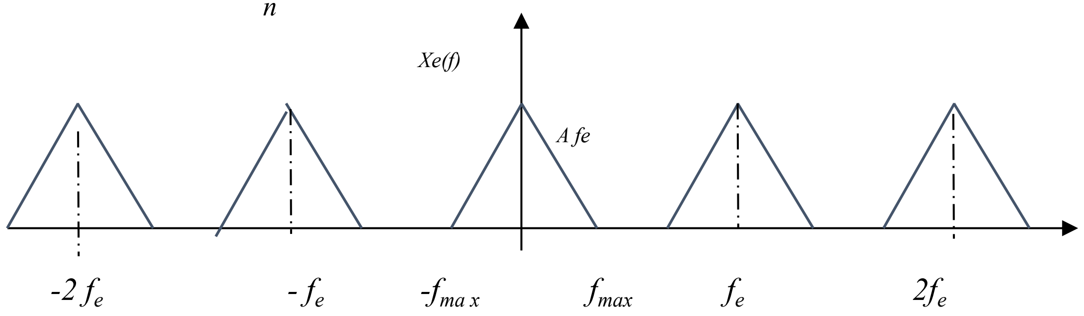


$$x_e(t) = x(t).\sum_n \delta(t - nT_e)$$

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

$$X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e)$$



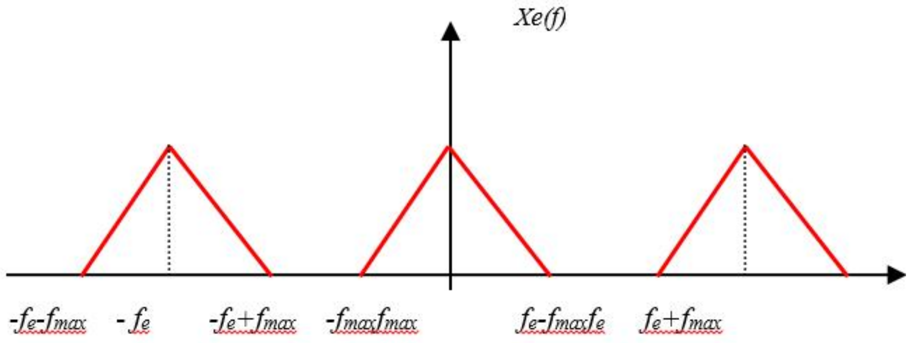


I. Echantillonnage et Reconstruction idéale

2 Cas :

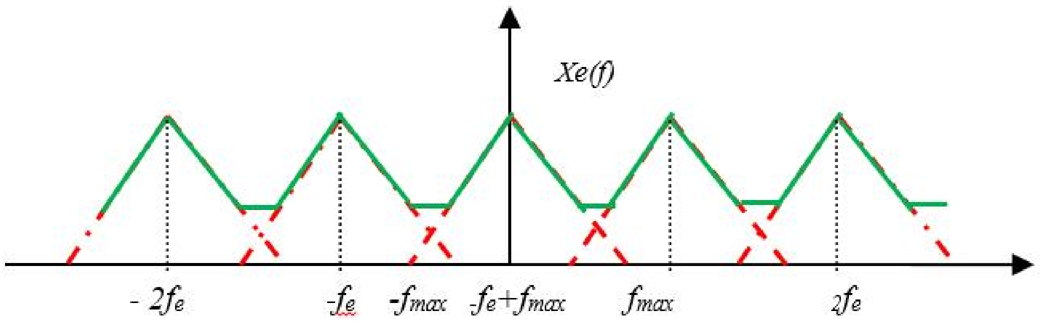
- f_e> 2 fmax $\Rightarrow$ motifs disjoints $\Rightarrow$ Extraire X(f) grâce à un filtre passe-bas idéal

$\Rightarrow$ Reconstitution parfaire le signal x(t) à partir des x_e(t).



- fe> 2 fmax $\Rightarrow$ motifs élémentaires de $|X_e(f)|$ se recouvrent (Repliement de spectres)

$\Rightarrow$ Impossible de récupérer le spectre X(f) par un filtrage approprié



$\Rightarrow$ une fréquence d´échantillonnage égale à la fréquence de Nyquist ($f_e/2 > f_{max}$)

I. Echantillonnage et Reconstruction idéale

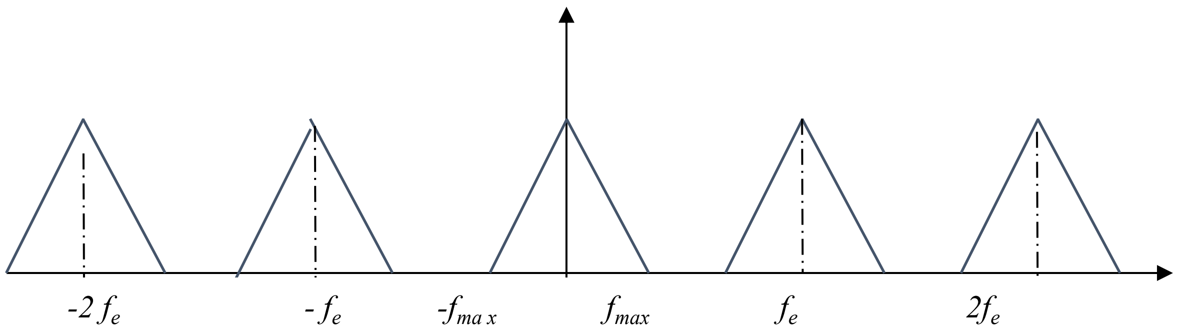
2 Cas :

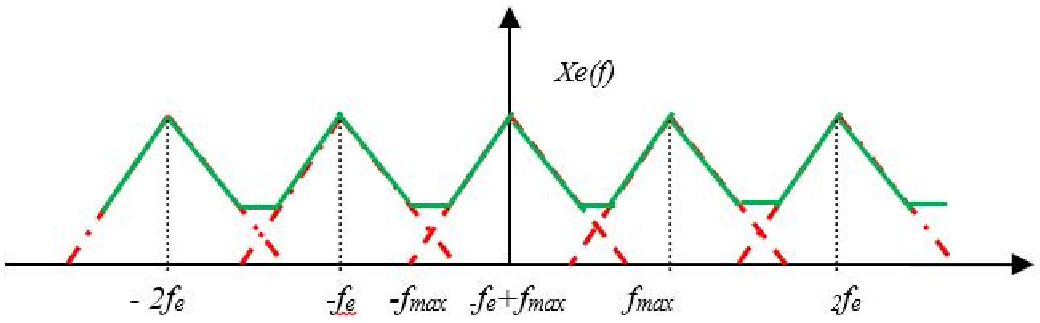
- f_e> 2 fmax $\Rightarrow$ motifs disjoints $\Rightarrow$ Extraire X(f) grâce à un filtre passe-bas idéal

$\Rightarrow$ Reconstitution parfaire le signal x(t) à partir des x_e(t).

- fe> 2 fmax $\Rightarrow$ motifs élémentaires de $|X_e(f)|$ se recouvrent (Repliement de spectres)

$\Rightarrow$ Impossible de récupérer le spectre X(f) par un filtrage approprié





$\Rightarrow$ une fréquence d´échantillonnage égale à la fréquence de Nyquist ($f_e/2 > f_{max}$)

I. Echantillonnage et Reconstruction idéale

Exemples

- $x(t) = Asin\,(\,2\pi f_0 t) \Rightarrow \qquad X(f) = \frac{A}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{A}{2j}\delta(f + f_0)$

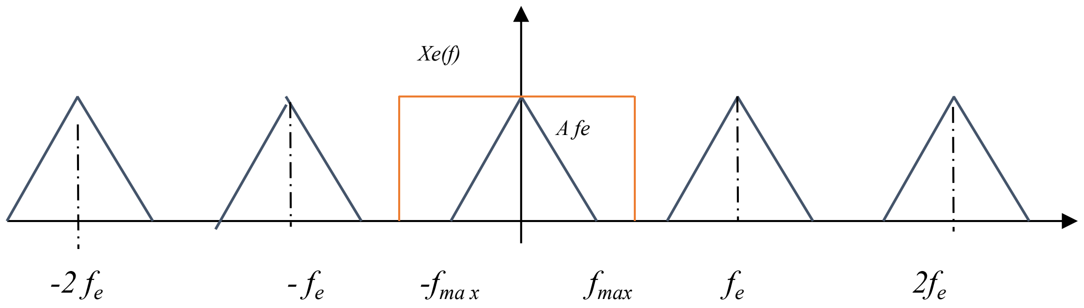
Deux raies aux fréquences $-f_0$ et $+f_0$ → choisir une fréquence d'échantillonnage $f_e > 2\,f_0$.

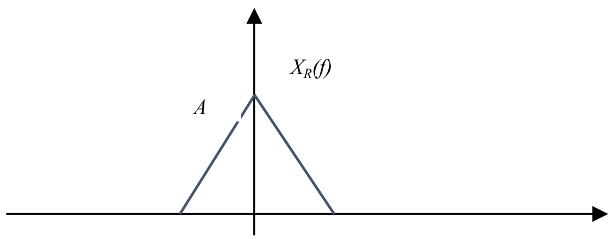
- On considère un signal de parole de durée 1mn et ayant une bande passante de 10 kHz, calculer le nombre minimal d'échantillons nécessaires pour représenter ce signal.

I. Echantillonnage et Reconstruction idéale

Reconstruire le signal analogique revient à récupérer le spectre de départ x(t).

Le spectre du signal échantillonné étant périodique → Utiliser un filtre passe bas avec une fréquence de coupure fc = fe/2 avec pour amplitude 1/ fe.



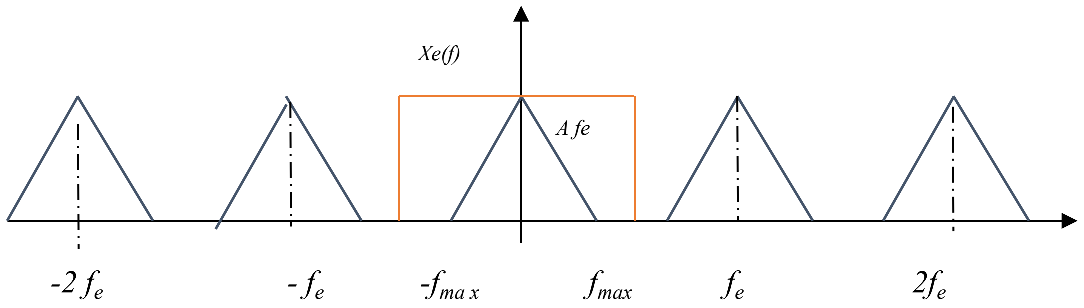


- ✓ Sommation infinie sur n. En pratique, on peut implémenter une approximation;
- ✓ Filtre passe-bas idéal n'est pas causal donc il est physiquement irréalisable.

I. Echantillonnage et Reconstruction idéale

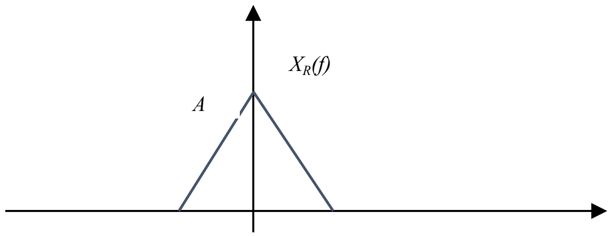
Reconstruire le signal analogique revient à récupérer le spectre de départ x(t).

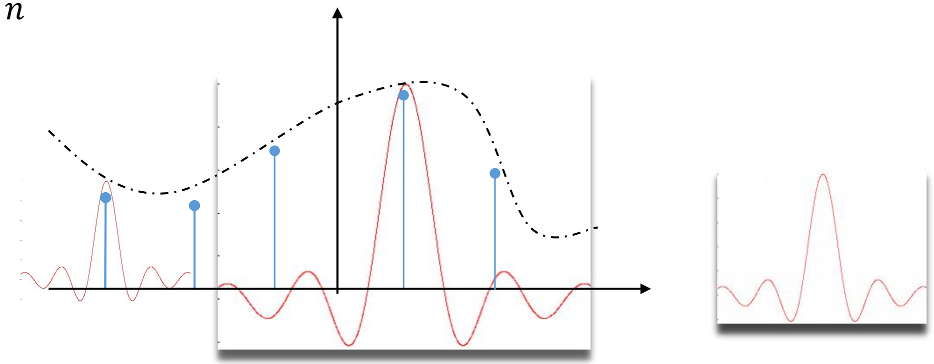
Le spectre du signal échantillonné étant périodique → Utiliser un filtre passe bas avec une fréquence de coupure fc = fe/2 avec pour amplitude 1/ fe.



$$X_R(f) = X_e(f).\frac{1}{f_e}\,\underset{f_e}{\pi}(f) \Rightarrow x_R(t) = x_e(t) * sinc(f_e t)$$

$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e) * sinc\big(f_e(t - nT_e)\big)$$



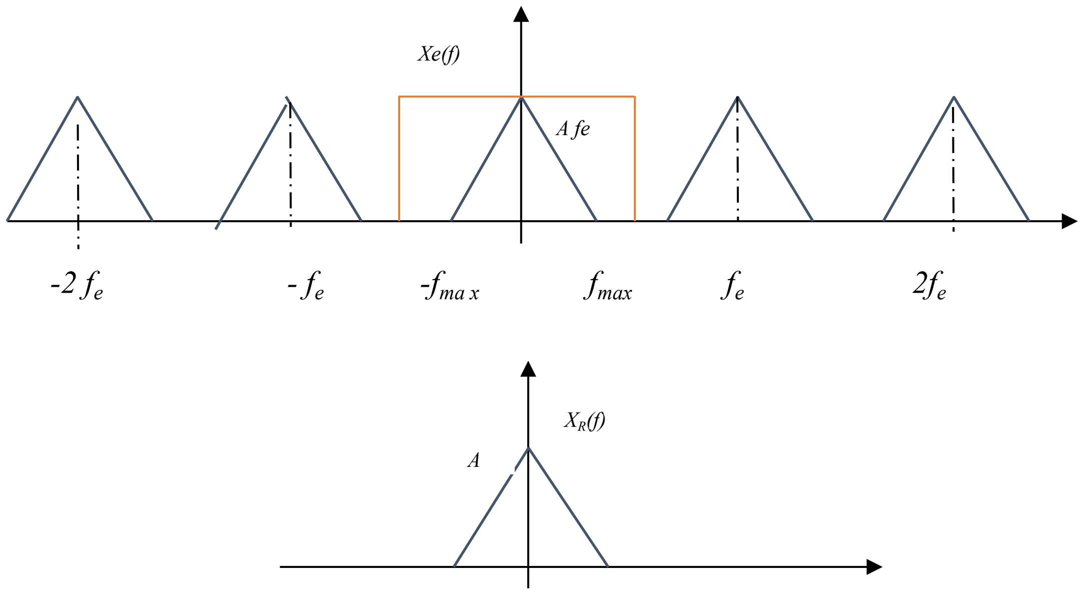


- ✓ Sommation infinie sur n. En pratique, on peut implémenter une approximation;
- ✓ Filtre passe-bas idéal n'est pas causal donc il est physiquement irréalisable.

I. Echantillonnage et Reconstruction idéale

Reconstruire le signal analogique revient à récupérer le spectre de départ x(t).

Le spectre du signal échantillonné étant périodique → Utiliser un filtre passe bas avec une fréquence de coupure fc = fe/2 avec pour amplitude 1/ fe.



$$X_R(f) = X_e(f).\frac{1}{f_e}\pi_{fe}(f) \Rightarrow x_R(t) = x_e(t) * sinc(f_e t)$$

$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e) * sinc\big(f_e(t - nT_e)\big)$$

- ✓ Sommation infinie sur n. En pratique, on peut implémenter une approximation;
- ✓ Filtre passe-bas idéal n'est pas causal donc il est physiquement irréalisable.

I. Echantillonnage et Reconstruction idéale

Remarques :

- ✓ Dans la pratique, on prend une fréquence d´échantillonnage supérieure à la fréquence de Nyquist ($f_e/2>f_{max}$) car on ne peut réaliser un filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure très nette.

Exemple : Spectre de la Voix est compris entre 300Hz et 3400Hz. Numériser la parole dans le réseau téléphonique $f_e = 8$kHz

- ✓ Signaux réels sont rarement à support fréquentiel borné (f_{max} = infinie) $\Rightarrow \forall f_e$ il y aura repliement du spectre.

$\Rightarrow$ Utiliser à l'entrée du système numérique un filtre passe-bas appelé filtre anti-repliement ou anti-aliasing (Filtre analogique : gain de 1 et fc=fe)

I. Echantillonnage et Reconstruction idéale

Exemple :

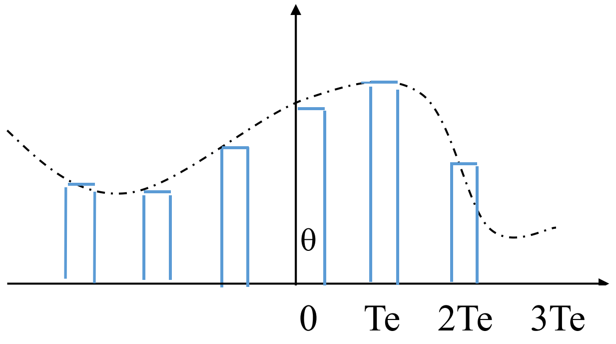
On échantillonne un signal sinusoïdal de fréquence 200Hz avec une fréquence d'échantillonnage f_e = 500Hz puis avec f_e = 250Hz. Quel signal obtient-on lors d'une reconstruction parfaite dans les deux cas ? (Voir Démo)

Solution

- fe=500Hz $\Rightarrow x_r(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec f_0=200Hz
- fe=250Hz $\Rightarrow x_r(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ avec f_1=50Hz

II. Echantillonnage instantané (bloqueur, réel, maintien)

- Dans un système réel de convertisseur numérique analogique, on ne peut pas générer un peigne de Dirac,
- Prélèvement d’un échantillon dure un certain temps θ (petit) .
- Principe : Conserver l'échantillon pendant une certaine durée → Echantillonnage maintien .
- Méthode d’échantillonnage la plus simple à réaliser en pratique et donc la plus utilisée.

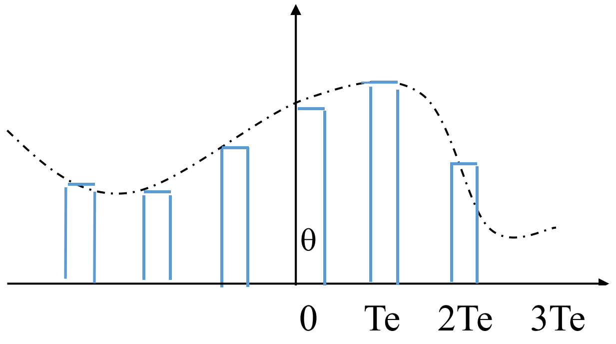


$$x_e(t) = .\sum_n x(nT_e).\pi(t - nT_e - \theta/2)$$

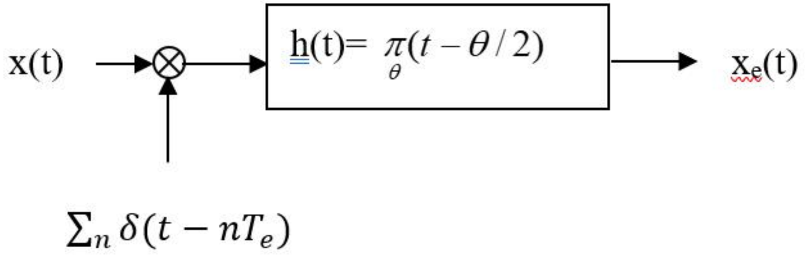
$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e).\delta(t - nT_e) * \pi(t - \theta/2)$$

II. Echantillonnage instantané (bloqueur, réel, maintien)

- Dans un système réel de convertisseur numérique analogique, on ne peut pas générer un peigne de Dirac,
- Prélèvement d'un échantillon dure un certain temps θ (petit) .
- Principe : Conserver l'échantillon pendant une certaine durée → Echantillonnage maintien .
- Méthode d'échantillonnage la plus simple à réaliser en pratique et donc la plus utilisée.

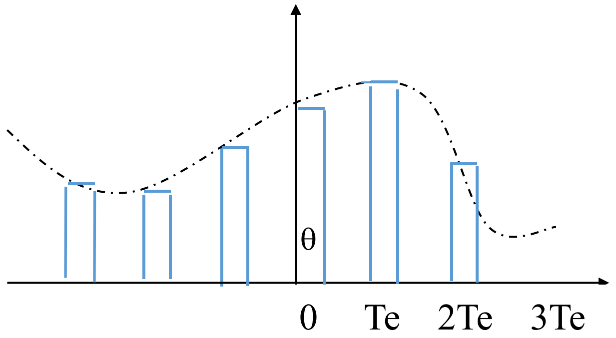


$$x_e(t) = .\sum_n x(nT_e).\pi(t - nT_e - \theta/2)$$
$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e).\delta(t - nT_e) * \pi(t - \theta/2)$$



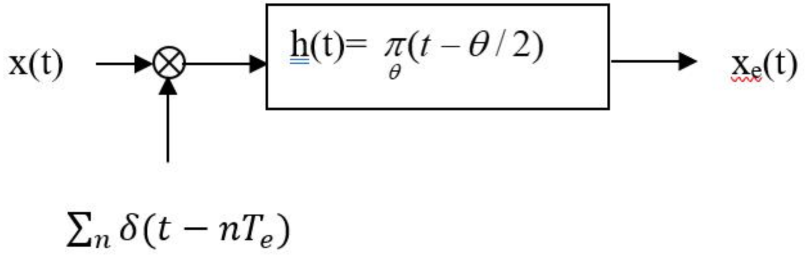
II. Echantillonnage instantané (bloqueur, réel, maintien)

- Dans un système réel de convertisseur numérique analogique, on ne peut pas générer un peigne de Dirac,
- Prélèvement d'un échantillon dure un certain temps θ (petit) .
- Principe : Conserver l'échantillon pendant une certaine durée → Echantillonnage maintien .
- Méthode d'échantillonnage la plus simple à réaliser en pratique et donc la plus utilisée.



$$x_e(t) = .\sum_n x(nT_e).\pi(t - nT_e - \theta/2)$$

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e).\delta(t - nT_e) * \pi(t - \theta/2)$$

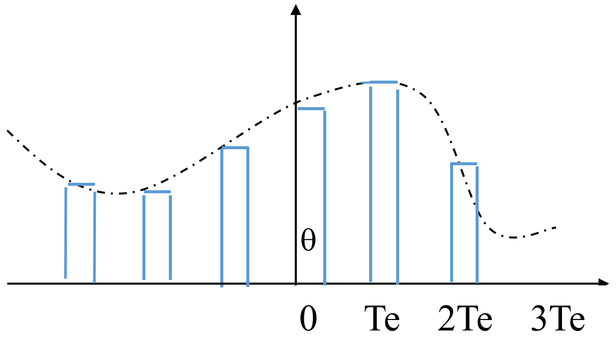


$$X_e(f) = TF\{\sum_n x(nT_e).\delta(t - nT_e)\}.TF\{\pi(t - \theta/2)\}$$

$$X_e(f) = \sum_n f_e X(f - nf_e)\,.\,\theta sin\,c\,(f\theta)e^{-\pi jf\theta}$$

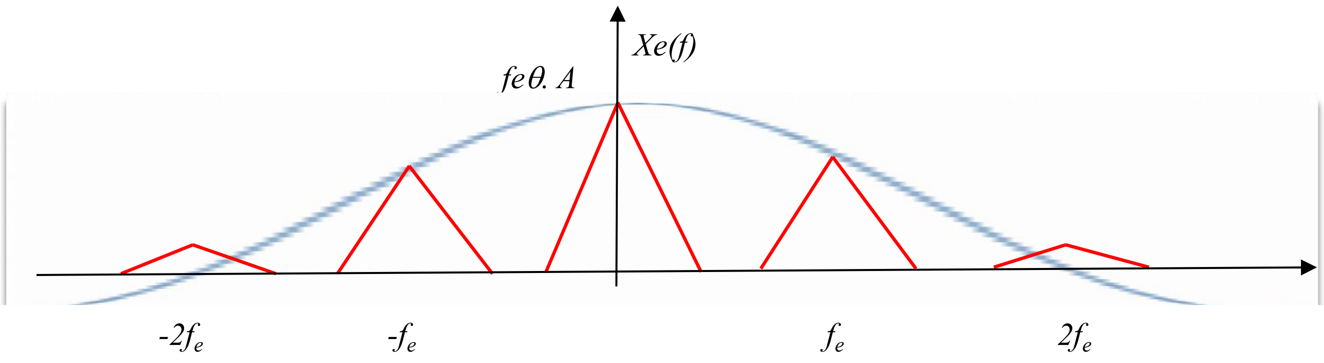
II. Echantillonnage instantané (bloqueur, réel, maintien)

- Dans un système réel de convertisseur numérique analogique, on ne peut pas générer un peigne de Dirac,
- Prélèvement d'un échantillon dure un certain temps θ (petit) .
- Principe : Conserver l'échantillon pendant une certaine durée → Echantillonnage maintien .
- Méthode d'échantillonnage la plus simple à réaliser en pratique et donc la plus utilisée.



$$x_e(t) = .\sum_n x(nT_e).\pi(t - nT_e - \theta/2)$$

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e).\delta(t - nT_e) * \pi(t - \theta/2)$$

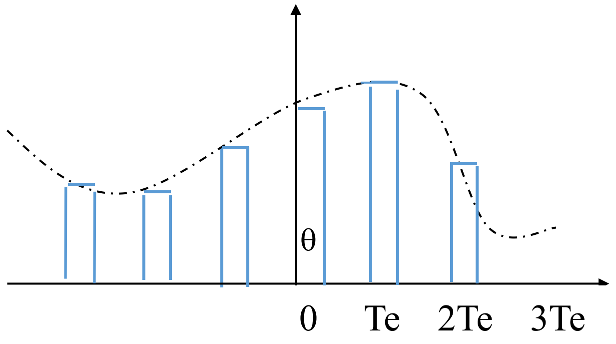


$$X_e(f) = TF\{\sum_n x(nT_e).\delta(t - nT_e)\}.TF\{\pi(t - \theta/2)\}$$

$$X_e(f) = \sum_n f_e X(f - nf_e)\,.\,\theta sin\,c\,(f\theta)e^{-\pi jf\theta}$$

II. Echantillonnage instantané (bloqueur, réel, maintien)

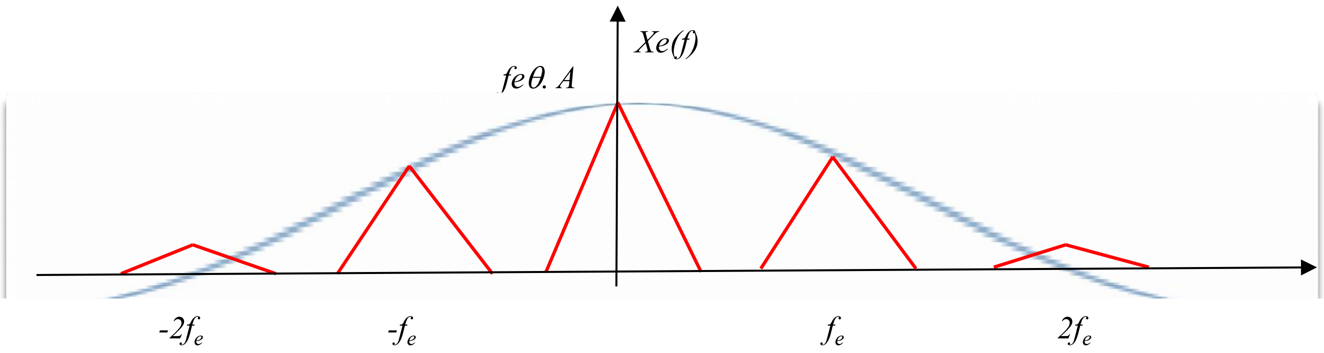
- Dans un système réel de convertisseur numérique analogique, on ne peut pas générer un peigne de Dirac,
- Prélèvement d'un échantillon dure un certain temps θ (petit) .
- Principe : Conserver l'échantillon pendant une certaine durée → Echantillonnage maintien .
- Méthode d'échantillonnage la plus simple à réaliser en pratique et donc la plus utilisée.



Répliques de X(f) déformées par la fonction $\theta sin\,c\,(f\theta)$.
Si $\theta << T_e$ → faible atténuation premières recopies de spectre
→ Récupération parfaite de *x(t)* par un filtre passe-bas avec $f_c = f_e/2$

$$X_e(f) = TF\{\textstyle\sum_n x(nT_e).\delta(t - nT_e)\}.TF\{\pi(t - \theta/2)\}$$

$$X_e(f) = \sum_n f_e X(f - nf_e)\,.\,\theta sin\,c\,(f\theta)e^{-\pi j f\theta}$$

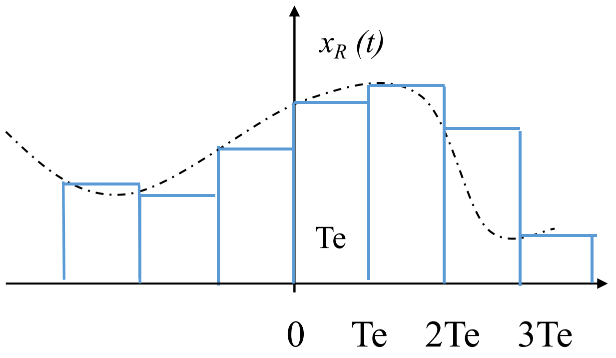


III. Reconstruction réelle: Bloqueurs d'ordre 0 et 1

Reconstituer pratiquement le signal analogique x(t) à partir de ses échantillons x(nTe) → Reconstitution approximative.

- **Bloqueur d'ordre 0**

Réceptionner les échantillons à la cadence Te. Entre nT_e et $(n+1)T_e$ le signal reconstruit $x_R(t)$ prend la même valeur $x(nT_e)$ → Réponse impulsionnelle h(t) du bloqueur maintient l'unique valeur 1 entre 0 et T_e

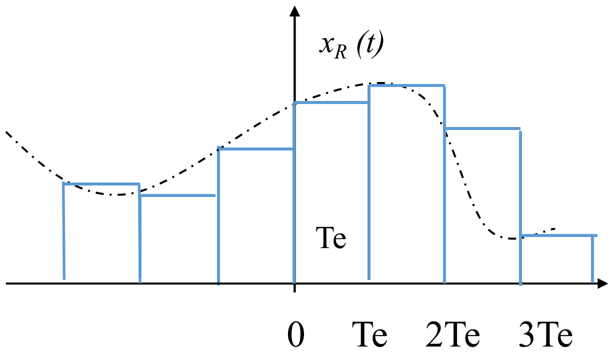


III. Reconstruction réelle: Bloqueurs d'ordre 0 et 1

Reconstituer pratiquement le signal analogique x(t) à partir de ses échantillons x(nTe) → Reconstitution approximative.

- **Bloqueur d'ordre 0**

Réceptionner les échantillons à la cadence Te. Entre nT_e et $(n+1)T_e$ le signal reconstruit $x_R(t)$ prend la même valeur $x(nT_e)$ → Réponse impulsionnelle h(t) du bloqueur maintient l'unique valeur 1 entre 0 et T_e



$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e)\underset{Te}{\pi}(t - nT_e - T_e/2)$$

$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e).\delta(t - nT_e) * \pi(t - T_e/2)$$

$$x_R(t) = x_e(t) * h(t) \quad \text{où} \quad h(t) = \underset{Te}{\pi}(t - T_e/2)$$

$$X_R(f) = \sum_n X(f - nf_e)\,.sin\,c\,(fT_e)e^{-\pi jfTe}$$

III. Reconstruction réelle: Bloqueurs d'ordre 0 et 1

Reconstituer pratiquement le signal analogique x(t) à partir de ses échantillons x(nTe) → Reconstitution approximative.

- **Bloqueur d'ordre 0**

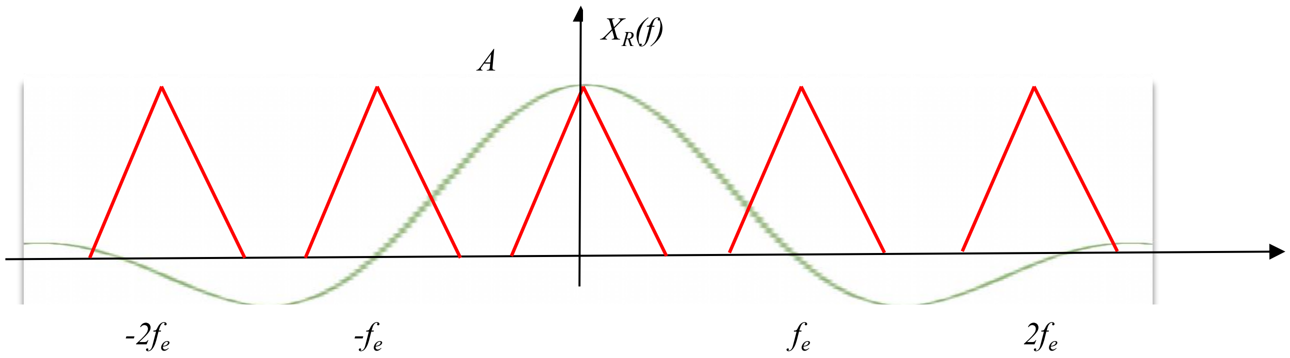
Réceptionner les échantillons à la cadence Te. Entre nT_e et $(n+1)T_e$ le signal reconstruit $x_R(t)$ prend la même valeur $x(nT_e)$ → Réponse impulsionnelle h(t) du bloqueur maintient l'unique valeur 1 entre 0 et T_e

$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e)\underset{Te}{\pi}(t - nT_e - T_e/2)$$

$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e).\delta(t - nT_e) * \pi(t - T_e/2)$$

$$x_R(t) = x_e(t) * h(t) \quad \text{où} \quad h(t) = \underset{Te}{\pi}(t - T_e/2)$$

$$X_R(f) = \sum_n X(f - nf_e)\,.sin\,c\,(fT_e)e^{-\pi jfTe}$$



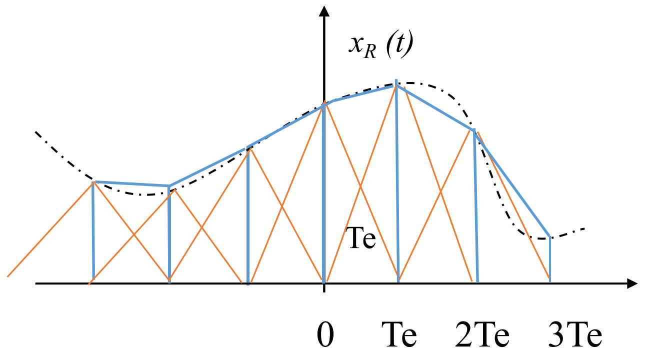
Bloqueur d'ordre 0 simple → Très utilisé dans les convertisseurs numérique/analogique.

III. Reconstruction réelle: Bloqueurs d’ordre 0 et 1

Reconstituer pratiquement le signal analogique x(t) à partir de ses échantillons x(nTe) → Reconstitution approximative.

- **Bloqueur d’ordre 1**

Réceptionner les échantillons à la cadence Te. Entre nT_e et $(n+1)T_e$ le signal reconstruit $x_R(t)$ prend la même valeur $x(nT_e)$ → Réponse impulsionnelle h(t) du bloqueur maintient l’unique valeur 1 entre 0 et T_e



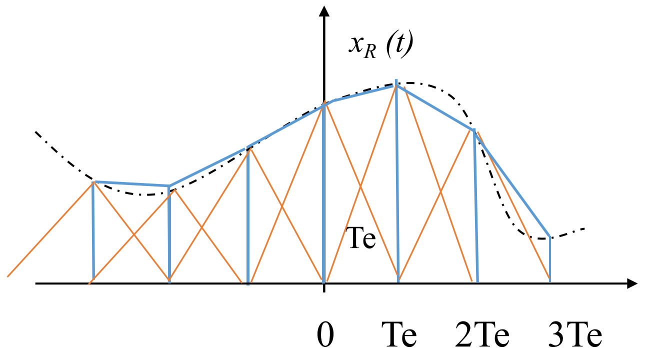
Composantes hautes fréquences sont plus atténuées (sinc au carré)

III. Reconstruction réelle: Bloqueurs d'ordre 0 et 1

Reconstituer pratiquement le signal analogique x(t) à partir de ses échantillons x(nTe) → Reconstitution approximative.

- **Bloqueur d'ordre 1**

Réceptionner les échantillons à la cadence Te. Entre nT_e et $(n+1)T_e$ le signal reconstruit $x_R(t)$ prend la même valeur $x(nT_e)$ → Réponse impulsionnelle h(t) du bloqueur maintient l'unique valeur 1 entre 0 et T_e



$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e)\underset{Te}{\Lambda}(t - nT_e)$$

$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e) * \underset{Te}{\Lambda}(t)$$

$$x_R(t) = x_e(t) * h(t) \quad \text{où} \quad h(t) = \underset{Te}{\Lambda}(t)$$

$$X_R(f) = \sum_n X(f - nf_e).\sin c^2\,(fT_e)$$

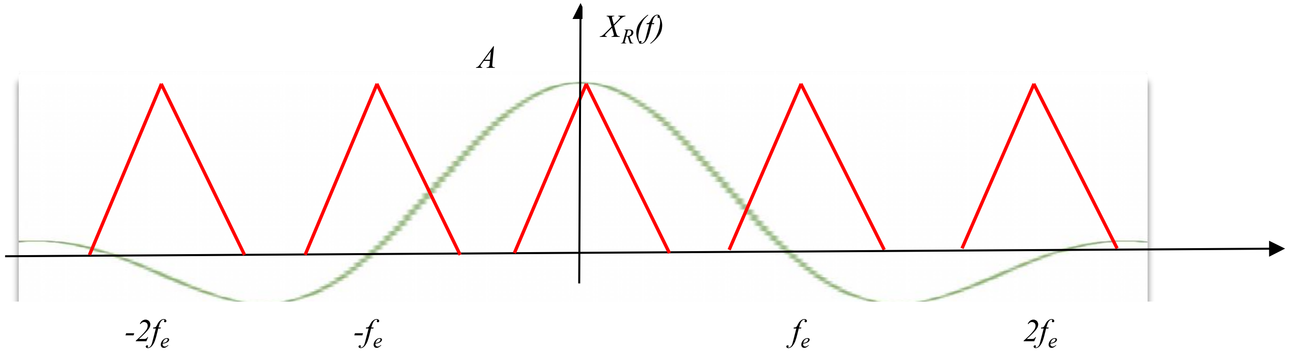
Composantes hautes fréquences sont plus atténuées (sinc au carré)

III. Reconstruction réelle: Bloqueurs d’ordre 0 et 1

Reconstituer pratiquement le signal analogique x(t) à partir de ses échantillons x(nTe) → Reconstitution approximative.

- **Bloqueur d’ordre 1**

Réceptionner les échantillons à la cadence Te. Entre nT_e et $(n+1)T_e$ le signal reconstruit $x_R(t)$ prend la même valeur $x(nT_e)$ → Réponse impulsionnelle h(t) du bloqueur maintient l’unique valeur 1 entre 0 et T_e



$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e)\underset{Te}{\Lambda}(t - nT_e)$$

$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e) * \underset{Te}{\Lambda}(t)$$

$$x_R(t) = x_e(t) * h(t) \quad \text{où} \quad h(t) = \underset{Te}{\Lambda}(t)$$

$$X_R(f) = \sum_n X(f - nf_e)\,.\,sin\,c^2\,(fT_e)$$

Composantes hautes fréquences sont plus atténuées (sinc au carré)

Transformée en Z