

Théorie du Signal

(Support de cours)

Licence 2 : GTR

Faculté d'Informatique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Site perso : <http://perso.usthb.dz/~akourgli/>

e-mails: akourgli@usthb.dz , kourgliassia@gmail.com

FEI, USTHB [kourglassia@gmail.com / <http://perso.usthb.dz/~akourgli/>

Introduction : Généralités sur les Signaux

I. Caractérisation temporelle des signaux et systèmes: énergie, puissance, corrélations, convolution

II. Caractérisation fréquentielle des signaux et systèmes

III. Echantillonnage de signaux continus

IV. Signaux Numériques et TZ

Annexe : Rappels Filtres Analogiques

Travaux Pratiques

1. Analyse temporelle des signaux : énergie, puissance, corrélation, convoluion

2. Analyse fréquentielles des signaux : TFD, DSP

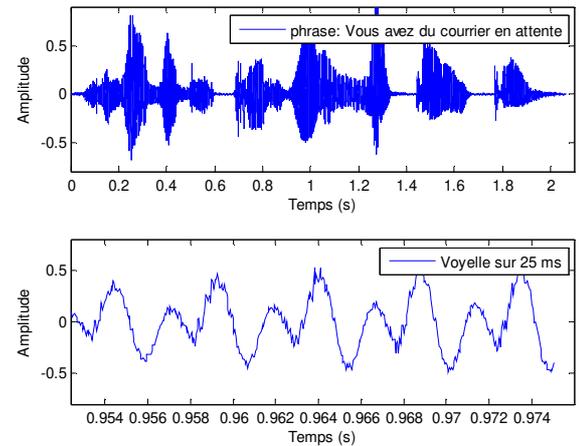
3. Echantillonnage et TZ

Généralités sur les signaux

Un signal est la représentation physique de l'information qu'il transporte de sa source à son destinataire. Il sert de vecteur à une information. Il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Les signaux sont des grandeurs électriques variant en fonction du temps $x(t)$ obtenues à l'aide de capteurs. Sur le plan analytique : Un signal sera une fonction d'une variable réelle, en général le temps.

Exemples :

- Onde acoustique : délivré par un microphone (parole, musique, ...)
- Signaux biologiques : EEG, ECG
- Tension aux bornes composant électronique
- Signaux géophysiques : vibrations sismiques
- Finances : cours du pétrole
- Images, Vidéos



Remarque: Tout signal physique comporte une *composante* aléatoire (perturbation externe, bruit, erreur de mesure, etc ...). **Le bruit** est défini comme tout phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques (interférence, bruit de fond, etc.). La différenciation entre le signal et le bruit est artificielle et dépend de l'intérêt de l'utilisateur : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur des télécommunications par satellites et un signal utile pour les radioastronomes.

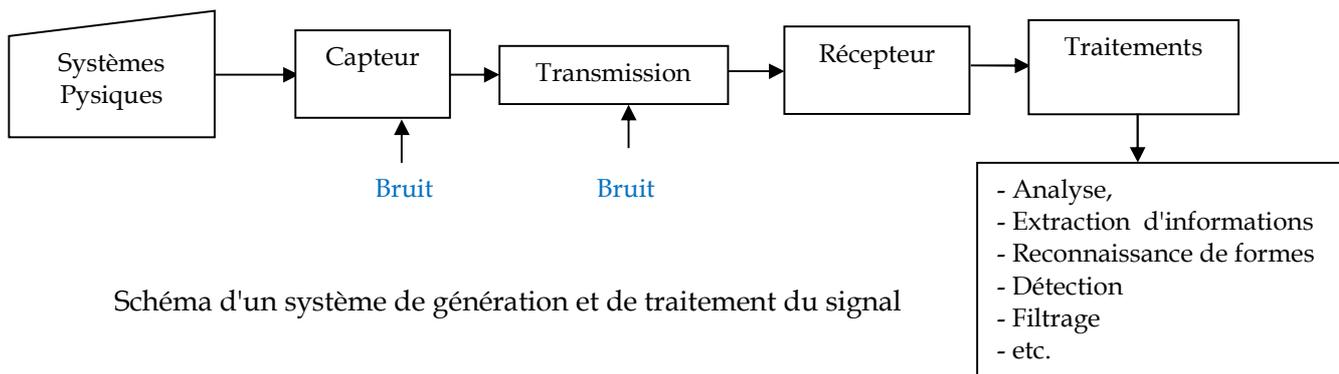


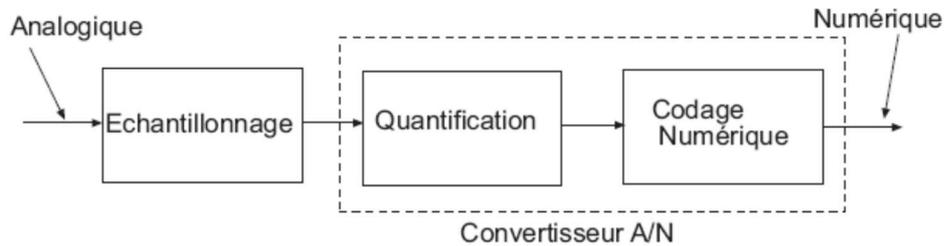
Schéma d'un système de génération et de traitement du signal

Les fonctions du traitement du signal peuvent se diviser en deux catégories : l'élaboration des signaux (incorporation des informations) et l'interprétation des signaux (extraction des informations). Les principales fonctions intégrées dans ces deux parties sont les suivantes [1]:

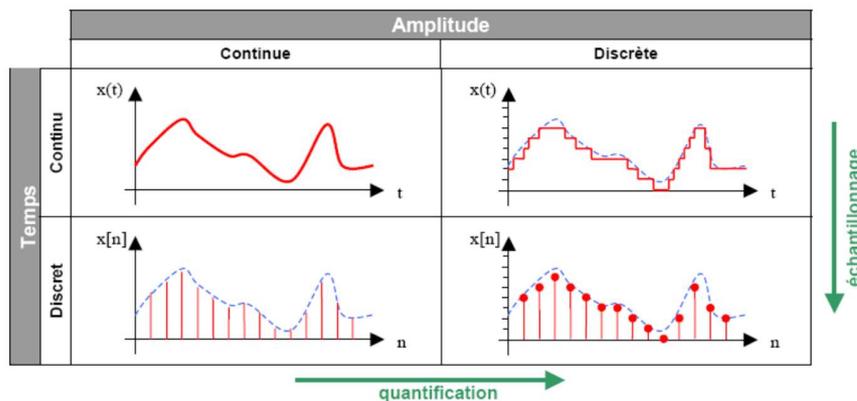
Élaboration des signaux : synthèse, modulation, codage/compression, etc.

Interprétation des signaux : filtrage, détection, identification, analyse, mesure, etc.

La numérisation d'un signal est l'opération qui consiste à faire passer un signal de la représentation dans le domaine des temps et des amplitudes continus au domaine des temps et des amplitudes discrets. Cette opération de numérisation d'un signal peut être décomposée en deux étapes principales : échantillonnage et quantification.



La restitution (ou l'interpolation) constitue le processus inverse qui intervient lors du passage du signal numérique au signal analogique : commande d'un actionneur. Ces trois étapes sont indissociables. En effet, le signal, étant le support physique d'une information, doit conserver au cours de ces modifications tout le contenu informatif initial. Cette condition, ajoutée à la notion de coût limite d'un système, va être à la base de la numérisation des signaux et de l'étude du traitement numérique [1].



Les traitements numériques sont aisément réalisés grâce à des additionneurs, des multiplieurs numériques, et des mémoires. En outre, les systèmes numériques possèdent de nombreux avantages comparés à ceux analogiques, entre autres [2]:

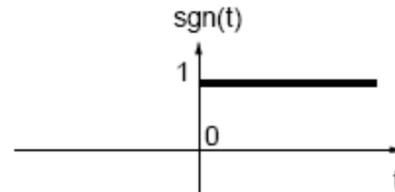
- Simplicité: Les systèmes numériques sont intrinsèquement plus simples à analyser (et donc à synthétiser) que les systèmes analogiques
- Possibilités de traitement accrues: Il est possible de réaliser, en numérique, des opérations beaucoup plus complexes qu'en analogique, notamment des opérations non-linéaires.
- Robustesse aux bruits. Les systèmes numériques sont par essence insensibles aux bruits parasites électromagnétiques.
- Précision et stabilité. Puisque les seuls « bruits » sont liés à la précision des calculs, cette dernière dépend uniquement du calculateur utilisé ; elle est insensible à la température et ne varie pas avec l'âge du système.
- Flexibilité. Dans un grand nombre de systèmes numériques, le traitement est défini par un logiciel chargé en mémoire.

1. Signaux usuels déterministes continus

Rappelons que les signaux déterministes renferment une information dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique (au contraire des signaux aléatoires/stochastiques). Nous présentons dans cette section quelques fonctions mathématiques ainsi que leurs propriétés, supports de signaux élémentaires et utilisées tout au long du cours de traitement du signal.

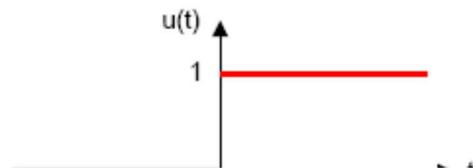
- Fonction signe

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



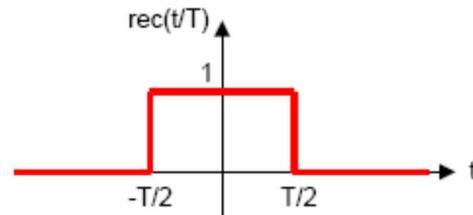
- Fonction échelon (unité)

$$U(t) = \Gamma(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



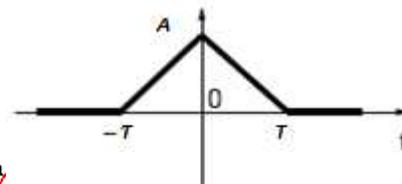
- Fonction porte ou rectangle

$$Rect(t/T) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

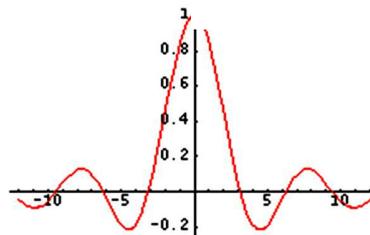


- Fonction triangle

$$A.Tri(t/T) = A\Lambda(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}(T - |t|) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$



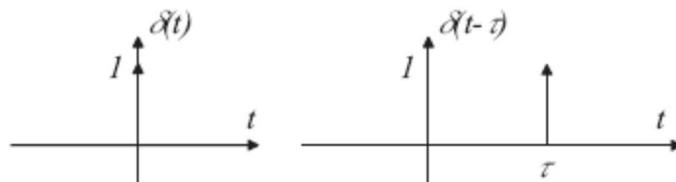
- Fonction sinus cardinal



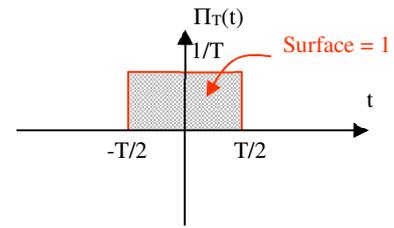
- Fonction Dirac (impulsion unité)

Mathématiquement, c'est une fonction (distribution) définie par :

$$\begin{cases} \forall t \neq t_0 \delta(t - t_0) = 0 \\ t = t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \end{cases}$$



Les propriétés de l'impulsion de Dirac sont identiques à celles d'un signal rectangulaire dont la largeur (T) tend vers 0 et la hauteur (1/T) vers l'infini.



Soit $\bar{x}(t_0, T)$ = la valeur moyenne de $x(t)$ sur $[t_0 - T/2, t_0 + T/2]$ alors :

$$\bar{x}(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Pi_T(t - t_0) dt$$

Alors, $\lim_{T \rightarrow 0} \bar{x}(t_0, T) = x(t_0)$

C'est ainsi, que

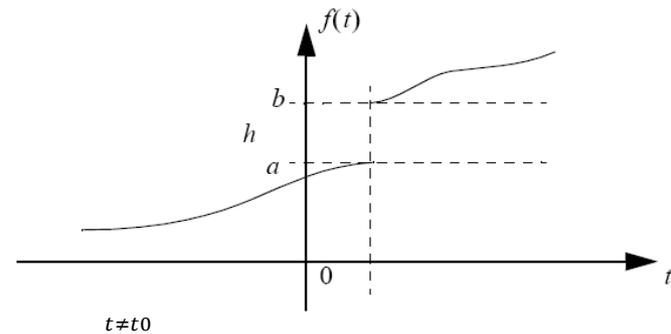
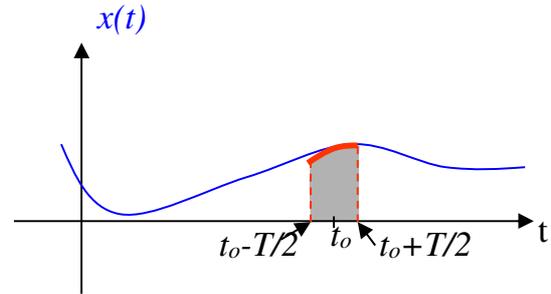
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

- Autres propriétés:

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

- $U(t) = \int_0^{\infty} \delta(t) dt$
- $f(t)$ discontinue en t_0 avec $f(t_0^-) = a$ et $f(t_0^+) = b$ alors



Exercices d'Application

1. Représenter les signaux suivants: $\frac{\Pi}{T}(t - 1)$, $tU(t)$, $(t-2)U(t-3)$, $(-t+3)U(t-2)U(-t+3)$, $e^{-at}U(t-1)$
2. Donner l'expression du signal échelon $U(t)$ en fonction du signal signe $\text{sgn}(t)$.
3. Donner l'expression du signal $x(t) = \text{Arect}[(t-t_0)/T] = A \frac{\Pi}{T}(t - t_0)$ à l'aide du signal signe seulement. Justifier graphiquement la solution trouvée.
4. Donner l'expression du signal rectangulaire $\text{rect}[(t-2)/4]$ en fonction du signal échelon.

Solutions

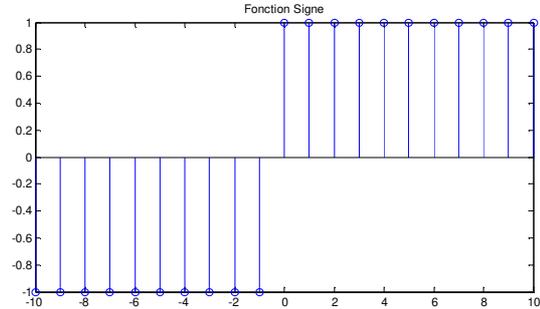
2. $U(t) = 1/2(\text{sgn}(t)+1)$
3. $x(t) = A/2 [\text{sgn}(t-(t_0-T/2)) - \text{sgn}(t-(t_0+T/2))]$
4. $\frac{\Pi}{4}(t - 2) = U(t-4) - U(t) = \frac{\Pi}{4}(t) * \delta(t - 2)$

2. Signaux usuels déterministe discrets

Un signal à temps discret provient souvent de l'échantillonnage (chapitre 3) à la cadence $f_e = 1/T_e$, d'un signal $x(t)$ déterministe à temps continu qui est supposé à bande limitée $(-f_e/2, f_e/2)$. Nous noterons $x(n) = x(nT_e)$.

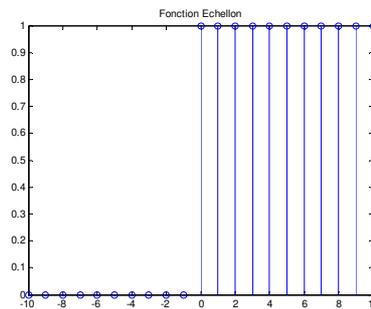
- Fonction signe

$$sgn(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases}$$



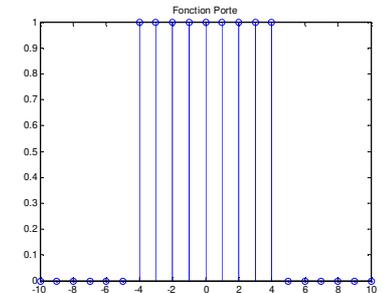
- Fonction échelon (unité)

$$U(n) = \Gamma(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



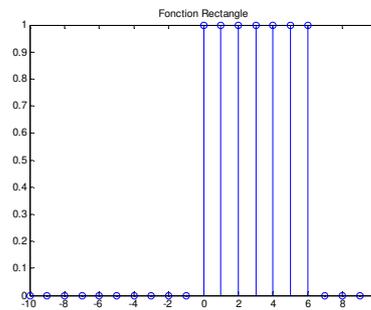
- Fonction porte

$$\Pi_{N+1}(n) = \begin{cases} 1 & -N/2 \leq n \leq N/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



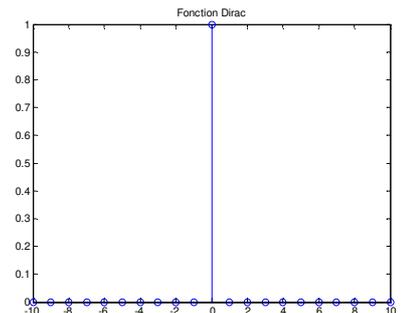
- Fonction rectangle causal

$$rect(n/N) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



- Fonction Dirac (impulsion unité)

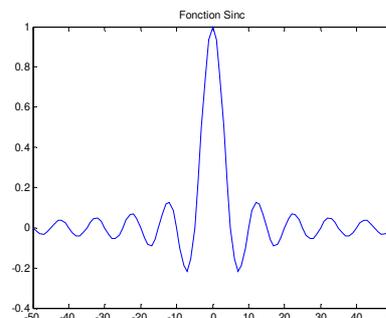
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} = U(n) - U(n - 1)$$



- $x(n), \delta(n-n_0) = x(n_0)$
- $x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0)$

- Fonction sinus cardinal

$$sinc(\theta n) = \frac{\sin(\pi\theta n)}{\pi\theta n}$$



I. Caractérisation temporelle des signaux et systèmes : énergie, puissance, corrélations, SLIT

1. Energie et puissance

Toute transmission d'information s'accompagne de transferts d'énergie. En effet, les signaux continus ou discrets sont essentiellement caractérisés par l'énergie ou la puissance qu'ils véhiculent. Ce sont les seules grandeurs physiques auxquelles sont sensibles les détecteurs. Beaucoup de capteurs physiques mesurent une énergie ou une quantité quadratique. Par exemple, les capteurs optiques mesurent une intensité, les compteurs d'électricité mesurent une énergie, etc. Compte tenu de la définition fondamentale, l'énergie du signal entre les instants t et $t+dt$ est : $|x(t)|^2 dt$ (puissance instantanée multipliée par le temps).

Soit un signal $x(t)$ à temps continu, tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ existe et converge. Alors le signal est dit à énergie finie et la valeur de cette intégrale est appelée énergie du signal :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

En discret : Soit un signal $x(n)$ à temps discret, tel que $\sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$ existe et converge. Alors le signal est dit à énergie finie et la valeur de cette somme est appelée énergie du signal : $E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$

Exemples:

- $x(t) = \text{Rect}(t/T)$ énergie finie. $x(t) = a$ (constante) n'est pas à énergie finie. $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ n'est pas à énergie finie. $\text{Rect}(n/N)$ énergie finie. $x(n) = a$ (constante) et $x(n) = A \sin(2\pi f_0 n)$ ne sont pas à énergie finie

Pour un signal périodique, cette intégrale ne converge pas. On peut néanmoins définir la puissance d'un signal $x(t)$ périodique de période T par :

$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$ *discret : puissance d'un signal $x(n)$ périodique de période N par : $P_x = \frac{1}{N} \sum_{-N/2}^{N/2-1} |x(n)|^2$*

Dans le cas général, on parle de signaux à puissance moyenne finie définie par:

$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt,$ *Discret Signaux à puissance moyenne finie : $P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{-N/2}^{N/2-1} |x(n)|^2$*

Exemples:

- signal continu $x(t)=a$, signal sinusoïdal $A \sin(2\pi f_0 t)$, signaux périodiques, échelon unité, peigne de Dirac

Il existe des signaux ni périodiques, ni d'énergie finie, pour lesquels la puissance ne peut être définie, comme par exemple la rampe $x(t)=t$. Il s'agit là de définitions mathématiques, en pratique, un signal mesuré ne l'est jamais sur un intervalle de temps infini. On peut commencer à visualiser un signal à un instant qu'on prendra comme origine des temps, et dans ce cas on arrêtera son examen au bout d'un temps T_{obs} :

$$E_x = \int_0^{T_{obs}} |x(t)|^2 dt \qquad \text{En discret} \qquad E_x = \sum_{n=0}^{N_{obs}} |x(n)|^2$$

Remarques

Signal à énergie finie \Rightarrow puissance nulle Signal à puissance finie \Rightarrow énergie infinie

Le calcul de l'énergie ou la puissance permet d'obtenir une première caractérisation du signal. Par ailleurs, la théorie du signal a largement développé des méthodes d'étude basées sur la corrélation pour caractériser le comportement temporel du signal.

Exercice d'application : Calculer l'énergie et la puissance des signaux : $\Pi_T(t)$, $A \cos(2\pi f_0 t)$.

2. Corrélation et auto-corrélation

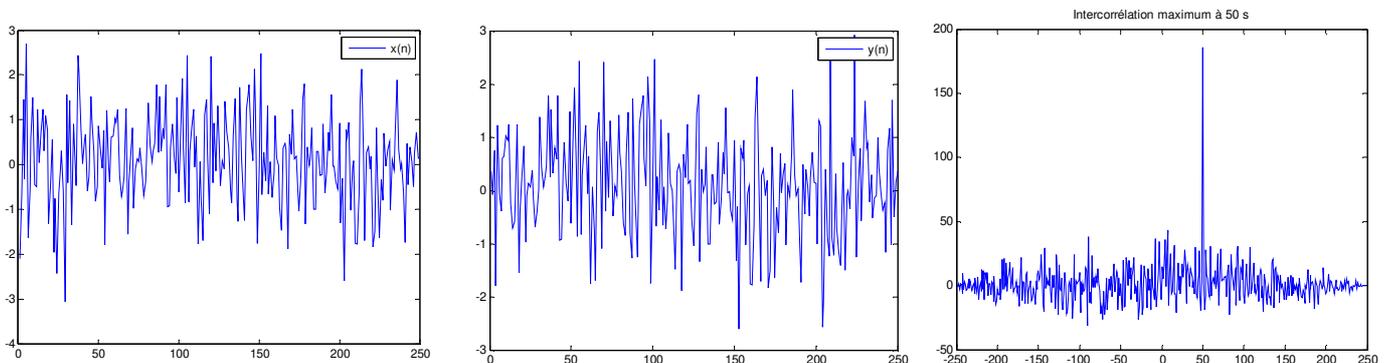
La fonction de corrélation permet de mesurer le degré de ressemblance entre deux signaux en fonction d'un décalage. Considérons $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux d'énergie finie, la fonction d'intercorrélation $R_{x,y}(\tau)$ est définie par:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt \qquad R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n - k)$$

L'intercorrélation entre $x(t)$ et $y(t)$ atteint un maximum pour un retard τ si $x(t)=y(t-\tau)$.

L'inter-corrélation entre $x(n)$ et $y(n)$ atteint un maximum pour un retard k si $x(n)=y(n-k)$

Exemple: Soient un signal aléatoire et sa version décalée de 50s. On remarque que les signaux se ressemblent le plus quand $y(t)$ est décalé de 50 secondes.



Pour des signaux à puissance moyenne finie, elle vaut :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y^*(t - \tau)dt$$

En discret $R_{xy}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n) y^*(n - k)$

Pour l'autocorrélation, on remplace y(t) par x(t) on obtient l'expression de l'autocorrélation pour les signaux à énergie finie:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

En discret $R_{xx}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n - k)$

L'autocorrélation permet de détecter des régularités, des profils répétés dans un signal comme un signal périodique perturbé par beaucoup de bruit (Voir TP n°1)

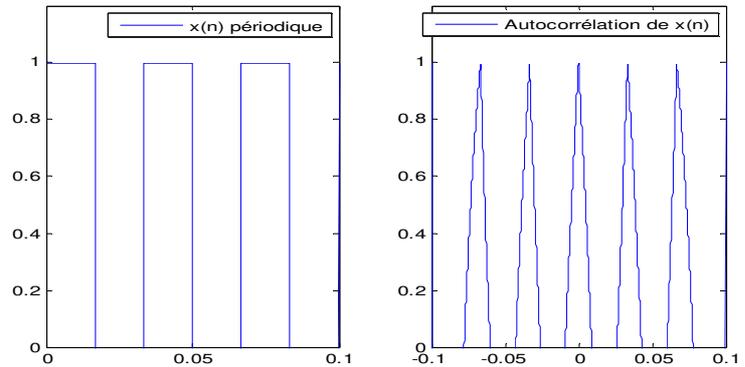
Propriétés :

- Pour $\tau = 0$, on retrouve l'énergie du signal $R_{xx}(0) = E_x$. ($k = 0, R_x(0) = E_x$)
- Si $x(t)$ est réel, l'autocorrélation est réelle ($x(k)$ réelle $\rightarrow R_{xx}(k)$ réelle)
- $R_{xx}(\tau)$ est maximale en $\tau=0$. Rien ne ressemble plus au signal que lui-même ($R_{xx}(k)$ maximale en $k=0$)

Autocorrélation des signaux périodiques : Le calcul sur une seule période suffit. L'autocorrélation d'un signal périodique est elle même périodique. Par définition, le signal périodique ressemble parfaitement à lui même, décalé d'une ou plusieurs périodes.

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x^*(t - \tau)dt$$

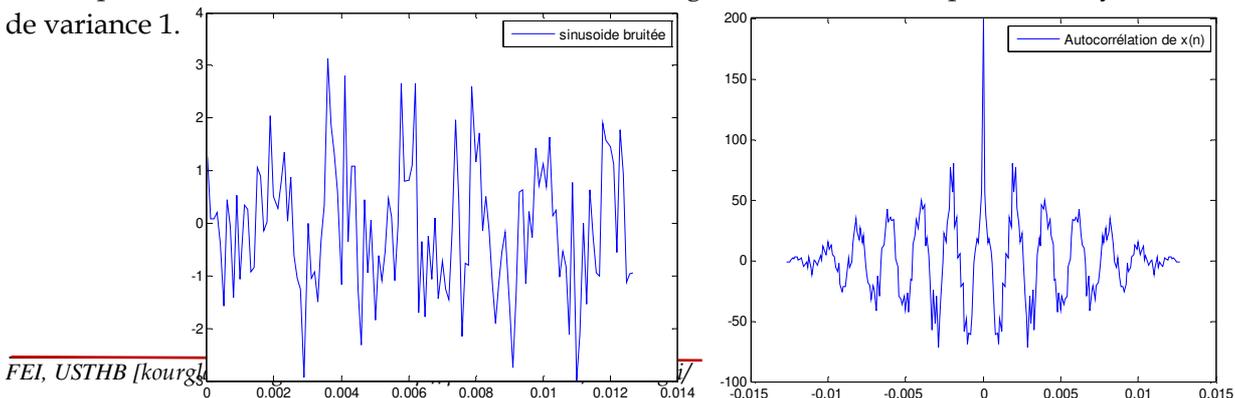
$$R_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-n} x(n) x^*(n - k)$$



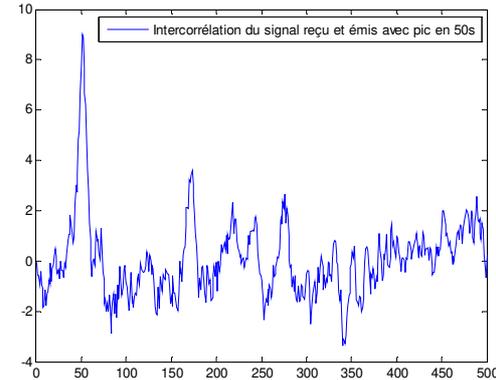
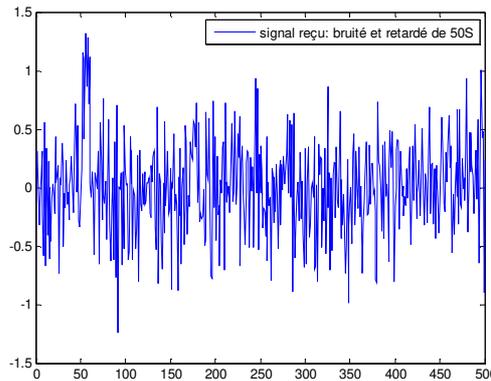
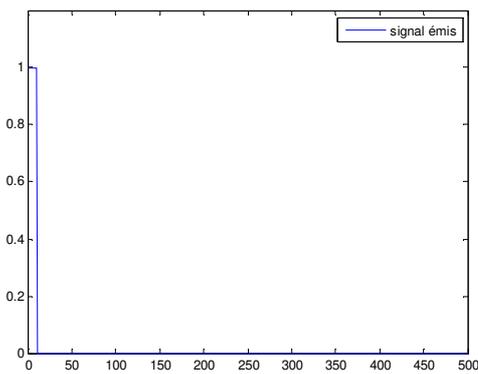
Exercice Soit le signal $x(n)=(n+1)$ pour $n=0$ à 3. Calculer l'auto-corrélation de x et déduire son énergie

Exemples d'application : Extraction d'un signal noyé dans du bruit, mesure d'un temps ou retard, détection d'un signal périodique(Voir TP n° 1).

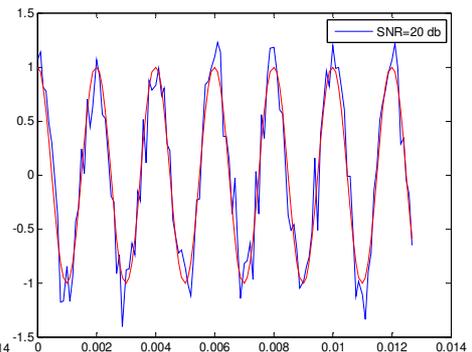
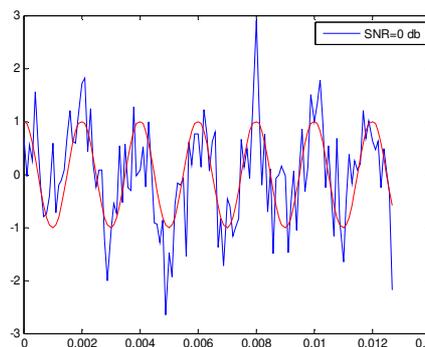
L'exemple ci-dessous illustre l'auto-corrélation d'un signal sinusoïdal d'amplitude 1 noyé dans du bruit Gaussien de variance 1.



La corrélation est largement utilisée dans les systèmes radar. Ainsi, pour détecter un avion, on envoie une impulsion, puis on reçoit une version retardée, atténuée et bruitée de cette impulsion. L'intercorrélation du signal reçu et émis présentera un pic à l'instant correspondant au retard.

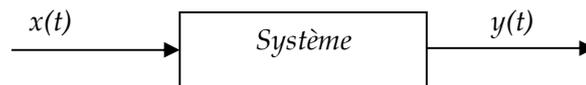


Remarques : La notion de bruit est relative, elle dépend du contexte. Le rapport signal/bruit désigne la qualité de la transmission d'une information par rapport aux parasites. Il est défini par:
 $SNR_{db} = 20 \text{ Log}(P_S/P_B)$



3. Théorie des systèmes linéaires et invariants continus ou discrets (SLIT ou SLID)

Un système linéaire est un modèle de système qui applique un opérateur linéaire à un signal d'entrée. C'est une abstraction mathématique très utile en automatique, traitement du signal, mécanique et télécommunications. Les systèmes linéaires sont ainsi fréquemment utilisés pour décrire un système non linéaire en ignorant les petites non-linéarités.

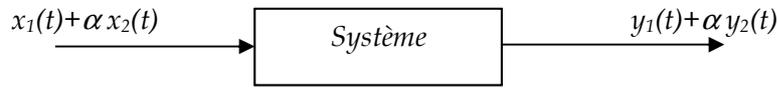


Un système est *discret*, si à la suite d'entrée discrète $x(n)$ correspond une suite de sortie discrète $y(n)$.

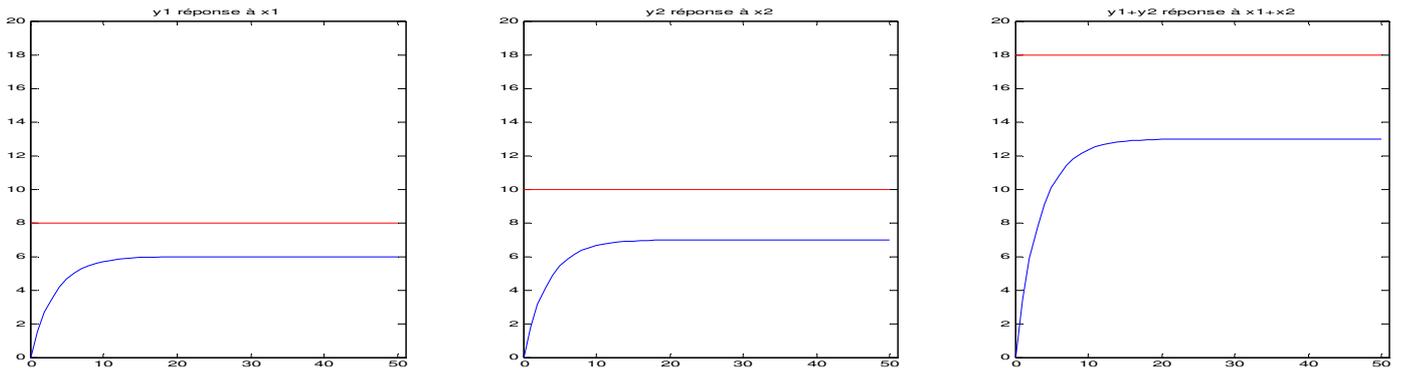


- Linéarité : si l'entrée $x(t)$ produit une sortie $y(t)$, quand on applique une entrée $kx(t)$, la sortie sera $k y(t)$. Si deux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ engendrent deux sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$ alors $x_1(t) + x_2(t)$ engendrera $y_1(t) + y_2(t)$ (linéarité).

- En discret : Si l'entrée $x(n) \rightarrow y(n)$, alors $k.x(n) \rightarrow k.y(n)$. Si $x_1(n) + x_2(n) \rightarrow y_1(n) + y_2(n)$

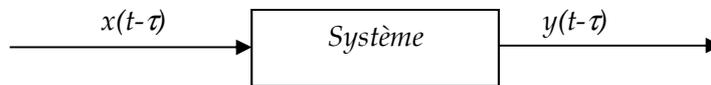


Exemple



Invariance : Il y a invariance dans le temps, une translation de l'entrée ($x(t) \Rightarrow x(t-\tau)$) se traduira par une même translation dans le temps de la sortie ($y(t) \Rightarrow y(t-\tau)$).

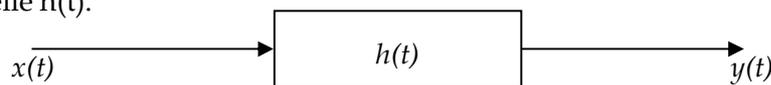
- En discret : si ($x(n) \Rightarrow x(n-m) \rightarrow y(n) \Rightarrow y(n-m)$).



Si le système est invariant, cela implique que le système réagit de la même façon quel que soit l'instant auquel nous appliquons ses excitations. Cette propriété exprime que la caractéristique du système ne dépend pas de l'origine du temps, on parle encore de stationnarité.

Convolution

Si les hypothèses de linéarité et d'invariance temporelle sont vérifiées, on peut caractériser le système par sa réponse impulsionnelle $h(t)$.



On peut en déduire l'effet d'une entrée quelconque sous la forme d'une convolution. Cette dernière est l'opération de traitement de signal la plus fondamentale. Elle indique que la valeur du signal de sortie à l'instant n est obtenue par la sommation (intégrale) pondérée des valeurs passées du signal d'excitation $x(n)$. La fonction de pondération est précisément la réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int x(t - \tau)h(\tau)d\tau \qquad y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n - m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n - m)$$

La réponse impulsionnelle $h(t)$ est le signal qu'on obtient en sortie $y(t)=h(t)$ si on applique en entrée une impulsion "de Dirac" $x(t)=\delta(t)$. Le Dirac est l'élément neutre de l'opération de convolution:

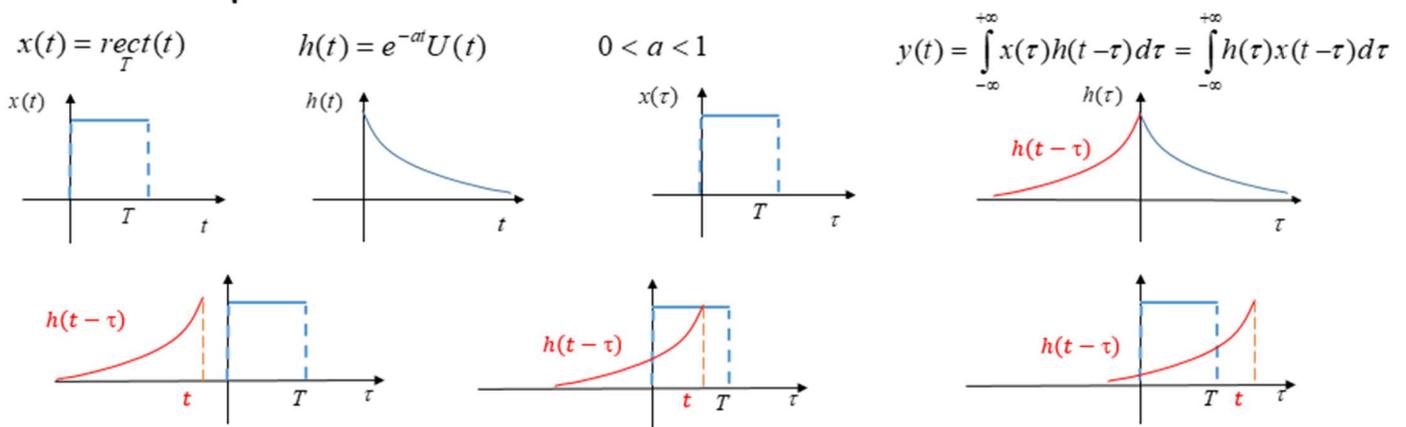
$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$\delta(n) * x(n) = x(n)$$

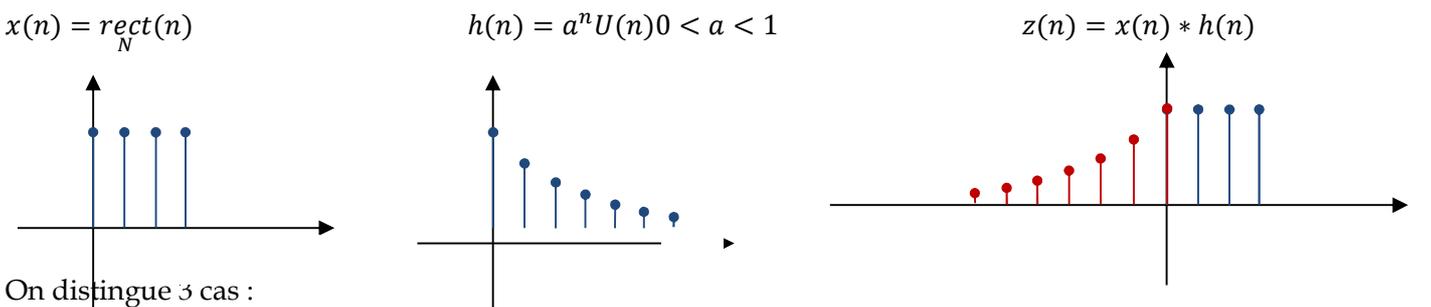
Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la surface du produit $x(\tau)h(t-\tau)$. Le signal $h(t-\tau)$ est simplement le signal initial $h(\tau)$, retourné dans le temps pour donner $h(-\tau)$ puis translaté de t . En calculant alors l'ensemble des surfaces obtenues en faisant « glisser » h , c'est-à-dire pour tous les décalages de t , on obtient le produit de convolution pour tout t .

Exemple 1: Soit le signal échelon $f(t)= E_0 U(t)$, d'amplitude E_0 . Représenter graphiquement et calculer le produit de convolution de $f(t)$ par lui-même (autoconvolution).--> $f(t)*f(t)= E_0^2.t$ pour $t \geq 0$ et 0 ailleurs

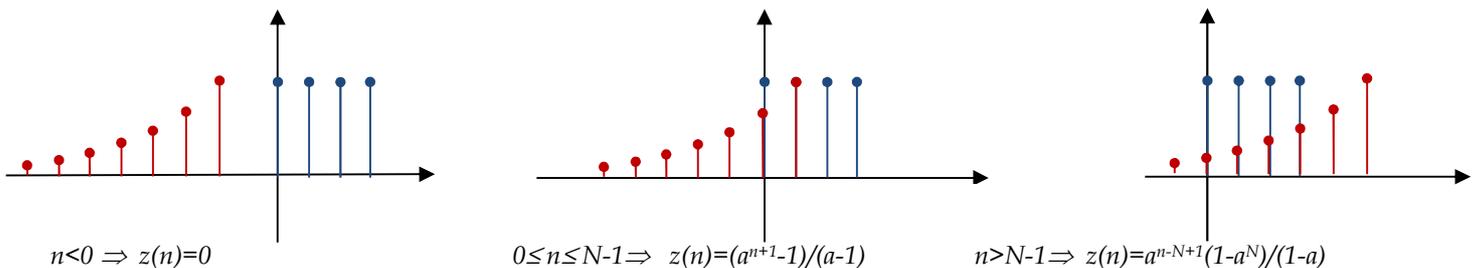
Exemple2 :



Exemple 2: (en discret)



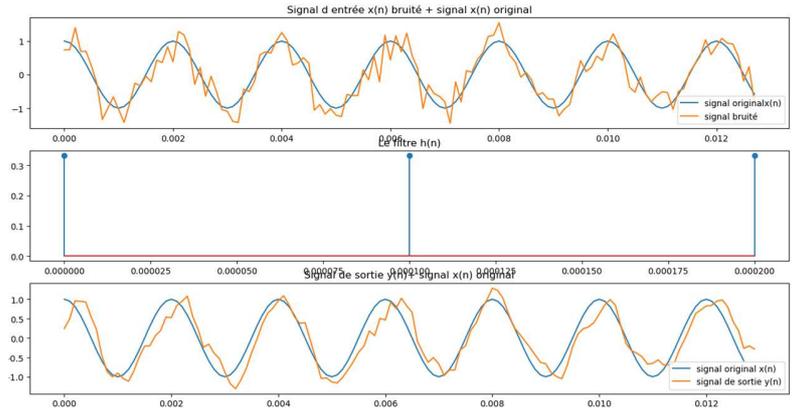
On distingue 3 cas :



Exemple 3 :

$$h(t) = \frac{1}{T} \Pi(t) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \text{ (Voir TP n°1)}$$

$$h(n) = \frac{1}{N+1} \Pi_{N+1}(n) \Rightarrow y(n) = \frac{1}{N+1} \sum_{m=-N/2}^{N/2} x(n+m)$$



Exemple 4

$$x(n) = \{2, -1, 3\} \text{ et } h(n) = \{1, 2, 2, 3\}$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$y(n) = \{2, 3, 5, 10, 3, 9\}$$

$h[n]$	=	1	2	2	3			
$x[n]$	=	2	-1	3				
		2	4	4	6			
			-1	-2	-2	-3		
				3	6	6	9	
		2	3	5	10	3	9	

Remarques:

Un système linéaire invariant est un système dont le comportement dans le temps, peut-être décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants:

$$\sum_{i=0}^M a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^N b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

- En discret, un système linéaire invariant est un système dont le comportement dans le temps, peut-être décrit par une équation aux différences : $\sum_{i=0}^M a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i)$

- Les opérations de corrélation et convolution sont liées. Mathématiquement, on peut écrire une relation qui permet d'exprimer la fonction de corrélation comme un produit de convolution (et réciproquement).

En effet:
$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) * y(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t') * y(\tau - t') dt' = x * (-t) * y(t) \quad R_{xy}(k) = x(n) * y^*(-n)$$

On peut donc considérer l'opération d'un SLI comme une mesure de la corrélation entre deux signaux ($x^*(-n)$ et $h(n)$). En fait, le signal de sortie est "construit" à partir des composantes fréquentielles communes au signal d'entrée et à la réponse impulsionnelle.

- Si on applique à un SLIT une entrée sinusoïdale réelle ou complexe de fréquence f_0 , alors, la sortie sera une sinusoïde dont l'amplitude et la phase pourront être modifiées mais qui conservera la même forme (une sinusoïde) et la même fréquence f_0 . On dit que les sinusoïdes sont les fonctions propres des SLIT.

Stabilité et causalité d'un SLI

Une contrainte importante pour la formalisation de nombreux problèmes est de respecter la notion de causalité (les effets ne peuvent pas précéder la cause). Dans le cas des SLIT, cette causalité se traduit par le fait que pour: $x(t) = 0, t < t_0$ alors $y(t) = 0, t < t_0$

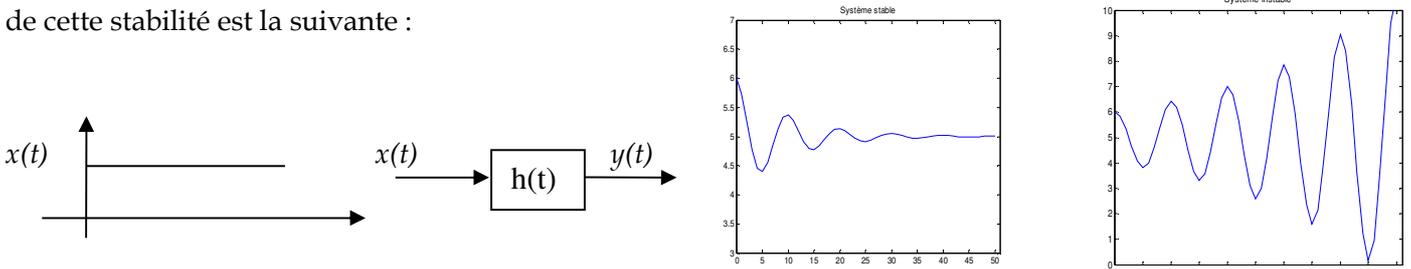
$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} x(t - \tau)h(\tau) d\tau \Rightarrow h(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

$$x(n) = 0, n < n_0 \text{ alors } y(n) = 0, n < n_0$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n - m) = \sum_{m=0}^{+\infty} x(n - m)h(m) \quad h(n) = 0 \text{ pour } n < 0,.$$

Remarque : Nous pouvons envisager mémoriser les signaux d'entrée et faire un traitement de ceux-ci en temps différé, les systèmes utilisés ne sont plus alors nécessairement causaux. C'est souvent le cas en traitement d'image, en traitement de parole effectué après mémorisation du signal à traiter.

Une autre notion fondamentale est la *stabilité* des systèmes. La propriété de stabilité des systèmes bouclés est non seulement une performance mais une exigence pour le bon fonctionnement d'une boucle d'asservissement ou de régulation. Une boucle instable est une boucle inutilisable. La définition la plus courante de cette stabilité est la suivante :



On dit qu'un système est stable si, en lui appliquant une entrée bornée quelconque, la sortie reste bornée, ce qui implique dans le cas des SLIT:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < M$$

$$\sum_n |h(n)| < \infty$$

Série 1

1. Représenter les signaux suivants pour les cas continus et discrets

$$\frac{\Pi}{N}(n-1), n.U(n), (n-2).U(n-3), (-n+3)U(n-2)U(-n+3), e^{-an}.U(n-1)$$

2. Donner l'expression du signal échelon U(n) en fonction du signal signe Sgn(n).

3. Les signaux suivants sont-ils à énergie finie, à puissance moyenne finie, ou ni l'un, ni l'autre ? Calculer, alors, dans chaque cas l'énergie totale et la puissance moyenne totale (a>0).

- Arect(t/T) A sin(2πf₀t) A sin(2πf₀t).U(t) U(t)
- t.U(t) Ae^{-at}U(t) Ae^{-at} Atri(t/T)

4. Calculer l'autocorrélation des signaux suivants :

- Arect(t/T) A sin(2πf₀t) 5 δ_T(t) B cos(2πf₀t)

5. Calculer la sortie y(t) lorsque : x(t) = δ(t-t₀) + δ(t-t₁) et h(t) = e^{-at}

6. Soient
- $$x_1(t) = e^{-a.t}.U(t)$$
- $$x_2(t) = e^{-b.t}.U(t)$$

Calculer x₁(t) * x₂(t) avec (a, b) ∈ ℝ⁺ et a > b

7. La fonction triangulaire est définie de la manière suivante:

$$E^2 T \Lambda_T(t) = \begin{cases} E^2(t+T) & -T < t < 0 \\ -E^2(t-T) & 0 < t < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Vérifier analytiquement et graphiquement la relation E²T.Λ_T(t) = E.Π_T(t) * E.Π_T(t), en déduire l'autocorrélation du signal et son énergie.

8. Soit le signal x(n)=e^{-an} U(n) transmis à travers le système h(n) dont la réponse impulsionnelle est h(n) est donnée par h(0)=h(1)=h(2)=1/3.

- Calculer l'énergie et la puissance du signal d'entrée
- Calculer et tracer l'autocorrélation de h(n)
- Déterminer le signal y(n) résultant de la convolution numérique x(n)*h(n).

Solutions

2. U(n)=1/2(sgn(n)+1)

3. E=A².T P_m=0, E=∞ P_m=A²/2, E=∞ P_m=A²/4, E=∞ P_m=1/2
 E=∞ P_m=∞, E=A²/2a P_m=0 , E=∞ P_m=∞, E=2A²T/3 P_m=0

4. A²T.Λ_T(τ) A²/2.cos(2πf₀τ) 25 δ_T(t) B²/2.cos(2πf₀τ)

5. x(t) = e^{-a(t-t₀)} + e^{-a(t-t₁)} 6. x(t) = $\begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{e^{-bt}}{b-a} [e^{(b-a)t} - 1] & t > 0 \end{cases}$

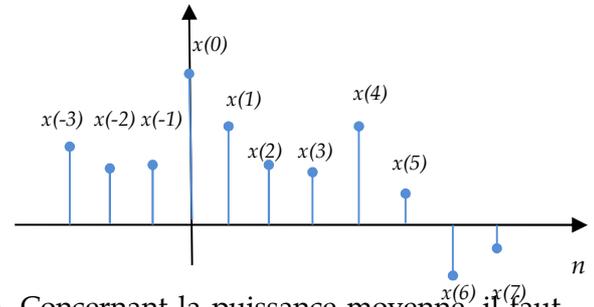
7. R_x(τ) = x(τ) * x(-τ) = Λ_T(τ) ⇒ E = R_x(0) = E²T

8. Devoir à rendre

**TP n°1 : Caractérisation temporelle des Signaux et Systèmes (sous Matlab)
Energie, Puissance, Corrélation et Convolution**

I. Rappels

Un signal discret $s(n)$ est une suite de N échantillons régulièrement espacés de T_e secondes: $x(0), x(T_e), x(2T_e), \dots, x((N-1)T_e)$ où $F_e = 1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage. Le tracé graphique d'un signal discrétisé en temps peut s'effectuer simplement à l'aide de la fonction `stem` sous matlab.



- L'énergie d'un signal $x(n)$ est fournie sous matlab par **sum(x.^2)**. Concernant la puissance moyenne, il faut diviser l'énergie par le nombre d'éléments de $x(n)$.
- Pour la corrélation et la convolution, on utilisera, respectivement, les fonctions **xcorr** et **conv**. A noter que la convolution ou la corrélation de x et h de durée respective N et M est un signal $y(n)$ de durée $(N+M-1)$
- La fonction **b=m+ s*randn(N,1)** permet de générer un vecteur bruit b de distribution pseudo normale (Gaussienne) de taille N de moyenne m et de variance s^2 dont la puissance est $P_s = m^2 + s^2$.

II. Exemples à tester avant le TP

1. Le programme suivant permet de générer un Dirac en 0 : $\delta(n) = 1$ pour $n=0$ et vaut 0 ailleurs

```
clc ; clear all ; close all ;
t=-10:10;
x=[zeros(1,10),1,zeros(1,10)];
stem(t,x);
axis([-10 10 -0.5 1.5]);
title('Dirac');
xlabel('n');ylabel('Amplitude');
```

2. Le programme suivant permet de générer un échelon $U(n)=1$ pour $n \geq 0$ et 0 pour $n < 0$

```
clc ; clear all ; close all ;
t=-20:20;
x=[zeros(1,20),ones(1,21)];
stem(t,x);
title('Echelon unite');
xlabel('n');ylabel('Amplitude');
```

3. Pour générer $N=128$ échantillons d'une sinusoïde de fréquence $f_0=1000$, on peut procéder de la façon suivante, choisir une fréquence d'échantillonnage : $F_e = 8000$ (le pas de temps $T_e=1/F_e$) Créer le vecteur des temps : $t = (0:N-1)T_e$. Calculer les échantillons: $x = \cos(2*\pi*t*f_0)$; Puis, regarder le résultat : `plot(x)` ou `plot(t,x)`.

Ce qui nous donne :

```
clc ; clear all ; close all ;
N=128; fo=1000; Fe=8000; Te=1/Fe;
t=(0:N-1)*Te; x=cos(2*pi*fo*t);
plot(t,x);
figure; plot(x);
figure; stem(t,x);
```

III. Programmes à réaliser

1. Le programme suivant permet de créer une porte de largeur 2s, centrée en 3 s, d'amplitude 4, échantillonnée avec $T_e=0.1s$ avec $N=50$ et de calculer son auto-corrélation et son énergie.

```
clc;clear all; close all;
Te=0.1; N=50; A=4;
t=(0:1:N-1)*Te;
porte=A*[zeros(1,15),ones(1,20),zeros(1,15)];
subplot(2,2,1);plot(t,porte);
subplot(2,2,2);stem(t,porte);
y1= xcorr(porte); tt=(-N+1:1:N-1)*Te;
subplot(2,2,3);plot(tt,y1);
Energie1=sum(porte.^2)
```

- Quelle est la différence entre $\text{plot}(x)$ et $\text{plot}(t,x)$?
- Quelle est la différence entre plot et stem ?
- Utiliser le workspace pour visualiser la taille et le contenu des vecteurs t , tt , porte et y . Commenter
- Calculer l'auto-corrélation théorique et comparer avec $y1$.
- Retrouve-t-on les propriétés de l'auto-corrélation?
- Calculer l'énergie théorique et comparer avec Energie 1

2. Commenter le programme suivant :

```
Clear all; close all; clc;
N=500; x=zeros(N,1);x(1:10)=1;
figure; plot(x);axis([0 N 0 1.2]);legend('signal émis');
y=circshift(x,50);
y=y+0.4*randn(N,1);
figure; plot(y);legend('signal reçu: bruité et retardé de 50s');
z=xcorr(y,x);z=z(N:end);
figure; plot(z);
```

- Induire un autre retard et observer.
- Changer la puissance du bruit et commenter.
- Donner un exemple d'application de ce programme.

3. Soit le programme ci-dessous

```
clearall; close all; clc;
N=300; T=3;Te=1;
X=rand(N,1); t_x=(0:N-1)*Te;
h=(1/T)*ones(T,1);t_h=(0:T-1)*Te;
subplot(3,1,1); plot(t_x,X); subplot(3,1,2); stem(t_h,h,'r');
Y=conv(X,h); t_y=(1-T:N-1)*Te;
subplot(3,1,3); plot(t_y,Y); axis([0 N min(Y) max(Y)]);
```

- Commenter le programme. Changer la valeur de T et observer.
- Comment nomme-t-on le signal h? Quel est son rôle?

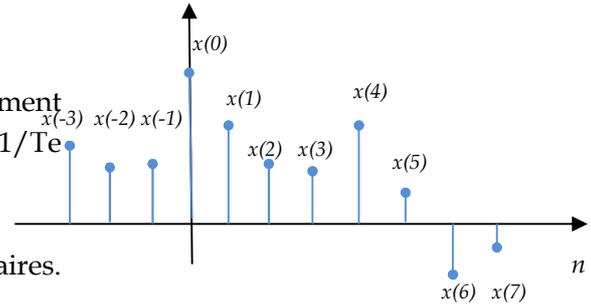
4. Générer et visualiser le signal x composé de 50 échantillons d'une sinusoïde de fréquence $f_0 = 0.1$ avec $f_e = 10.f_0$

- Calculer et afficher son auto-corrélation et comparer avec l'auto-corrélation théorique.
- Retrouver les caractéristiques du signal (puissance et fréquence) à partir de l'auto-corrélation.
- Générer le signal $z=x+b$ ou b est un bruit avec ($m=0$, $s=0.5$). Calculer l'auto-corrélation du bruit et commenter.
- Calculer et visualiser l'auto-corrélation de z pour $s=0.5$, $s=1$ puis $s=2$ en commentant.
- Retrouver dans chacun des cas précédents la fréquence du signal à partir de l'auto-corrélation de z .

**TP n°1 : Caractérisation temporelle des Signaux et Systèmes (sous Python)
Energie, Puissance, Corrélation et Convolution**

I. Rappels

Un signal discret $s(n)$ est une suite de N échantillons régulièrement espacés de T_e secondes: $x(0), x(T_e), x(2T_e), \dots, x((N-1)T_e)$ où $F_e = 1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage.



Au début du programme python, importer les bibliothèques nécessaires.
Pour alléger l'écriture leur donner un nom plus court:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

NumPy est une bibliothèque destinée à manipuler des matrices ou tableaux multidimensionnels ainsi que des fonctions mathématiques opérant sur ces tableaux.

SciPy regroupe un ensemble de bibliothèques Python à usage scientifique avec un environnement très similaire à Matlab. Elle comporte des modules pour l'optimisation, l'algèbre linéaire, les statistiques, le traitement du signal ou encore le traitement d'images. **Scipy** utilise les tableaux et matrices du module **NumPy**.

II. Exemples à tester avant le TP

1. Le programme suivant permet de générer un Dirac en 0 : $\delta(n) = 1$ pour $n=0$ et vaut 0 ailleurs

```
N=32;
x = np.zeros(N);
x[0]=1;
plt.figure(1)
plt.stem(x)
plt.title('Un Dirac'); plt.grid(True); plt.xlabel('n'); plt.ylabel('Amplitude')
```

2. Rajouter les lignes suivante pour générer un échelon $U(n)=1$ pour $n \geq 0$ et 0 pour $n < 0$

```
x=np.zeros(N); y = np.ones(N); z=np.concatenate((x,y));
t=np.arange(-N,N,1)
plt.figure(2)
plt.stem(t,z)
plt.title('Un Echelon'); plt.grid(True); plt.xlabel('n'); plt.ylabel('Amplitude')
```

3. Générer une sinusoïde de fréquence $f_0=1000$ et une fréquence d'échantillonnage : $F_e = 1200$ ($T_e=1/F_e$)

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
N = 128; f0=1000; fe=1200.; Te=1/fe
t = np.arange(0,N,1)*Te
x = np.cos(2.0*np.pi*f0*t)
plt.figure(3)
plt.subplot(211); plt.plot(t,x); plt.xlabel('s'); plt.ylabel('Amplitude')
plt.subplot(212); plt.stem(t, x); plt.xlabel('(s)'); plt.ylabel('Amplitude')
```

4. Générer une réalisation d'un processus aléatoire

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
N=1000; sigma =2; Moy=0
b = Moy+ sigma * np.random.randn(N)
plt.figure(4)
plt.plot(b); plt.title(label='Réalisation d un processus aléatoire moy %d et
var%d'%(Moy, pow(sigma, 2)));
```

III. Programmes à réaliser

1. Le programme suivant permet de créer une porte de largeur 10s, d'amplitude 4 et de calculer son auto-corrélation et son énergie.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
N = 30; A=4; Te=1;
t = np.arange(0,N)*Te
x = A*np.concatenate((np.zeros(10),np.ones(10),np.zeros(10)))
plt.figure(5)
plt.subplot(121); plt.stem(t, x); plt.grid(True); plt.xlabel('S'); plt.ylabel('Amp')
tt = np.arange(-(N-1),N)*Te
Rxx = np.correlate(x,x,mode='full');
plt.subplot(122); plt.title('Autocorr');plt.plot(tt,Rxx); plt.grid(True); plt.xlabel('S');
plt.ylabel('Amp')
Energie=sum(abs(x)**2)
```

- Quelle est la différence entre `plt.plot(x)` et `plt.plot(t,x)`? et la différence entre `plt.plot` et `plt.stem`?
- Utiliser l'explorateur de variables pour visualiser la taille et le contenu des vecteurs `t`, `tt`, `x` et `Rxx`.
- Calculer l'auto-corrélation théorique et comparer avec `Rxx`.
- Retrouve-t-on les propriétés de l'auto-corrélation?
- Calculer l'énergie théorique et comparer avec `Energie`.

2. Commenter le programme suivant :

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
N = 500; sigma = 0.8 ; moy = 0;
x = np.zeros(N); x[0:10]=1;
b = sigma * np.random.randn(N) + moy ;
y = np.roll(x, 50)+ b
Ryx = np.correlate(y,x,mode='full');Ryx=Ryx[N-1:2*N-1]
plt.figure(6)
plt.subplot(311); plt.plot(x); plt.title('signal émis')
plt.subplot(312); plt.plot(y); plt.title('signal reçu')
plt.subplot(313); plt.plot(Ryx); plt.title('Intercorrélation entre signal émis et signal reçu')
TAR_estim=np.argmax(Ryx);
```

- Induire un autre retard et observer.
- Changer la puissance du bruit et commenter.
- Donner un exemple d'application de ce programme.

3. Soit le programme ci-dessous

```
import numpy as np;import matplotlib.pyplot as plt
N = 128; f0=500; fe=10000.; Te=1/fe; T=3;
t = np.arange(0,N)*Te
x = np.cos(2.0*np.pi*f0*t);
sigma = 0.3; Moy=0 ;
b = Moy + sigma * np.random.randn(N) ;
xb = x + b
h = 1.0/T*np.ones(T)
y = np.convolve(xb, h, mode='full')
th = np.arange(0,T)*Te ; ty = np.arange(0,N+T-1)*Te
plt.figure(7)
plt.subplot(311); plt.plot(t,x, label='signal originalx(n)');plt.plot(t,xb,label='signal bruité ');
plt.legend(); plt.title('Signal d entrée x(n) bruité + signal x(n) original')
plt.subplot(312); plt.stem(th, h); plt.title('Le filtre h(n)')
plt.subplot(313); plt.plot(t,x, label='signal original x(n)');
plt.plot(ty,y,label='signal de sortie y(n)');
plt.legend(); plt.title('Signal de sortie y(n)+ signal x(n) original')
```

- Commenter le programme. Changer la valeur de T et observer.
- Comment nomme-t-on le signal h? Quel est son rôle?

4. Générer et visualiser le signal x composé de 64 échantillons d'une sinusoïde de fréquence $f_0 = 0.1$ avec $f_e = 20.f_0$
- Calculer et afficher son auto-corrélation et comparer avec l'auto-corrélation théorique.
 - Retrouver les caractéristiques du signal (puissance et fréquence) à partir de l'auto-corrélation.
 - Générer le signal $z = x + b$ où b est un bruit avec (moy=0, sigma=0.5). Calculer l'auto-corrélation du bruit et commenter. Calculer et visualiser l'auto-corrélation de z pour sigma=0.5, puis 1 puis 2 en commentant.
 - Retrouver dans chacun des cas précédents la fréquence du signal à partir de l'auto-corrélation de z .

II. Caractérisation fréquentielle des signaux et systèmes

La représentation temporelle peut être suffisante dans tous les cas où la forme du signal et la nature du traitement restent simples. Dans la réalité, les signaux n'ont pas toujours une forme simple soit en raison de la nature de l'information qu'ils portent, soit en raison du traitement qu'ils doivent subir. L'unique représentation du signal en fonction du temps s'avère insuffisante : elle ne permet plus d'interpréter correctement l'information. Dans de tels cas, la représentation du signal en fonction de la fréquence est très utile.

Comme vu au chapitre précédent, la fonction $x^2(t)$ donne une information sur la distribution de l'énergie en fonction du temps. Il est intéressant d'étudier la répartition et l'amplitude de cette énergie dans le domaine des fréquences. Réaliser une telle étude consiste à faire l'analyse harmonique des signaux. Pour cela, on fait appel à la transformée de Fourier. Elle a pour but de mettre en évidence des caractéristiques du signal non évidentes dans la représentation temporelle : les propriétés fréquentielles (spectrales). L'utilisation de cette description fréquentielle permet en outre de caractériser simplement les filtres linéaires, et faciliter leur étude.

1. Notion de fréquence

La fréquence est le nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit pendant une durée déterminée. C'est donc l'inverse de la période $f = 1/T$.

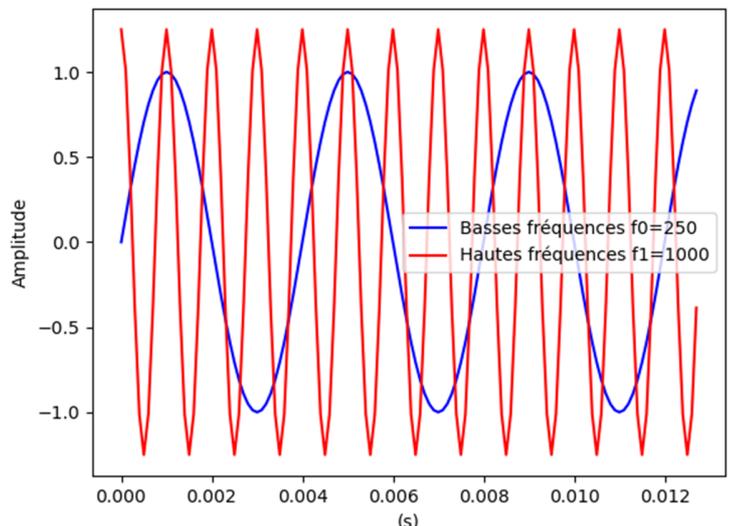
Prenons deux locuteurs l'un féminin et l'autre masculin qui prononcent le même mot. Le locuteur féminin a une voix plus aigue (hautes fréquences) que le locuteur masculin (voix grave = basses fréquences). Une note de musique correspond à une fréquence mais lorsqu'on écoute de la musique, une multitude de fréquences sont mélangées.

Dans une image, les zones homogènes (peu de changements) sont les basses fréquences et les contours (brusques changements) les hautes fréquences. La notion de fréquence est également présente dans : un téléphone portable, la radio, un radar, etc. Toutes ces applications véhiculent ou analysent le contenu fréquentiel de l'information. Une représentation fréquentielle de l'information est souvent plus facile à interpréter que la représentation temporelle.

Exemples

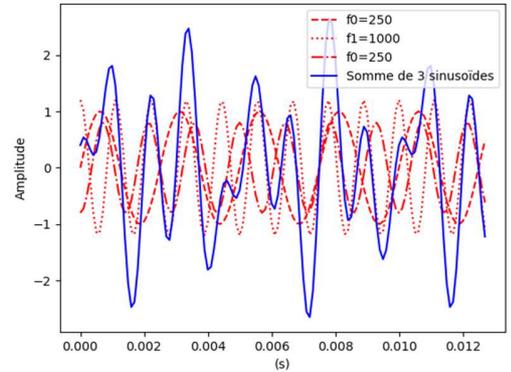
$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \quad f_0 = 250 \text{ Hz}$$

$$y(t) = 1.25 \cos(2\pi f_1 t) \quad f_1 = 1000 \text{ Hz}$$



2. Décomposition en séries de Fourier

Il est possible d'obtenir des signaux périodiques complexes par une simple combinaison linéaire de signaux élémentaires. C'est le principe inverse de la décomposition en série de Fourier.



Principe : Tout signal périodique (T) de puissance finie peut être décomposé en une somme de sinus et de cosinus. Sous forme de signaux sinusoïdaux, les fréquences d'un signal apparaissent naturellement. Pour les signaux périodiques, la décomposition en Série de Fourier (DSF) constitue le lien entre la représentation temporelle d'un signal et sa représentation fréquentielle. Cette décomposition consiste à exprimer un signal $x(t)$ de période T comme une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales de fréquences multiples de $f_0=1/T$, dite fréquence fondamentale :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(2\pi j n f_0 t)$$

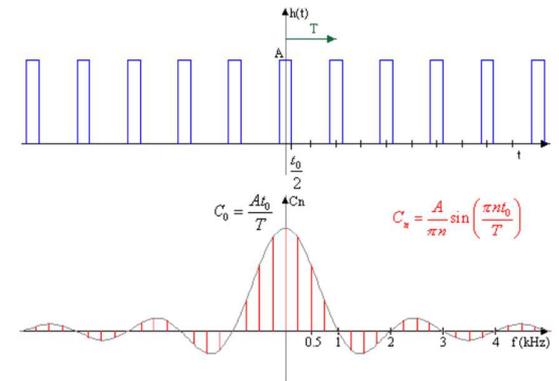
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-2\pi j n f_0 t) dt$$

Les " C_n " sont appelés les coefficients de Fourier de $x(t)$. Ils forment la représentation fréquentielle de $x(t)$. Mathématiquement la fonction $x(t)$ et la suite des C_n sont équivalentes. Toutefois, en traitement du signal, elles ont chacune leur intérêt. Elles correspondent à deux visions du même phénomène.

Exemple

$x(t) = A \Pi_{\theta}(t)$ périodique de période T

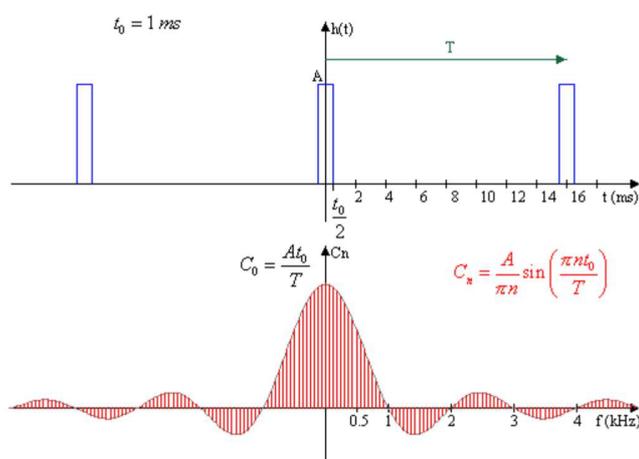
$$C_n = \frac{A\theta}{T} \text{sinc}(n\theta/T)$$



- $f_0=1/T$ est la composante fondamentale du signal
- nf_0 sont les harmoniques, de fréquences multiples de celle de la fondamentale
- les fréquences négatives n'ont pas de signification physique directe, on doit mathématiquement leur présence, au développement de la fonction réelle en série complexe.

$$P = \sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

Ce spectre fréquentiel est donc une manière de représenter un signal périodique, et cela reste valable dans le cas général d'un signal non périodique (d'énergie finie).



En effet, considérons que la période T est infinie (donc f_0 tend vers 0) et comme les harmoniques sont des multiples de f_0 , l'écart entre les raies du spectre va donc devenir infiniment petit ($T \rightarrow +\infty \Rightarrow nf_0 \rightarrow f$)

On tend alors vers une représentation fréquentielle continue : C'est la Transformée de Fourier, qui peut être vue comme une généralisation des séries de Fourier aux signaux non périodiques.

3. Transformée de Fourier des signaux à énergie finie

La transformée de Fourier est une technique mathématique permettant de déterminer le spectre de fréquences d'un signal (par exemple un son). La transformation de Fourier correspond à un changement de base dans l'espace des fonctions de carré sommable. La définition mathématique est la suivante :

$$TF\{x(t)\} = X(f) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi jft} dt \qquad x(t) = TF^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{2\pi jft} df$$

$x(t)$ et $X(f)$ sont deux descriptions équivalentes du même signal. La transformée de FOURIER existe si les trois conditions de DIRICHLET sont vérifiées:

- $x(t)$ possède un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle fini,
- $x(t)$ possède un nombre fini de maxima et de minima sur tout intervalle fini,
- $x(t)$ est absolument intégrable, c'est-à-dire : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$

Ainsi, tous les signaux à énergie finie possède une transformée de Fourier. Cette dernière est une fonction complexe même si $x(t)$ est réel, elle pourra être exprimée sous la forme:

$$X(f) = |X(f)| e^{j\varphi} = A(f) + jB(f)$$

Où $|X(f)|$ et φ sont respectivement le module et la phase de $X(f)$:

$$\begin{cases} |X(f)| = \sqrt{A^2(f) + B^2(f)} \\ \varphi = \arg(X(f)) = \arctg \frac{B(f)}{A(f)} \end{cases}$$

- o $X(f)$ = fonction réel $\Leftrightarrow x(t)$ est *paire*
- o $X(f)$ = fonction imaginaire pure $\Leftrightarrow x(t)$ est *impaire*

Exemple 1

Soient $x(t) = A\Pi_{\theta}(t)$ et $y(t) = A\Lambda_{\theta}(t)$ signal porte et signal triangulaire d'amplitude $A > 0$ et de largeur θ .

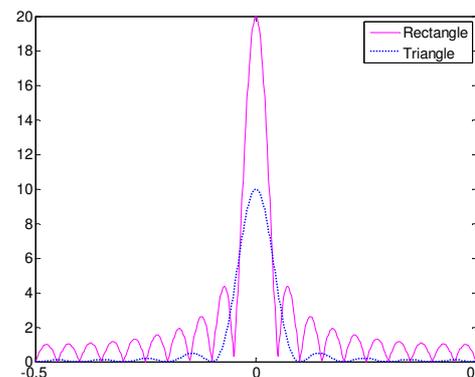
- Tracer $x(t)$ et $y(t)$ sur le même graphe
- Utiliser les dérivées pour trouver $X(f)$ et $Y(f)$ qui seront représentés sur le même graphe puis commenter et interpréter les deux graphes pour $A=1$ et $\theta=20$.

$$X(f) = A\theta \operatorname{sinc}(f\theta) \qquad Y(f) = A\theta \operatorname{sinc}^2(f\theta)$$

Exemple 2

Soit $z(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, tracer $Z(f)$, $Z_1(f)$ la TF de $x(t) \cdot z(t)$ et $Z_2(f)$ la TF de $y(t) \cdot z(t)$ sur le même graphe et comparer $Z(f)$ et $Z_1(f)$ puis $Z(f)$ et $Z_2(f)$.

$$\begin{aligned} Z(f) &= \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0) \\ Z_1(f) &= \frac{A}{2} \theta \operatorname{sinc}(\theta(f - f_0)) + \frac{A}{2} \theta \operatorname{sinc}(\theta(f + f_0)) \\ Z_2(f) &= \frac{A}{4} \theta \operatorname{sinc}^2(\theta(f - f_0)) + \frac{A}{4} \theta \operatorname{sinc}^2(\theta(f + f_0)) \end{aligned}$$



4. TF au sens des distributions

Pour les signaux à puissance moyenne finie (Dirac, Echelon, signaux périodiques, etc.), on peut définir une TF au sens des distributions.

o Dirac : $\delta(t - t_0) \xrightarrow{TF} e^{-2\pi j f t_0} \Rightarrow \delta(t) \xrightarrow{TF} 1$

o Echelon : $U(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi j f} + \frac{1}{2} \delta(f)$

o Périodiques : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(2\pi j n f_0 t) \xrightarrow{TF} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - n f_0)$

o Peigne de Dirac : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{TF} X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_0)$

o $\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$

o $\sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} \delta(f + f_0)$

5. Principales propriétés de la TF

o Linéarité : $a x_1(t) + b x_2(t) \xrightarrow{TF} a X_1(f) + b X_2(f)$

o Décalage temporel : $x(t - t_0) \xrightarrow{TF} X(f) e^{-2\pi j f t_0}$

o Décalage fréquentiel : $x(t) e^{2\pi j f_0 t} \xrightarrow{TF} X(f - f_0)$ (MA)

o Dualité temps-fréq : $x(t) \xrightarrow{TF} X(f) \Rightarrow X(t) \xrightarrow{TF} x(-f)$

o Changement d'échelle : $x(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X(f/a)$

o Dérivation : $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (2\pi j f)^n X(f)$

o Inversion et conjugaison :

o $x(-t) \xrightarrow{TF} X(-f)$

$x^*(t) \xrightarrow{TF} X^*(-f)$

o Convolution : $x(t) * h(t) \xrightarrow{TF} X(f) \cdot H(f)$

Espace temporel	Espace fréquentiel
	 Re{X(f)} est une fonction paire Im{X(f)} est une fonction impaire
$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$	$X(f) = a X_1(f) + b X_2(f)$
$x(t - a)$	$e^{-j2\pi a f} X(f)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$	
$x(t) \cos(2\pi f_0 t)$	$X(f - f_0) + X(f + f_0)$
	 $X(f) = T_0 \frac{\sin(\pi T_0 f)}{\pi T_0 f}$
$x(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$	$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_0)$

Remarques :

- La propriété de changement d'échelle indique que plus le support temporel d'une fonction est étroit plus le support de sa TF est large.

- La translation d'un signal temporel se traduit par un déphasage en fréquence. Une translation en fréquence équivaut à une modulation temporelle.

- La propriété de dualité permet d'obtenir facilement de nouvelles paires de transformées de FOURIER à partir des paires déjà connues.

- La TF d'un signal périodique est divergente, mais on peut définir une TF au sens des distributions en utilisant la décomposition en Série de Fourier. Le résultat correspond à un spectre de raies (non continu). Lien entre série de Fourier et TF

$$\text{sachant que: } \begin{cases} C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-2\pi j n f_0 t) dt \\ X(f) \doteq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \end{cases} \quad \text{alors } X(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} (T \cdot C_n)$$

6. Energie, DSE et DSP

Pour les signaux à énergie finie, la TF conserve l'énergie (relation de Parseval) :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

On peut donc définir une notion d'énergie par unité de fréquence, la densité spectrale d'énergie (DSE):

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau$$

En effet,

$$R_{xy}(\tau) = x^*(-t) * y(t) \Rightarrow TF\{R_{xy}(\tau)\} = X^*(f) \cdot X(f) = |X(f)|^2$$

$$\text{Or } R_{xy}(\tau) = TF^{-1}\{S_x(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) e^{2\pi j f \tau} df \Rightarrow E_x = R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

La DES est la TF de l'autocorrélation (Théorème de Wiener-Kintchine). Pour les signaux à puissance moyenne finie, on définit alors une densité spectrale de puissance (DSP):

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(f)|^2}{T}$$

Là aussi, la densité spectrale de puissance est la TF de la fonction d'autocorrélation.

7. Transformée de Fourier discrète (TFD)

Cette transformée, popularisée par son calcul rapide (TFR ou FFT : Fast Fourier Transform), fait correspondre une suite de N valeurs à une autre de suite de N valeurs numériques également.

On considère un signal numérique x(n) défini par N échantillons temporels, obtenus par échantillonnage avec la période Te. La TFD et la TFD inverse sont définies comme suit:

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2\pi j n k / N} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k)e^{2\pi j n k / N} \end{cases}$$

On remarque aisément que l'on perd toute notion de temps relatif aux échantillons. Nous obtenons au final une relation entre une suite indexée par une variable entière n et une suite indexée par k. Les N termes X(k) correspondent à une approximation (à un facteur multiplicatif Te près) de la transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence k Δf, avec k entre 0 et N -1, c'est-à-dire f entre 0 et fe.

Exemple

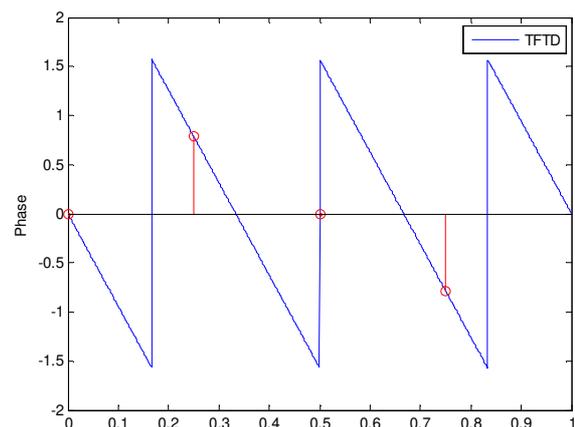
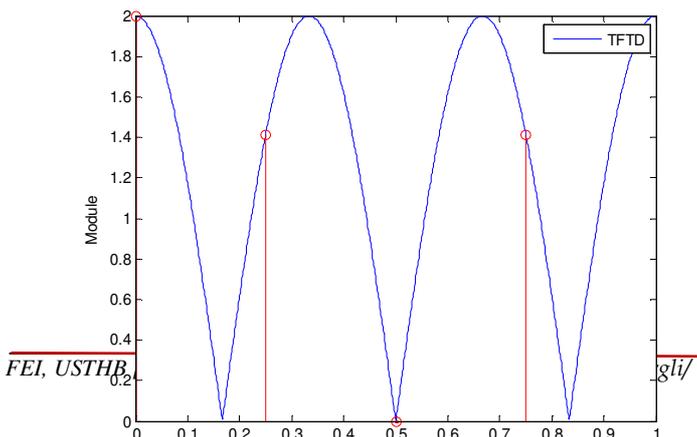
Soit le signal x(n)= 1 pour n = 0 et n= 3 et 0 ailleurs.

- Calcul maintenant la TFD sur N=4 échantillons (4 échantillons de la TFD à partir de 4 échantillons du signal)

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-2\pi j n k / 4}$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=0}^3 x(n)e^0 = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 2 \\ \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-\pi j k / 2} = x(0) + x(1)e^{-\pi j / 2} + x(2)e^{-\pi j} + x(3)e^{-3\pi j k / 2} = 2 \cos(3\pi / 4)e^{-3\pi j / 4} \\ \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-\pi j n k} = 2 \cos(3\pi / 2)e^{-3\pi j / 2} \\ \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-3\pi j n k / 2} = 2 \cos(9\pi / 4)e^{-9\pi j / 4} \end{cases}$$

Modules des 4 échantillons de X(k): 2, √2, 0, √2

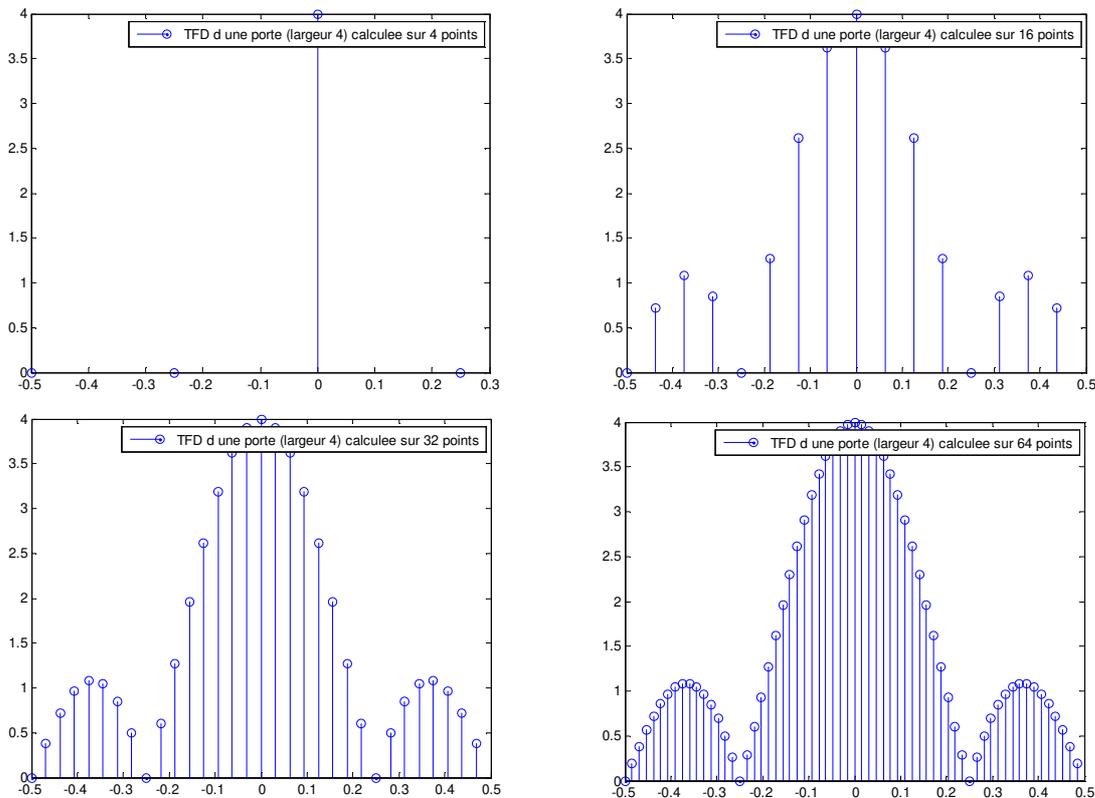


On peut observer que les quatre échantillons de la TFD (en rouge) se superposent à la courbe de la TFTD (en bleu). On confirme que la TFD n'est que l'échantillonnage de la TFTD limitée à N. On note en outre, que la précision fréquentielle est de $\Delta f = f_e/N$. Pour améliorer cette précision, il faudrait diminuer le pas en fréquence.

Remarque $x(n)$ est périodique de période N et $X(k)$ est aussi périodique de période N :

$$x(n + N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi(n+N)k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi nk}{N}} e^{j \frac{2\pi Nk}{N}} = s_n$$

Sachant que $x(n)$ et $X(k)$ sont calculés sur le même nombre de points N, on peut augmenter la précision, par la technique du zéro-padding : on calcule la TFD sur un nombre NF pouvant être bien plus grand que le nombre de points N disponible du signal ($NF \gg N$). La figure suivante en donne un exemple (Voir TP n°2).



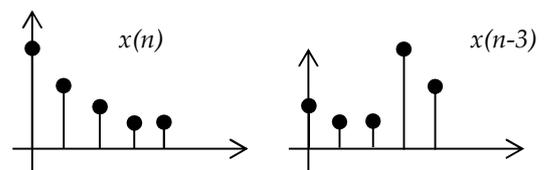
Autres propriétés : Toutes les propriétés se déduisent des propriétés de la transformée continue en se rappelant que chaque signal manipulé, de durée finie, doit être considéré comme une période d'un signal périodique, et cela en temps et en fréquence. La conséquence en est que la translation d'un signal (lors d'une convolution ou de corrélation) se traduit par un décalage circulaire [6]

o Linéarité : $ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{TFD} aX_1(k) + bX_2(k)$

o Décalage temporel : $x(n - m) \xrightarrow{TFD} X(f) e^{-\frac{2\pi jkm}{N}}$

o Décalage fréquentiel : $x(n) e^{\frac{2\pi jk_0 n}{N}} \xrightarrow{TFD} X(k - k_0)$

o Dualité temps-fréquence : $x(n) \xrightarrow{TFD} X(k) \Rightarrow X(n) \xrightarrow{TF} N \cdot x(-k)$



- o Changement d'échelle : $x(an) \xrightarrow{TFD} \frac{1}{|a|} X(k/a)$
- o Convolution périodique : $x(n) * h(n) \xrightarrow{TFD} X(k).H(k)$
- o $\delta(n) \xrightarrow{TFD} 1$
- o $\delta(n - m) \xrightarrow{TFD} e^{-2\pi jmk/N}$
- o Par ailleurs, l'énergie se conserve: $\sum_0^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} |X(k)|^2$

8. Calcul de la FFT ou TFR

La TFD est restée un outil peu utilisée jusqu'à l'apparition d'algorithmes « rapides » permettant son calcul. Le plus connu est du à Cooley et Tuckey et date de 1965. Le calcul direct de la TFD sur N points nécessite 2N² multiplications et 2N(N-1) additions. L'algorithme proposé réduit à Nlog2(N) le nombre d'opérations. Sans nuire à la généralité, prenons le cas de N=8. Il faut calculer :

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^7 s_n e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

Soit : $W_N = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$ alors $S_k = \sum_{n=0}^7 s_n W_N^{nk}$

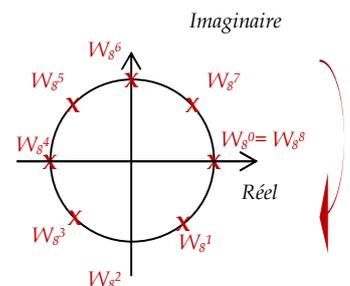
Pour N=8, explicitons la relation précédente :

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix}$$

Les facteurs W_n présentent un certain nombre de propriétés dont certaines sont mises à profit dans l'algorithme :

$$W_N^{nN} = 1, W_N^{N/2} = -1, W_N^{n+N} = W_N^n$$

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix}$$



Série 2

- Soit $A\Lambda(t)$ signal triangle d'amplitude $A>0$ et de largeur τ .
 - Utiliser les dérivées pour trouver $X(f)$
 - Soit $y(t) = \Pi_\tau(t) * \Pi_\tau(t)$; Déterminer sa Transformée de Fourier, en déduire $y(t)$.
 - Trouver la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(at)}{t^2} dt \quad (a>0)$
- Déterminer et tracer la TF (module et phase) des signaux suivants :
 - $y(t) = e^{-a|t|}, \delta(t), \delta(t+a), \delta(t-a)$,
En déduire la TF du signal $z(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$
Soit le produit $z(t)=x(t).y(t)$ avec $x(t) = e^{-at} \quad a>0$ et $t>0$ et $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, déterminer $Z(f)$,
- Soit le signal $x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$, montrer que : $\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n t/T} = T \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ et déterminer la TF de $x(t)$
- Calculer les transformées de Fourier inverse des fonctions :

$$X(f) = \frac{1}{a^2+(2\pi f)^2} \qquad Y(f) = \frac{j2\pi f}{a^2+(2\pi f)^2}$$
- Calculer la Transformée de Fourier des signaux suivants :
 - $x(t) = \text{Cos}(2\pi f_0 t)u(t)$
 - $y(t) = \sin(2\pi f_0 t)\text{sgn}(t)$
 - $z(t) = \cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t)$
- Soit le signal $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ Trouver la transformée de Fourier de $f(t)$ et tracer le spectre d'amplitude puis calculer l'énergie.
- Soit $h(t) = \begin{cases} 2 + \cos(2\pi t) & |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
 - Déterminer $H(f)$, la transformée de Fourier de $h(t)$
 - Esquisser $H(f)$ pour l'intervalle $0 \leq f \leq 3$.
 - Donner la valeur numérique de $H(f)$ pour $f = 2.5$
- Calculer la TFD du signal $s(n)=n$ pour $N=2, 3, 4$,

Solutions

1. $X(f) = A\tau \text{sin}^2(f\tau) \quad Y(f) = \tau^2 \text{sin}^2(f\tau) \Rightarrow y(t) = \tau\Lambda(t) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(at)}{t^2} dt = a\pi$

2. $Y(f) = \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2} \mathbf{1}, e^{2\pi jfa}, e^{-2\pi jfa}, \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)$

$$X(f) = \frac{1}{a + 2\pi jf} \Rightarrow Z(f) = \frac{1}{a + 2\pi j(f - f_0)} + \frac{1}{a + 2\pi j(f + f_0)}$$

3. $C_n = \frac{1}{T} \quad X(f) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/T) \qquad 4. \quad x(t) = \frac{1}{2a} e^{-a|t|} \quad y(t) = -\frac{1}{2}(e^{-at}U(t) - e^{at}U(-t))$

5. $X(f) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\pi j(f-f_0)} + \frac{1}{\pi j(f+f_0)} + \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \right] \quad Y(f) = \frac{1}{2\pi(f+f_0)} - \frac{1}{2\pi(f-f_0)}$

$$Z(f) = \frac{1}{4} [\delta(f - f_1 - f_2) + \delta(f - f_1 + f_2) + (f + f_1 - f_2) + \delta(f + f_1 + f_2)]$$

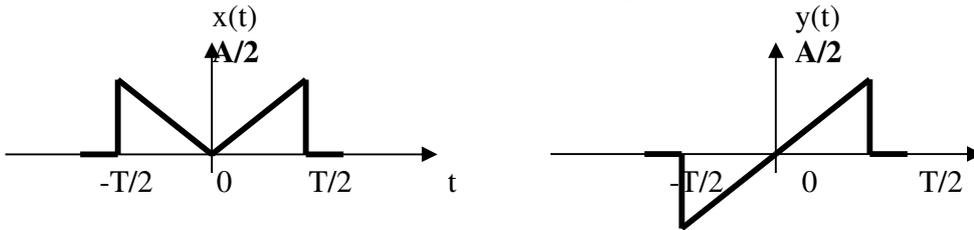
6. $F(f) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|f|}$

7. $H(f) = 2 \sin c(f) + \frac{1}{2} \sin c(f - 1) + \frac{1}{2} \sin c(f + 1)$

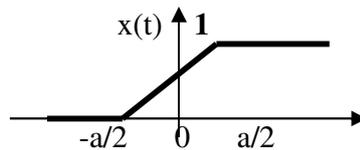
8. $N=2, X(k)=[1, -1]$ $N=3, X(k)=[3, \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{3}j), \frac{3}{2}(-1 - \sqrt{3}j)]$ $N=4, X(k)=[6, 2j - 2, -2, -2 - 2j]$

Exercices Supplémentaires

1. Déterminer la transformée de Fourier des signaux $x(t)$ et $y(t)$ suivants :



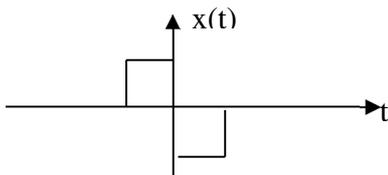
2. Déterminer la transformée de Fourier du signal suivant :



3. Soit le signal $x(t) = \frac{\cos(\pi t/2)}{\pi(1-t^2)}$

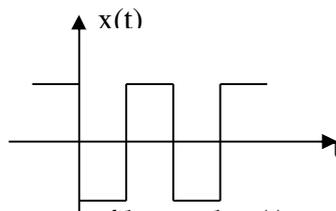
Calculer la transformée de Fourier $X(f)$ et tracer le spectre d'amplitude (Indication : décomposer $1/(1-t^2)$ et exprimer $\cos(\pi t/2)$ en fonction de $\sin(\cdot)$)

4. On considère le signal $x(t)$ suivant :



- Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$
- Soit $y(t) = \int_0^t x(u) du$. Tracer $y(t)$. Calculer $Y(f) = TF(y(t))$ en utilisant la propriété sur l'intégration.
- Donner l'expression du signal $x_T(t)$ obtenu par périodisation de $x(t)$. Quelle est la TF de $x_T(t)$?

5. On considère le filtre passe bas de réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-at}u(t)$. On met à l'entrée de ce filtre le signal $x(t)$ suivant :



- Comment s'écrit $y(t)$, le signal obtenu par filtrage de $x(t)$ par $h(t)$
- Quelle est la TF de $y(t)$

6. Soit $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 2\cos(2\pi f_2 t)$, avec $f_1 = 100\text{Hz}$ et $f_2 = 200\text{Hz}$
- Quelle est la TF de $x(t)$
 - On module la porteuse $f_0 = 1000\text{Hz}$, en amplitude par $x(t)$: $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$. (modulation AM sans porteuse). Que vaut $Y(f)$? Tracer les spectres de $x(t)$ et $y(t)$.
 - On démodule $y(t)$ en le multipliant par la porteuse $\cos(2\pi f_0 t)$ et en filtrant le signal résultant $z(t)$ par un filtre passe bas. Quel est le spectre du signal $z(t)$?
6. Calculer la transformée de Fourier à temps discret (TFD) de $x(n) = \delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$ pour $N=3$
7. Calculer la TFD de la suite $x=[2,3,-1,1]$ sur $N=4$ pts

Solutions

1. $Y(f) = \frac{AT}{2} [\sin c(fT) - \frac{1}{2} \sin c^2(fT)]$ $Z(f) = \frac{AJ}{2\pi f} [\cos(\pi fT) - \sin c(fT)]$

2. $X(f) = \frac{\sin c(fa)}{2\pi jf}$

3. $X(f) = \cos(2\pi f) \Pi_{1/2}(f)$

4. $X(f) = -\frac{4 \sin^2(\pi f)}{2\pi jf} Y(f) = \sin^2(\pi f) X_t(f) = -\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4 \sin^2(\pi n f_0)}{2\pi j n f_0} \delta(f - n f_0)$

5. $Y(f) = \frac{1}{a+2\pi jf} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-1+(-1)^n}{2\pi j n f_0} \delta(f - n f_0)$

6. $X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] + (f - f_2) + \delta(f + f_2) Y(f) = \frac{1}{2} (X(f - f_0) + X(f + f_0))$

$$Z(f) = \frac{1}{2} (Y(f - f_0) + Y(f + f_0)) = \frac{1}{4} (X(f - 2f_0) + 2X(f) + X(f + 2f_0))$$

7. $X(k) = 1 + 6e^{-2\pi j/3} + 3e^{-4\pi j/3}$

8. $X = [5, 3-2j, -3, 3+2j]$

TP n°2 : Caractérisation fréquentielle des Signaux et Systèmes (sous Matlab)

Rappels

1. Transformée de Fourier Discrète

La TFD d'ordre N d'un signal numérique $s(kT_e)$, $k=0\dots N-1$ est définie par :

$$X(k) = X\left(\frac{k}{N}f_e\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)e^{-2\pi jkn/N}, k = -N/2\dots N/2$$

Sa transformée inverse est donnée par:

$$x(n) = x(nT_e) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(kf_e/N)e^{2\pi jkn/N}, n = 0\dots N-1$$

Matlab fournit la fonction $y=\text{fft}(x)$ pour calculer la transformée de Fourier complexe d'un vecteur de longueur N.

- La fonction **fft(x)** (respectivement **ifft(X)**) permettra de calculer la TFD (respectivement la TFD⁻¹) sur les N points, soit de 0 à N-1 correspondant à l'intervalle $[0, f_e]$ (respectivement $[0, NT_e]$). Le spectre obtenu sera un vecteur complexe que l'on pourra représenter en coordonnées cartésiennes (partie réelle et imaginaire fonction **real** et **imag**), ou en coordonnées polaires (module et phase, fonction matlab **abs** et **angle** ou **unwrap**).

- Pour une représentation entre $-f_e/2$ et $f_e/2$ de la TFD, il suffira d'écrire **X=fftshift(X)**

- Pour augmenter la précision, il suffit d'écrire **fft(x,NF)** où $NF > N$. La transformée inverse est donnée alors par **ifft(x,NF)**.

2. Exemple d'utilisation de la FFT sous matlab

Commenter le programme suivant ligne par ligne

```

clc; clear all
N=100; fo=1000; Fe=8000; Te=1/Fe;
n=0:1:N-1;
x=sin(2*pi*fo*n*Te);
subplot(2,2,1);
t=Te*[0:1:N-1];
plot(t,x,'gx:'); grid;
y=fft(x);
axe_FF=Fe*(0:1/N:1-(1/N));
subplot(2,2,2);plot(axe_FF,abs(y/N),'b.:'); grid;
title('Transformée de Fourier Discrète par FFT du signal entre 0 et fe')
xlabel('fréquence'); ylabel('Module du spectre');
subplot(2,2,3);
y_dec=fftshift(y);
axe_freq=Fe*(-1/2:1/N:1/2-(1/N));
plot(axe_freq,abs(y_dec/N),'b.:'); grid;
title('Transformée de Fourier Discrète par FFT du signal entre -fe/2 et fe/2')
xlabel('fréquence'); ylabel('Module du spectre');
%FFT inverse %
FFT_INV=ifft(y);
subplot(2,2,4);
plot(t,FFT_INV,'bx:'); grid;
title('Transformée de Fourier Discrète inverse du signal N=100')
xlabel('temps'); ylabel('Amplitude');
    
```

3. Programmes à réaliser

I. Reprendre l'exemple vu en cours $x(n) = [1 \ 0 \ 0 \ 1]$, calculer, afficher et visualiser sa TFD pour $NF=4$ puis $NF=32$.

II. TFD d'une porte

```
clc; clear all; close all;
N=6; Fe=1 ; Te=1/Fe;
n=Te*(1:N); x=ones(1,N);
subplot(2,1,1); stem(n,abs(x),'bx:'); grid;
NF=6; y=fft(x,NF); y_dec=fftshift(y);
subplot(2,1,2); axe_freq=Fe*(-1/2:1/NF:1/2-(1/NF));
stem(axe_freq,abs(y_dec/N),'r.:'); grid;
```

- Vérifier que l'énergie se conserve.
- Illustrer la propriété de décalage fréquentiel de la TF en calculant (théoriquement) et en représentant le module de la TFD de $x(n) \times e^{2\pi j f_0 n}$ avec $f_0=0.2$ Hz.
- Afficher le module de la transformée de Fourier en décibels en écrivant

III. Filtrage d'un signal

Le signal dans `ecg.dat` contient plusieurs secondes d'un ECG échantillonné à 500 Hz. Les petites oscillations visibles principalement entre les complexes PQRST sont dues à la présence d'une interférence à 50 Hz, qu'on peut supprimer avec un filtrage passe-bas, mais en essayant de ne pas déformer les complexes.

```
clear all; clc; close all
%Conception du filtre
fc = 40 ; %Début de la bande passante
fe = 500; %Fréquence d'échantillonnage
fcN = fc/(fe/2); %Normalisation de fc par rapport à fe/2
Nb= 41; %Nombre de coefficients
h = FIR1(Nb-1,fcN,'low',hamming(Nb),'scale') ;

NF=512; H=fft(h,NF);H=fftshift(H); axe_f=fe*(-1/2:1/NF:1/2-(1/NF));
figure;
subplot(2,1,1);hold on; stem(h,'red'); %Tracés de la réponse impulsionnelle,
subplot(2,1,2);hold on;plot(axe_f,abs(H),'red') %Tracés du spectre d'amplitude

%Application du filtre
N=length(ecg); Te=1/fe; t=(0:N-1)*Te;
figure; subplot(2,2,1); plot(t,ecg);
subplot(2,2,3); x=fft(ecg); x=fftshift(x); axe_f=fe*(-1/2:1/N:1/2-(1/N));plot(axe_f,abs(x));
ecg1=filter(h,1,ecg);subplot(2,2,2); plot(t,ecg1);
x=fft(ecg1); x=fftshift(x);subplot(2,2,4); plot(axe_f,abs(x));
```

TP n°2 : Caractérisation fréquentielle des Signaux et Systèmes (sous Python)

Rappels

1. Transformée de Fourier Discrète

La TFD d'ordre N d'un signal numérique $s(kT_e)$, $k=0\dots N-1$ est définie par :

$$X(k) = X\left(\frac{k}{N}f_e\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)e^{-2\pi jkn/N}, k = -N/2\dots N/2$$

Sa transformée inverse est donnée par:

$$x(n) = x(nT_e) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(kf_e/N)e^{2\pi jkn/N}, n = 0\dots N-1$$

Python fournit dans **scipy.fftpack** les fonctions nécessaires pour calculer la transformée de Fourier complexe d'un vecteur de longueur N.

- La fonction **scipy.fftpack.fft(x)** ou **numpy.fft.fft(x)** permettra de calculer la TFD sur les N points, soit de 0 à N-1 correspondant à l'intervalle $[0, f_e]$ (respectivement $[0, NT_e]$). Le spectre obtenu sera un vecteur complexe que l'on pourra représenter en coordonnées polaires (module et phase, fonction **numpy.abs** et **numpy.angle** ou **numpy.unwrap**).

- Pour une représentation entre $-f_e/2$ et $f_e/2$ de la TFD, il suffira d'écrire **X=numpy.fft.fftshift(X)**

- Pour augmenter la précision, il suffit d'écrire **numpy.fft.fft(x,NF)** où $NF > N$. La transformée inverse (la TFD⁻¹) est donnée alors par **numpy.fft.ifft(x,NF)**.

Quelques astuces

1. Pour des figures séparées, aller Outils ->Préférences->Console IPython->Graphise->Sortie: Automatique. Fermer spyder et ré-ouvrir.
2. Pour effacer toutes les variables avant exécution Préférences->Exécuter->Supprimer toutes les variables avant exécution
3. Ctl+L efface la console

1. Exemples de cours

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 3 Sinusoïde --> 2 fréquences avec écoute
N = 128; f0=250; f1=1000; fe =22000; Te=1/fe
t = np.arange(0,N,1)*Te
x1 = np.sin(2.0*np.pi*f0*t) ;
x2 = 1.2 * np.cos(2.0*np.pi*f1*t) ;
plt.figure(1)
plt.plot(t,x1, 'b',label='Basses fréquences f0=%d'%f0);
plt.plot(t, x2,'r',label='Hautes fréquences f1=%d'%f1);
plt.xlabel('(s)'); plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend()

import sounddevice as snd
import time
# prendre N=12800
snd.play(x1, fe)
time.sleep(2)
snd.play(x2, fe)
time.sleep(2)

N=500;fe =22050; Te=1/fe
t = np.arange(0,N,1)*Te
t=np.arange(0,N,1)*Te
xx = []
for f0 in np.arange(200,4000,10):
    xx=np.append(xx,np.cos(2.0*np.pi*f0*t))
```

```
snd.play(xx, fe)
time.sleep(2)
```

```
# somme de 3 sinusoides ---> Décomposition en séries de Fourier
N = 128; f0=400; f1=900; f2 = 700; fe =10000; Te=1/fe
t = np.arange(0,N,1)*Te
x1 = np.sin(2.0*np.pi*f0*t);
x2 = 1.2 * np.cos(2.0*np.pi*f1*t);
x3 = -0.8 * np.cos(2.0*np.pi*f2*t);
y = x1+x2+x3;
plt.figure(2)
plt.plot(t,x1, 'r-',label='f0=250');
plt.plot(t,x2,'r',label='f1=1000');
plt.plot(t,x3, 'r-',label='f0=250');
plt.plot(t,y,'b',label='Somme de 3 sinusoides');
plt.xlabel('(s)'); plt.ylabel('Amplitude'); plt.legend()
```

2. Exemple d'utilisation de la FFT sous Spyder

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
N = 100; f0=1000; fe=8000; Te=1/fe
t = np.arange(0,N,1)*Te
x = np.sin(2.0*np.pi*f0*t)
TFDx = np.fft.fft(x); TFDx = np.fft.fftshift(TFDx);
freq = np.arange(-N/2,N/2)*fe/N
plt.figure(4)
plt.subplot(311); plt.plot(freq, np.abs(TFDx))
plt.title('Module de la TFD'); plt.xlabel('Fréquence (Hz)'); plt.ylabel('Amplitude')
plt.subplot(312); plt.plot(freq, np.angle(TFDx))
plt.title('Phase de la TFD'); plt.xlabel('Fréquence (Hz)'); plt.ylabel('Amplitude')
plt.subplot(313); plt.plot(freq, 20*np.log10(np.abs(TFDx)/N))
plt.title('Module de la TFD en db'); plt.xlabel('Fréquence (Hz)'); plt.ylabel('Amplitude')
```

3. Programmes à réaliser

I. Reprendre l'exemple vu en cours $x(n) = [1 \ 0 \ 0 \ 1]$, calculer, afficher et visualiser sa TFD pour $NF=4$ puis $NF=32$ et commenter.

```
NF = 4; Te = 1.0; fe=1.0/Te;
x = np.array([1,0,0,1])
TFDx = np.fft.fft(x,NF)
TFDx = np.fft.fftshift(TFDx)
freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*fe/NF
plt.figure(5)
plt.subplot(211); plt.stem(freq, np.abs(TFDx),use_line_collection=True)
plt.title('Module de la TFD'); plt.xlabel('Fréquence (Hz)'); plt.ylabel('Amplitude')
plt.subplot(212); plt.stem(freq, np.angle(TFDx),use_line_collection=True)
plt.title('Phase de la TFD'); plt.xlabel('Fréquence (Hz)'); plt.ylabel('Amplitude')
```

II. TFD d'une porte (à compléter)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import pow
N=6; Te = 1.0; fe=1.0/Te; NF=64; f0=0.2
x=np.ones(N)
```

- Vérifier que l'énergie se conserve $\sum_0^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} |X(k)|^2$

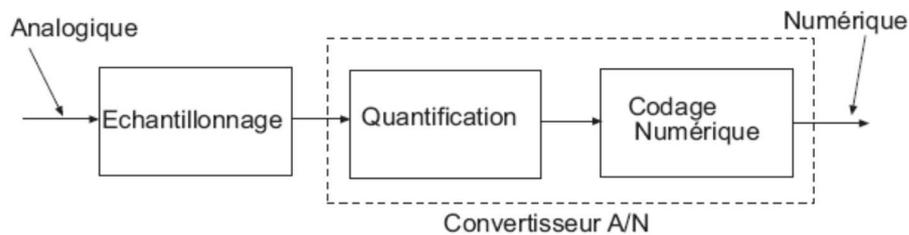
- Illustrer la propriété de décalage fréquentiel de la TF en calculant (théoriquement) et en représentant le module de la TFD de $x(n) \times e^{2\pi j f_0 n}$ avec $f_0=0.2$ Hz.

```
t = np.arange(0,N)*Te
z = np.exp(2*np.pi*1j*f0*t)
```

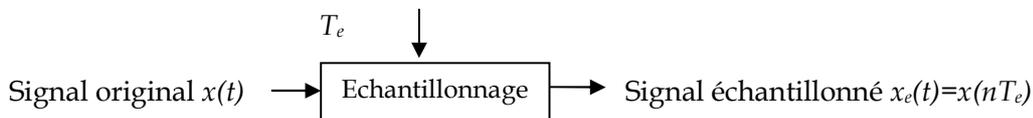
III. Echantillonnage

Dans le but de calculer la transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal $x(t)$ à l'aide d'un ordinateur, celui-ci n'ayant qu'un nombre limité de mots de taille finie, on est amené à discrétiser le signal (échantillonnage), à tronquer temporellement ce signal et à discrétiser sa transformée de Fourier [1].

L'échantillonnage est un élément important en traitement numérique de signaux. Il constitue la première opération à effectuer lors d'une conversion analogique à numérique (A/N).



Il est conditionné, principalement, par deux contraintes majeures : Ne pas détériorer le signal (conserver l'information utile) tout en limitant l'espace mémoire nécessaire au stockage. On s'attachera dans une chaîne d'acquisition à minimiser cette valeur tout en ne détériorant pas le signal [3]. Ainsi, pour transformer un signal analogique en un signal numérique, on va donc prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret et permettre, ainsi, sa numérisation.

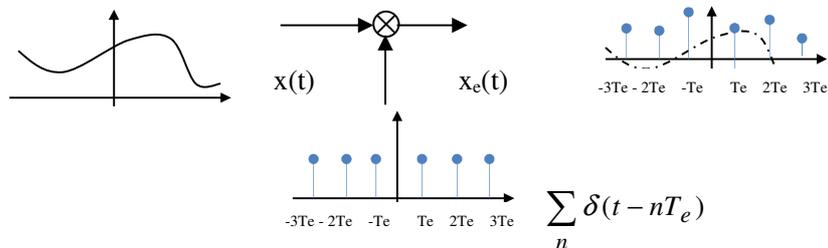


1. Echantillonnage idéal

Soit $x(t)$ un signal analogique de transformée de Fourier $X(f)$. Echantillonner le signal $x(t)$ consiste à choisir une fréquence f_e et de construire un nouveau signal avec les $x(nT_e)$ avec n un entier et $T_e=1/f_e$.

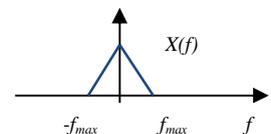
On peut écrire le signal échantillonné $x_e(t)$ sous la forme : $x_e(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e)$

que l'on peut schématiser :

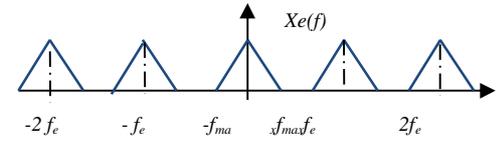


$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT_e),$$

$$\Rightarrow X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e)$$



Cette expression montre que le spectre $X_e(f)$ est périodique de période f_e et qu'il est la somme des répliques (copies) du spectre original $X(f)$ décalées de nf_e . L'échantillonnage dans le domaine temporel se traduit par une "périodisation" de période f_e dans le domaine fréquentiel.



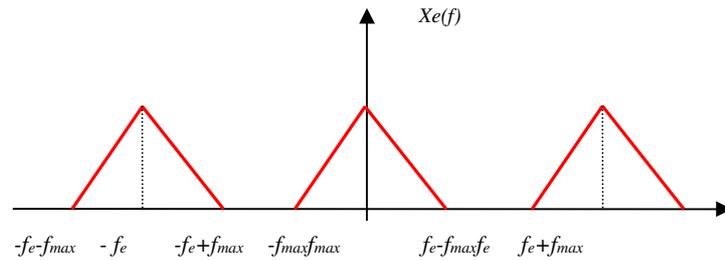
Théorème de Shannon

On considère que $x(t)$ est un signal réel dont le spectre est borné en fréquence, de fréquence maximale f_{max} soit $\forall |f| > f_{max}$

Deux cas de configurations :

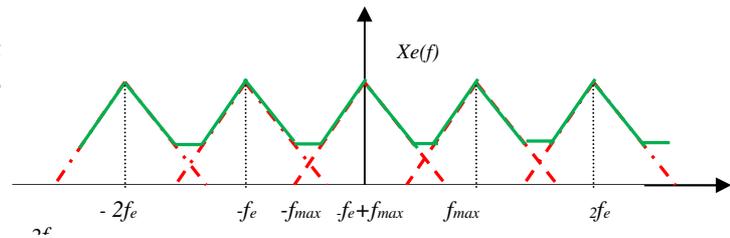
- $f_e > 2 f_{max}$

Les motifs étant disjoints, on peut extraire $X(f)$ grâce à un filtre passe-bas idéal et donc reconstituer parfaitement le signal $x(t)$ à partir des $x_e(t)$.



- $f_e < 2 f_{max}$

Les motifs élémentaires de $|X_e(f)|$ se recouvrent (Repliement de spectres). Il n'est plus possible de récupérer le spectre $X(f)$ par un filtrage approprié.



Remarques : Si le support du spectre $X(f)$ n'est pas borné (s'étale sur l'axe réel) il y a un repliement du spectre des échantillons (aliasing), on ne peut pas isoler le spectre original à partir de celui des échantillons.

Dans la pratique, on ne peut pas se contenter de prendre une fréquence d'échantillonnage égale à la fréquence de Nyquist ($f_e/2 > f_{max}$), mais en prendre une supérieure car on ne peut réaliser un filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure très nette.

Par exemple, pour numériser la parole dans le réseau téléphonique, on utilise une fréquence d'échantillonnage 8kHz alors que le spectre de la voix est compris entre 300Hz et 3400Hz.

Exemple : $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t) \Rightarrow \frac{A}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{A}{2j} \delta(f + f_0)$

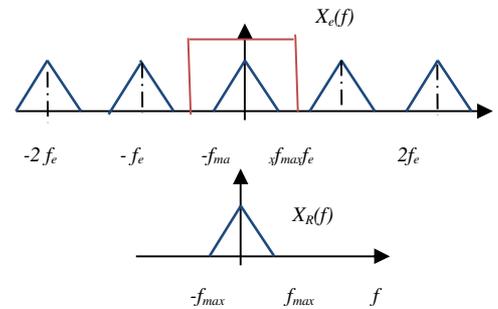
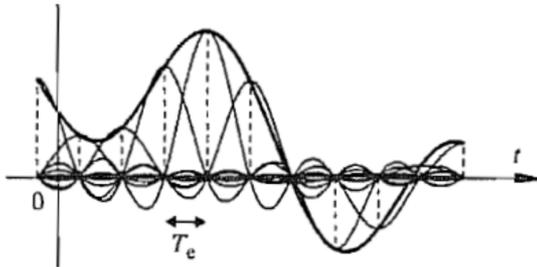
Le spectre de $x(t)$ est composé de deux raies aux fréquences $-f_0$ et $+f_0$ occupant ainsi une bande fréquentielle $B=2 f_0$. Pour échantillonner correctement $x(t)$ il faut choisir une fréquence d'échantillonnage $f_e > 2 f_0$.

2. Reconstruction idéale

Reconstruire le signal analogique revient à récupérer le spectre de départ. Or le spectre du signal échantillonné étant périodique, il suffit donc d'utiliser un filtre passe bas avec une fréquence de coupure $f_c = f_e/2$ avec pour amplitude $1/f_e$.

$$X_R(f) = X_e(f) \cdot \frac{1}{f_e} \pi(f) \Rightarrow x_R(t) = x_e(t) * \text{sinc}(f_e t)$$

$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e) * \text{sinc}(f_e(t - nT_e))$$



Pour déterminer exactement la valeur du signal à l'instant t en fonction uniquement des échantillons de ce même signal aux instants nT_e , il faudrait faire une sommation infinie sur n . En pratique, on peut implémenter une approximation. En outre, le filtre passe-bas idéal n'est pas causal donc il est physiquement irréalisable.

Exemple d'application

On échantillonne un signal sinusoïdal de fréquence 200Hz avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 500\text{Hz}$ puis avec $f_e = 250\text{Hz}$. Quel signal obtient-on lors d'une reconstruction parfaite dans les deux cas ? (Voir TP n°3)

Solution

$$f_e=500\text{Hz} \Rightarrow x_r(t) = \cos(2\pi f_0 t) \text{ avec } f_0=200\text{Hz}$$

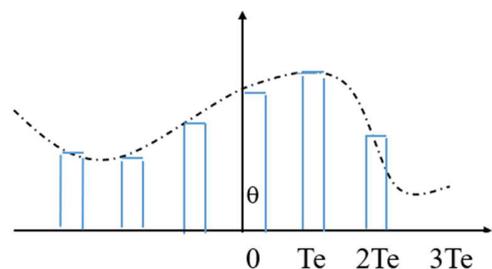
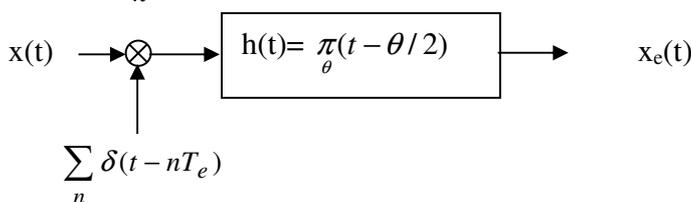
$$f_e=300\text{Hz} \Rightarrow x_r(t) = \cos(2\pi f_1 t) \text{ avec } f_1=50\text{Hz}$$

3. Echantillonnage instantané (bloqueur, maintien, réel)

Dans un système réel de convertisseur numérique analogique, on ne peut pas générer un peigne de Dirac, en outre le prélèvement d'un échantillon dure en réalité un certain temps θ . Un des principes utilisés est de conserver l'échantillon pendant une certaine durée. Ce principe est celui de l'échantillonnage maintien. Plus θ sera petit, plus on se rapprochera du peigne de Dirac. C'est la méthode d'échantillonnage la plus simple à réaliser en pratique et donc la plus utilisée.

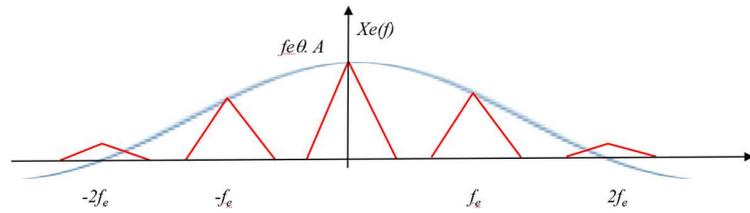
$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e) \cdot \pi(t - nT_e - \theta/2)$$

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) * \pi(t - \theta/2)$$



$$X_e(f) = TF \left\{ \sum_n x(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) \right\} \cdot TF \{ \pi(t - \theta/2) \}$$

$$X_e(f) = \sum_n f_e X(f - nf_e) \cdot \theta \operatorname{sinc}(f\theta) e^{-\pi j f \theta}$$



Dans l'échantillonnage réel, les répliques de $X(f)$ sont déformées par la fonction $\theta \operatorname{sinc}(\pi f \theta)$. On note que dans le cas d'un blocage de faible durée ($\theta \ll T_e$), le sinus-cardinal atténué peu les premières recopies de spectre. Un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure à $f_e/2$ permettrait de récupérer de manière parfaite le signal d'entrée.

Dans le cas contraire, la récupération parfaite du signal par simple filtre passe-bas n'est plus directement possible. La solution à ce problème est d'appliquer un filtre égaliseur dont la réponse en fréquence est l'inverse de la déformation.

4. Reconstruction réelle : Bloqueurs d'ordre 0 et d'ordre 1

On se propose de reconstituer pratiquement le signal analogique $x(t)$ à partir de ses échantillons $x(nT_e)$. Cette reconstitution est dans tous les cas approximative. Lorsque la méthode est linéaire on parle de filtre de lissage. Deux méthodes de restitution (d'ordre 0 et d'ordre 1) sont présentées.

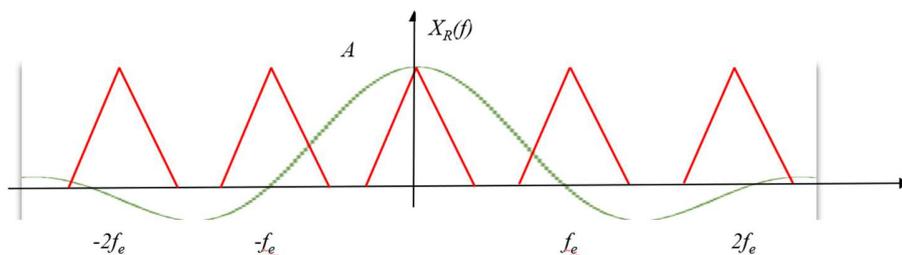
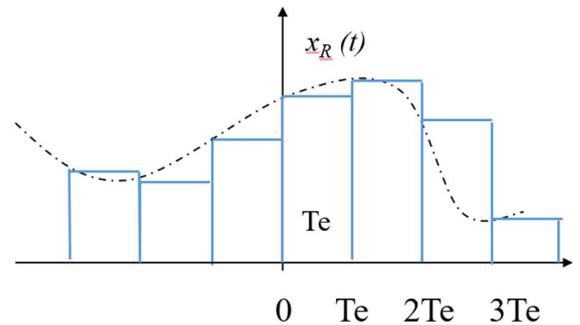
Bloqueur d'ordre 0

Dans cette méthode, on réceptionne les échantillons à la cadence T_e . Entre nT_e et $(n+1)T_e$ le signal reconstruit $x_R(t)$ prend la même valeur $x(nT_e)$. Pour connaître la réponse impulsionnelle $h(t)$ du bloqueur, il suffit de maintenir l'unique valeur 1 entre 0 et T_e . Ainsi :

$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e) \frac{\pi(t - nT_e - T_e/2)}{T_e}$$

avec, $h(t) = \frac{\pi(t - T_e/2)}{T_e}$

$$X_R(f) = \sum_n X(f - nf_e) \cdot \operatorname{sinc}(fT_e) e^{-\pi j f T_e}$$



Si le théorème de Shannon est respecté, tout le spectre du signal $x(t)$ est récupéré avec un repliement faible au voisinage de f_e . Cependant le fait qu'il agisse comme un passe haut par rapport à la bande utile du signal ($B=2f_{max}$ est souvent très faible devant F_e) introduit des distorsions en présence de bruits.

Un filtrage passe-bas supplémentaire est donc nécessaire pour éliminer ces résidus dans le spectre: c'est le filtre de lissage dont les spécifications sont fort proches de celles du filtre anti-repliement. Cependant, la simplicité et la qualité du bloqueur font qu'il est très utilisé dans les convertisseurs numérique/analogique.

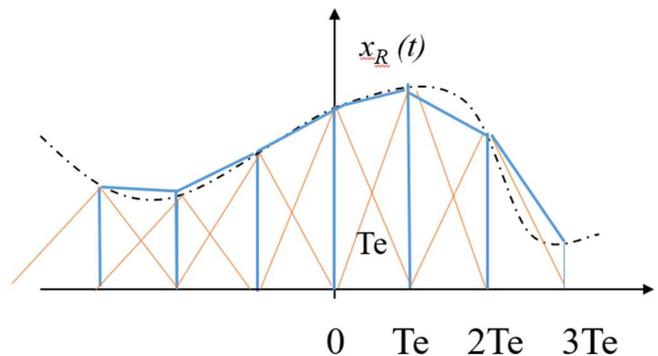
Bloqueur d'ordre 1

En tolérant un retard de réception de T_e , on peut relier les échantillons par des segments de droites, c'est le principe de l'interpolation linéaire. La réponse impulsionnelle de ce système est :

$$h(t) = \frac{\Lambda(t)}{T_e}$$

$$x_R(t) = \sum_n x(nT_e) \frac{\Lambda(t - nT_e)}{T_e}$$

$$X_R(f) = \sum_n X(f - nf_e) \cdot \text{sin} c^2 (fT_e)$$



On peut émettre les mêmes remarques concernant le bloqueur à propos de l'interpolateur actuel, sauf que $H(f)$ est plus condensée et plus sélective que celle du bloqueur. En effet, les composantes hautes fréquences sont plus atténuées (sinc au carré)

Filtre anti-repliement Les signaux étudiés en réalité sont rarement à support fréquentiel borné, c'est-à-dire que $f_{max} = \infty$. C'est par exemple le cas d'un signal rectangulaire périodique dont les raies fréquentielles s'étendent à l'infini ou encore un signal bruité. Ceci implique que quelle que soit la fréquence d'échantillonnage il y aura repliement de spectre puisque $f_e > 2 f_{max} = \infty$ est une condition impossible à réaliser. Pour remédier à ce problème, on utilise à l'entrée d'un système numérique un filtre passe-bas appelé filtre anti-repliement ou anti-aliasing. Ce filtre est analogique, idéalisé il doit avoir un gain de 1 sur une bande de fréquence F_e , centrée en zéro. Son rôle va être de limiter le contenu spectral du signal à la partie utile. Il va participer aussi à limiter l'influence du bruit [3].

5. Systèmes analogiques - Systèmes numériques

Les systèmes numériques possèdent sur leurs homologues analogiques un ensemble d'avantages décisifs :

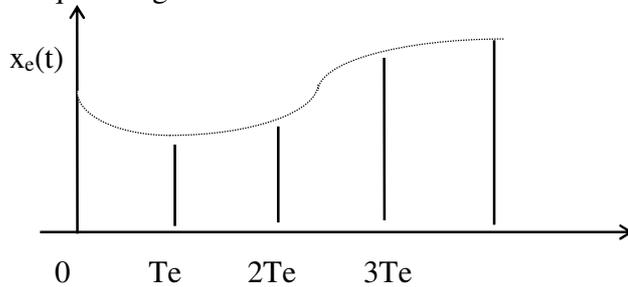
- Simplicité : Les systèmes numériques sont intrinsèquement plus simples à analyser (et donc à synthétiser) que les systèmes analogiques. Adéquation parfaite entre simulation et traitement : simuler un traitement numérique, c'est en faire.

- Possibilités de traitement accrues des opérations beaucoup plus complexes qu'en analogique, notamment des opérations non-linéaires.
- Robustesse aux bruits. Les systèmes numériques sont par essence insensibles aux bruits parasites électromagnétiques. Le transcodage de l'information sous forme numérique joue un peu le rôle de « firewall ».
- Précision et stabilité. Puisque les seuls « bruits » sont liés à la précision des calculs, cette dernière dépend uniquement du calculateur utilisé ; elle est insensible à la température et ne varie pas avec l'âge du système.
- Flexibilité. Dans un grand nombre de systèmes numériques, le traitement est défini par un logiciel chargé en mémoire. Il est dès lors très facile de modifier ce traitement, sans devoir modifier la machine qui le réalise.

Série n°3

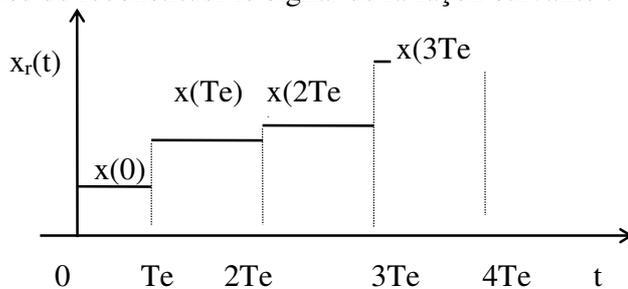
1. On considère un signal de parole de durée 1mn et ayant une bande passante de 10 kHz.

- Calculer le nombre minimal d'échantillons nécessaires pour représenter ce signal.
- En supposant que le signal est échantillonné selon le schéma suivant :



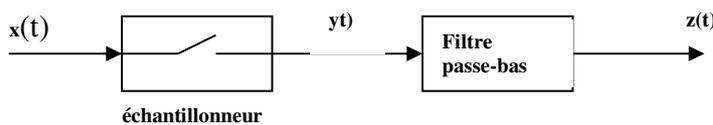
- Exprimer le signal échantillonné $x_e(t)$ et calculer sa transformée de Fourier.
- Montrer que l'on peut reconstituer théoriquement le signal $x(t)$ à partir des échantillons $x(nT_e)$.

On se propose de reconstituer le signal de la façon suivante :



Exprimer $x_r(t)$.

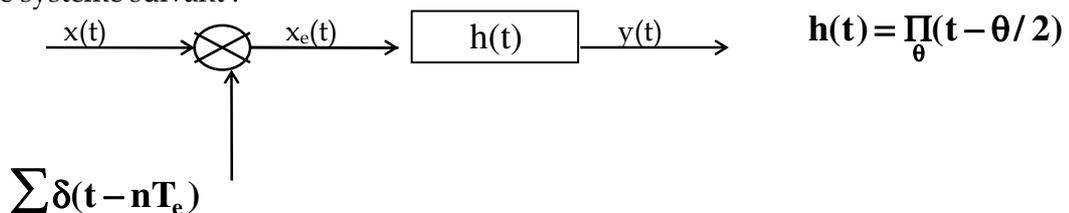
2. Un signal $x(t) = e^{-a|t|}$ avec $a = 2$ est transmis au travers du système représenté sur la figure1



L'échantillonneur est réalisé par un interrupteur qui s'ouvre et se ferme périodiquement à la cadence $f_e = 20\text{Hz}$ avec un temps de fermeture égal à $T_f = 20\text{ms}$. Le filtre passe-bas idéalisé possède un gain unitaire et une réponse de phase nulle. L'atténuation en dehors de cette bande est totale.

- Esquisser l'allure de $y(t)$ et de son spectre d'amplitude $|Y(f)|$;
- Esquisser l'allure de $z(t)$.

3. On considère le système suivant :



- Déterminer l'expression de $x_e(t)$ et déterminer l'expression de $H(f)$.
- Exprimer $X_e(f)$ et $Y(f)$ en fonction de $X(f)$

Solutions

1. $D=60s$ et $f_{max}=5kHz \Rightarrow N_{min}=D/T_{emin}=6.10^5$

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e) \Rightarrow X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e)$$

Reconstruction théorique $\Rightarrow X_R(f) = X_e(f) \frac{1}{f_e} \pi(f) \Rightarrow x_R(t) = \sum_n x(nT_e) * sinc(f_e(t - nT_e))$

Bloqueur d'ordre 0 $\Rightarrow x_R(t) = \sum_n x(nT_e) \frac{\pi}{T_e}(t - nT_e - T_e/2)$

2. Echantillonneur naturel $\Rightarrow y(t) = x(t) \sum_n \pi(t - nT_e)$

$$Y(f) = T_f f_e \sum_n sinc(nf_e T_f) X(f - nf_e) \text{ A.N. } Y(f) = 0.4 \sum_n sinc(0.4n) X(f)$$

$$Z(f) = 0.4 sinc(0.4) X(f) \Rightarrow z(t) = 0.4 sinc(0.4) x(t)$$

3. $x_e(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e) \quad H(f) = \theta sinc(f\theta)e^{-\pi jf\theta} \quad X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e)$

$$Y(f) = \theta f_e \sum_n sinc(nf_e\theta) e^{-\pi jnf_e\theta} X(f - nf_e)$$

TP n°3 : Echantillonnage (sous Python)

1. Fréquence d'échantillonnage

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
import sounddevice as snd
import scipy.io.wavfile as wav
import time

fe,x = wav.read('vousavezducourrierenattente.wav')
snd.play(x, fe)
time.sleep(2)

Te=1/fe; N=len(x); t = np.arange(0,N)*Te
plt.figure(1);plt.subplot(211); plt.plot(t,x); plt.grid(True);
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Phrase');
NF=N
TFx = np.fft.fft(x,NF); TFx = np.fft.fftshift(TFx);
freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*fe/NF;
plt.subplot(212); plt.plot(freq, 20*np.log10(abs(TFx)));
plt.xlabel('Fréq (Hz)');plt.ylabel('Amp'); plt.title('Module de la TFD');

snd.play(x, fe//2)
time.sleep(4)
snd.play(x, 2*fe)
time.sleep(2)
```

2. Théorème de Shannon

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
f0=200; tmin=0; tmax=0.1 ; N=1000
t = np.linspace(tmin, tmax,N) ;
x = np.sin(2.0*np.pi*f0*t) ;
plt.figure(2);plt.subplot(411); plt.plot(t,x);
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp');
fe = 1000; Te=1/fe;
N1 = np.floor((tmax-tmin)/Te)
t1 = np.arange(0,N1)*Te
x1 = np.sin(2.0*np.pi*f0*t1) ;
plt.subplot(412); plt.plot(t,x); plt.stem(t1,x1,'r');
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Signal échantillonné avec fe=%d'%fe);
plt.subplot(413); plt.plot(t,x); plt.plot(t1,x1,'r');
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Signal Reconstitue avec fe=%d'%fe);

# Calculer et Rajouter TFD dans plt.subplot(414);

plt.figure(3);plt.subplot(411); plt.plot(t,x);
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp');
fe = 250; Te=1/fe;
N1 = np.floor((tmax-tmin)/Te)
t1 = np.arange(0,N1)*Te
x1 = np.sin(2.0*np.pi*f0*t1) ;
plt.subplot(412); plt.plot(t,x); plt.stem(t1,x1,'r');
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Signal échantillonné avec fe=%d'%fe);
plt.subplot(413); plt.plot(t,x); plt.plot(t1,x1,'r');
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Signal Reconstitue avec fe=%d'%fe);

# Calculer et Rajouter TFD adns plt.subplot(414);
```

IV. Signaux Numériques et Transformée en Z

La transformée de Fourier est un outil précieux d'analyse et de traitement des signaux. Cependant, dans certains problèmes (comme le filtrage numérique), les limites de la TF sont vite atteintes. La transformée en Z, qui s'applique aux signaux discrets, généralise la TF et permet de dépasser ces limites [10]. Elle est tout-à-fait analogue à la transformée de Laplace, mais plus facile à utiliser. Ce type de transformée permet de décrire aisément les signaux à temps discret et la réponse des systèmes linéaires invariants soumis à des entrées diverses. C'est un outil qui permet de calculer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant décrit par une équation aux différences finies. Elle permet l'interprétation directe des caractéristiques des signaux et des filtres dans le domaine des fréquences [9].

1. Transformée en Z

• Définition : La TZ est la généralisation de la TFD ($X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)e^{-2\pi j f n T_e}$).

Soit un signal discret $x(n)$. Sa TZ est définie par:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} \quad \text{où } z \text{ est une variable complexe définie partout où cette série converge.}$$

En effet, comme cette transformation est une série infinie, elle n'existera que pour les valeurs de z pour lesquelles cette série converge.

Exemples :

- $x(n) = \delta(n) \Rightarrow X(z) = 1,$

- $x(n) = \delta(n-k) \Rightarrow X(z) = z^{-k}, \quad \text{si } k > 0 \text{ RDC} = \mathbb{C} - \{0\} \quad \text{si } k < 0 \text{ RDC} = \mathbb{C} - \{\infty\}$

- $x(n) = (1, 2, 3, 5, 0, 2)$ on peut écrire $x(n) = \delta(n) + 2. \delta(n-1) + 3. \delta(n-2) + 5. \delta(n-3) + 2. \delta(n-5)$

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 2z^{-5} \text{ RDC} = \mathbb{C} - \{0\}$$

La série des puissances introduite dans l'équation de définition de la TZ ne converge que pour un sous-ensemble du plan complexe. Ce sous-ensemble est appelé région de convergence (RDC) ou domaine de convergence. Une région de convergence correspond à l'ensemble des valeurs de z telles que $X(z)$ soit définie et à valeurs finies. Spécifier le domaine de convergence de la transformée est tout aussi important que la transformée elle-même [9].

• Condition d'existence : La transformée existe si la série converge. Pour cela, on utilise le critère de Cauchy $\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n|^{1/n} < 1$ sur la convergence des séries géométriques $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$

L'ensemble des valeurs de la variable complexe z pour lesquelles la série converge est appelée Région De Convergence (RDC):

$$RDC = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n).z^{-n}| < +\infty \right\}$$

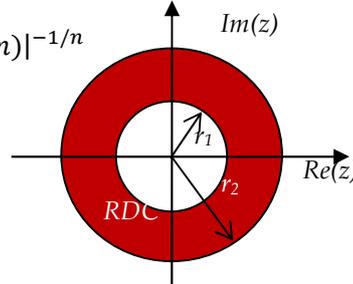
Exemple : TZ{u(n)}

$$U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}, \text{ la limite est finie si } |z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1 \Rightarrow U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ pour } |z| > 1$$

De façon générale, on montre que la RDC est un anneau de convergence centré sur l'origine défini par :

$$r_1 < |z| < r_2 \quad \text{avec } r_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x(n)|^{1/n} \text{ et } r_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x(-n)|^{-1/n}$$

où r_1 peut être réduit à 0 et r_2 peut être égal à $+\infty$.

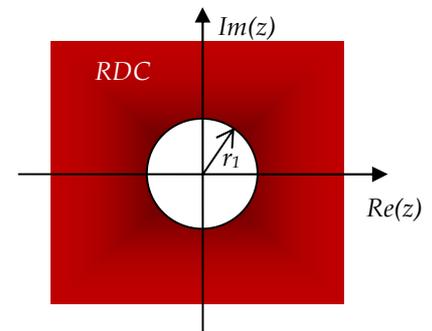
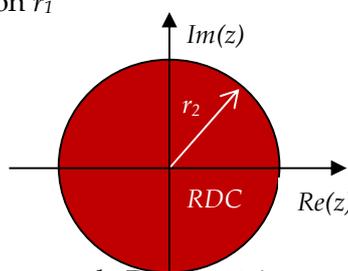


- $x(n)=0$ pour $n < n_0 \Rightarrow r_2 = +\infty$,

RDC = région extérieure au cercle de rayon r_1

- $x(n)=0$ pour $n > n_0 \Rightarrow r_1 = 0$

RDC = disque de rayon r_2



\Rightarrow système anti-causal : RDC cercle. système causal : RDC extérieure au cercle.

Exemples

- Soit $a > 0$, $x(n) = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a}$, convergente pour $|z| > a$.

- Soit $b > 0$, $y(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 0 \\ -b^n & \text{si } n < 0 \end{cases} \Rightarrow Y(z) = \sum_{n<0} -b^n z^{-n} = \frac{z}{z-b}$, convergente pour $|z| < b$.

- Soient $a > 0, b > 0$, $w(n) = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0 \\ b^n & \text{si } n < 0 \end{cases} \Rightarrow W(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-b}$, convergente pour $b > |z| > a$.

Remarque : La TZ de a^n pour $n \in]-\infty, +\infty[$ n'existe pas.

2. Propriétés de la TZ

Les propriétés qui sont les plus utilisées sont résumées comme suit :

Si on définit : $x(n) \xrightarrow{TZ} X(z)$, $x_1(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z)$ et $x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_2(z)$

- Linéarité : $a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n) \xrightarrow{TZ} a \cdot X_1(z) + b \cdot X_2(z)$ RDC intersection des deux RDC

- Théorème du retard : $x(n-k) \xrightarrow{TZ} z^{-k} \cdot X(z)$ RDC : identique

- Théorème de l'avance : $x(n+k) \xrightarrow{TZ} z^k \cdot X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{k-n}$ RDC : identique

- Multiplication par a^n : $a^n x(n) \xrightarrow{TZ} X\left(\frac{z}{a}\right)$ RDC : $a \cdot r_1 < |z| < a \cdot r_2$
- Retournement du temps : $x(-n) \xrightarrow{TZ} X(z^{-1})$ RDC : $1/r_2 < |z| < 1/r_1$
- Convolution : $x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z) \cdot X_2(z)$ et RDC : identique
- Théorème de dérivation : $n \cdot x(n) \xrightarrow{TZ} -z \cdot \frac{dX(z)}{dz}$ RDC : identique
- Théorème de la valeur initiale : si $x(n)=0$ pour $n < 0$ alors $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
- Théorème de la valeur finale : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$

Exemples

1. $\Rightarrow X(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}} \right) = \frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$ avec $|z| > 1$

2. Calculer la transformée en z des fonctions discrètes suivantes. Vérifier que les théorèmes de la valeur initiale et finale s'appliquent : $x(n) = 0,8^n u(n)$ et $y(n) = n0,8^n u(n)$.

$$X(z) = \frac{z}{z-0.8} Y(z) = -z \frac{d\left(\frac{z}{z-0.8}\right)}{dz} = \frac{0.8z}{(z-0.8)^2}$$

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{z}{z-0.8} \right| = 1 \quad y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{0.8z}{(z-0.8)^2} \right| = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{z(z-1)}{z-0.8} \right| = 0 \quad y(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{0.8z(z-1)}{(z-0.8)^2} \right| = 0$$

Quelques TZ

$x(n)$	$X(z)$	Région de convergence
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$U(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n U(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n U(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-a^n U(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$\cos(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{1-z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{1-az^{-1} \cos(\omega_0 T_e)}{1-2az^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n \sin(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0 T_e)}{1-2az^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

3. TZ rationnelles (correspondant aux SLID)

Les systèmes linéaires invariants décrits par une équation aux différences finies possèdent une transformée en Z rationnelle c'est ainsi que celles-ci vont s'écrire comme le rapport de deux polynômes en z^{-1} .

$$\sum_{i=0}^M a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) \xrightarrow{TZ} \sum_{i=0}^M a_i \cdot z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i} X(z)$$

On peut caractériser un système LI par $h(n)$ ou par la transformée en Z ($H(z)$) de sa réponse impulsionnelle $h(n)$, encore appelée fonction de transfert du système.

$$\Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^M a_i \cdot z^{-i}} = \frac{b_0}{a_0} z^{M-N} \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0}{a_0} z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^N (z-z_i)}{\prod_{i=1}^M (z-p_i)} = K z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^N (z-z_i)}{\prod_{i=1}^M (z-p_i)}$$

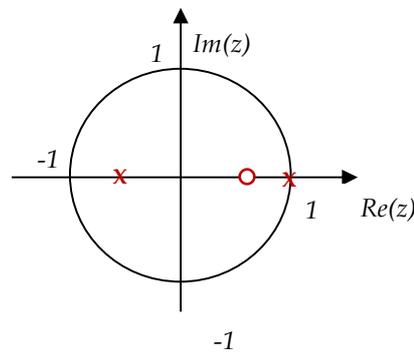
On appelle zéros, les valeurs de z pour lesquelles $H(z)=0$ et on appelle pôles, les valeurs de z pour lesquelles $H(z)$ est infini (annule le dénominateur). C'est ainsi que $H(z)$ possède N zéros (z_i), M pôles (p_i). Si $M > N$, elle possède $(M-N)$ zéros en 0, sinon $(N-M)$ pôles en 0.

Ainsi, la position de ses pôles et de ses zéros (+le facteur d'amplitude $K=b_0/a_0$) va nous fournir une description complète de $H(z)$ (par conséquent de $h(n)$ et $H(f)$) donc du comportement du système. $H(z)$ peut donc être représentée sous la forme d'un cercle modélisant la position des pôle set des zéros dans le plan complexe.

Exemple

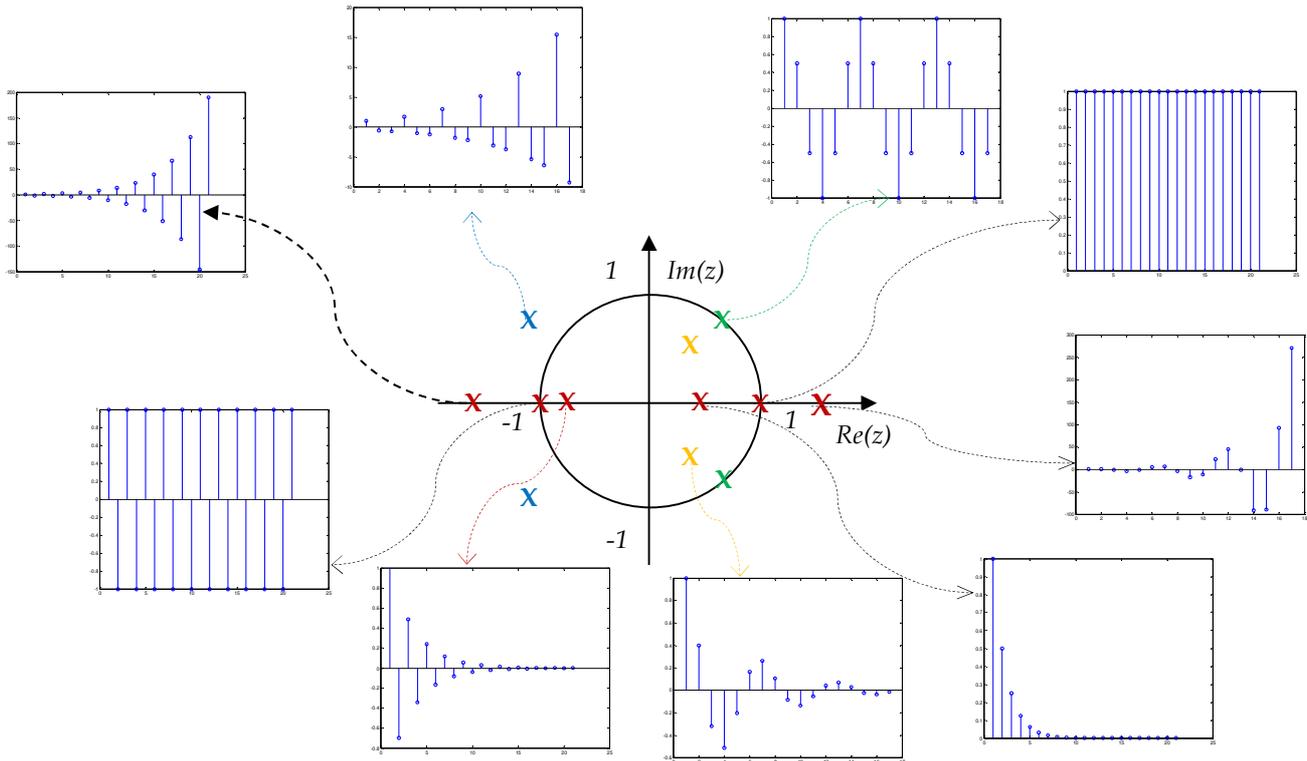
$$H(z) = \frac{3z-2}{(z-1)(z+0.5)}$$

Un zéro en $2/3$ et deux pôles $p_1 = -0.5$ et $p_2 = 1$



Remarques

- Dans la plupart des systèmes, les a_i et le b_i sont réels \Rightarrow les pôles et les zéros sont soit réels soit des paires de complexes conjuguées.
- Rappelons que le rayon d'un système causal se trouve à l'extérieur d'un cercle. Par ailleurs, s'il est stable $\sum_n |h(n)| < \infty$, puisque $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot z^{-n}$, il suffit donc que $z=1$ fasse partie de la RDC.
- Pour un système causal et stable, tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité ($|p_i| < 1, \forall i$). Le domaine de convergence ne peut contenir de pôles puisque la TZ ne converge pas aux pôles. S'il est anti-causal, il sera stable si les pôles sont à l'extérieur du cercle unité.
- Si le filtre est non-récuratif $H(z) = \sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}$. Un filtre RIF a tous ses pôles à l'origine et sera donc toujours stable.



- A un pôle p_i simple ou multiple va correspondre une réponse impulsionnelle qui converge si $|p_i| < 1$. Elle divergera dans le cas contraire, soit si $|p_i| > 1$.
- Sachant qu'à chaque pôle complexe est associé un pôle conjugué cela donnera une réponse impulsionnelle $h(n)$ oscillante (cosinus ou sinus) amorties si $|p_{i=1,2}| < 1$ ou divergentes si $|p_{i=1,2}| > 1$.
- Dans un système à phase minimale, tous les zéros sont à l'intérieur du cercle unité ($|z_i| < 1, \forall i$).

4. Détermination de la réponse fréquentielle des filtres numériques

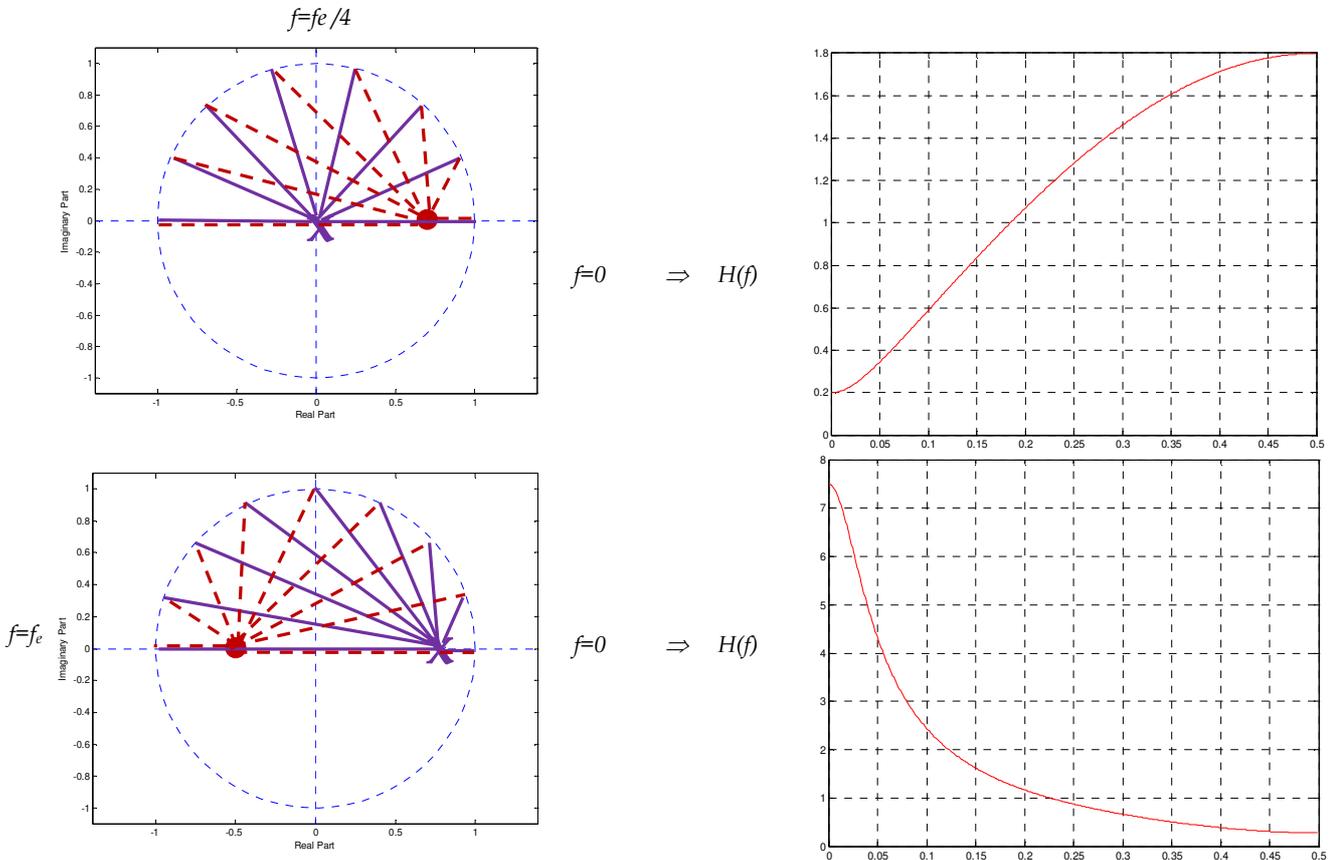
On suppose que le cercle unité ($|z|=1$) \in RDC de $X(z)$. On restreint le calcul de $X(z)$ au cercle unité en posant $z = e^{2\pi j f T_e}$.

Lorsqu'un zéro est placé sur un point donné du plan en z , la réponse fréquentielle sera de 0 au point considéré. Un pôle quant à lui produira un pic au point correspondant. Plus les pôles ou les zéros sont proches du cercle unité, plus ils influencent la réponse en fréquence [11].

- un zéro ou un pôle à l'origine n'influent pas sur le module de la réponse fréquentielle.
- un zéro sur le cercle unité introduit une annulation du module pour la fréquence correspondant
- Un zéro au voisinage du cercle unité introduit une atténuation dans le module de la réponse en fréquence. Atténuation d'autant plus importante que le zéro est proche du cercle unité.
- Un pôle sur le cercle unité introduit une résonance infinie dans le module de la réponse en fréquence pour la fréquence correspondante.

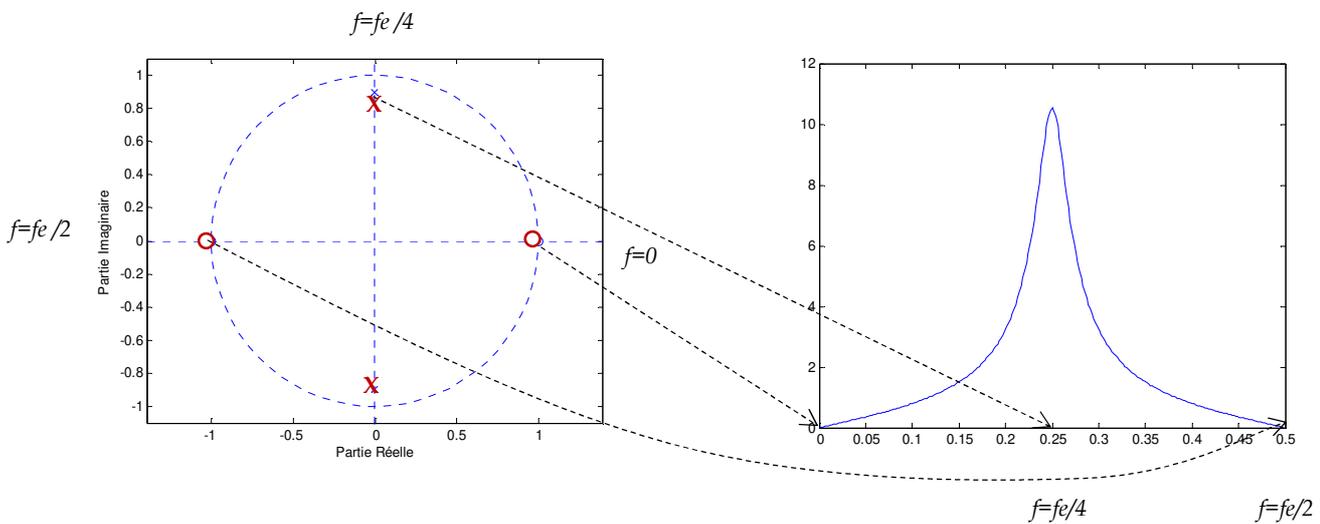
- Un pôle au voisinage du cercle unité introduit une résonance d'autant plus importante dans le module de la réponse en fréquence que le pôle est proche du cercle unité.

Exemples: 1 pôle en 0 et un zéro en 0.7. Pour obtenir l'allure de $H(f)$, on divise le vecteur du numérateur (en rouge) sur celui du dénominateur (en mauve). Et pour le suivant un pôle 0.8 et un zéro en -0.5

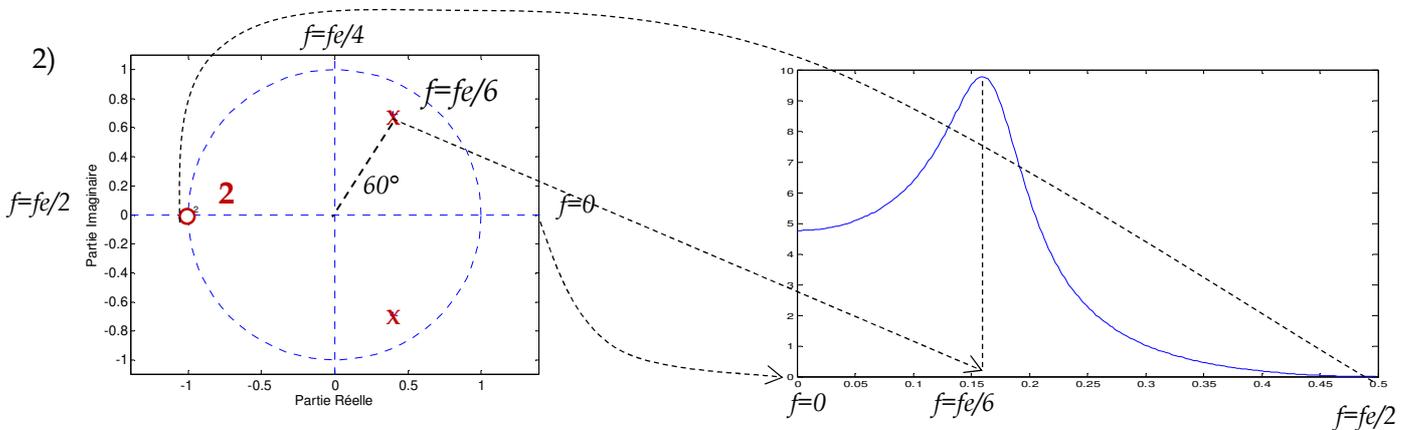


Autres Exemples

1) Sur la figure ci-dessous le cercle complet correspond à une fréquence d'échantillonnage f_e . Des pôles proches du cercle unité sont à l'origine de larges pics tandis que des zéros proches ou sur le cercle unité produisent des minima. Ce tracé nous permettra d'identifier la nature du filtre.



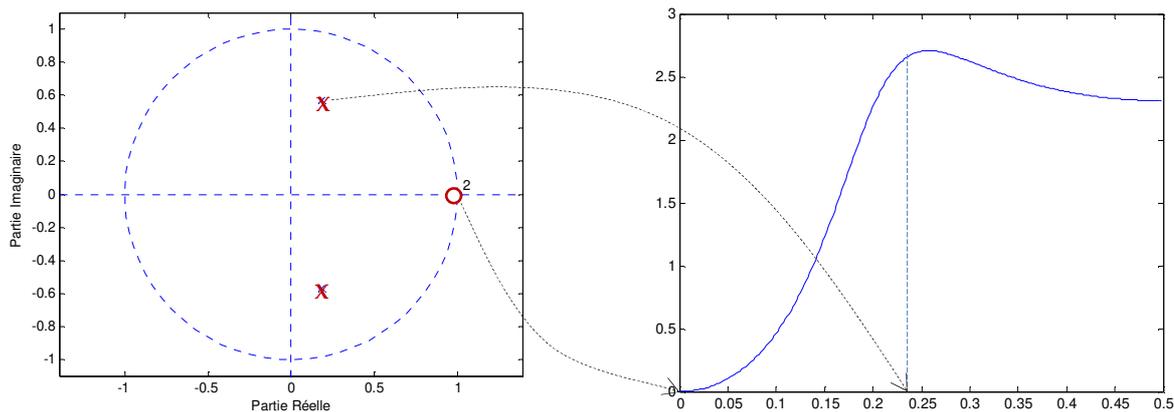
On peut aussi avoir une idée sur son comportement général : passe-bas, passe-haut ou passe-bande, connaître sa ou ses fréquences de coupure.



3) $H(z) = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 0.371z + 0.36} \Rightarrow$ Zéros double en $z = -1$, pôles $p_{1,2} = \pm 0.6e^{j72^\circ}$

- Un zéro double en $z = 1 \Rightarrow |H(f)| = 0$ pour $f = 0$

- Des pôles proches du cercle unité \Rightarrow maxima.



Remarque : Puisque les coefficients du filtre sont réels, les pôles et zéros sont réels (sur l'axe des réels) ou paires de complexes conjugués.

5. Détermination de la réponse impulsionnelle des FN (TZ inverse)

La transformée en Z présente l'avantage d'être plus facilement inversible que la transformée de Fourier. Le passage de la TZ vers $h(n)$ peut se faire par le biais de la transformées en Z de signaux élémentaires connus à condition qu'il soit possible d'écrire $H(z)$ comme la combinaison de transformées élémentaires. Dans le cas contraire, on peut employer l'intégration sur un contour fermé en utilisant le calcul des résidus, ou le développement en puissance de z et de z^{-1} , ou encore le développement en fractions élémentaires [12].

1. La relation générale de la transformée en z inverse est donnée par l'équation donnée par l'intégrale de Cauchy : $x(n) = \frac{1}{2\pi.j} \oint_C X(z).z^{n-1}.dz$, où C est un contour fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre contenant l'origine.

En pratique, on utilise le théorème des résidus: $x(n) = \sum_{p_i \text{ poles de } z^{n-1}X(z)} \text{Res} [z^{n-1}X(z)]_{z=p_i}$

$$\text{Res} [z^{n-1}X(z)]_{z=p_i} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p_i)^m z^{n-1}X(z)]_{z=p_i}$$

Exemple: $X(z) = \frac{z}{z-e^a} \Rightarrow p_i=e^a \Rightarrow \text{Res} [z^{n-1}X(z)]_{z=e^a} = [z^n]_{z=e^a} = e^{an} \cdot u(n)$

2. Transformée inverse par division polynômiale : Il est possible de calculer la transformée en Z inverse selon les puissances croissantes de z^{-1} (système causal) ou selon les puissances décroissantes de z (système anti-causal).

Exemples $X(z) = \sum_n C_n z^{-n} \xrightarrow{TZ^{-1}} x(n) = C_n$

- $y(n)=y(n-3)+x(n) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-z^{-3}} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-k})^3 = 1 + z^{-3} + z^{-6} + \dots \Rightarrow h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-3k)$

- $X(z) = \frac{1}{1-a.z^{-1}}$ pour $|z| > a$

Domaine de convergence extérieur à un cercle \rightarrow signal causal \rightarrow division pour avoir une série en z^{-1} .

1	1-a.z ⁻¹	
-1+a.z ⁻¹	1 + a.z ⁻¹ + a ² .z ⁻² +	
0 + a.z ⁻¹		x[0]
-a.z ⁻¹ + a ² .z ⁻²		x[1]
0 + a ² .z ⁻²		x[2]
	

On obtient : $\frac{1}{1-a.z^{-1}} = 1 + a.z^{-1} + a^2.z^{-2} \Rightarrow x(n) = a^n \cdot u(n)$

- $X(z) = \frac{1}{1-a.z^{-1}}$ pour $|z| < a$

Région de convergence intérieure à un cercle \rightarrow signal anti-causal \rightarrow division pour avoir une série en z .

z	-a+z	
-z+a ⁻¹ .z ²	-a ⁻¹ .z - a ⁻² .z ² - a ⁻³ .z ³ -	
0 + a ⁻¹ .z ²		x[-1]
-a ⁻¹ .z ² + a ⁻² .z ³		x[-∞]
0 + a ⁻² .z ³		
.....		

On obtient : $\frac{1}{1-a.z^{-1}} = -a^{-1}.z - a^{-2}.z^2 - \dots \Rightarrow x(n) = -a^n \cdot u(-n-1)$

Notons que la division peut se réaliser sans faire apparaître une expression analytique générale.

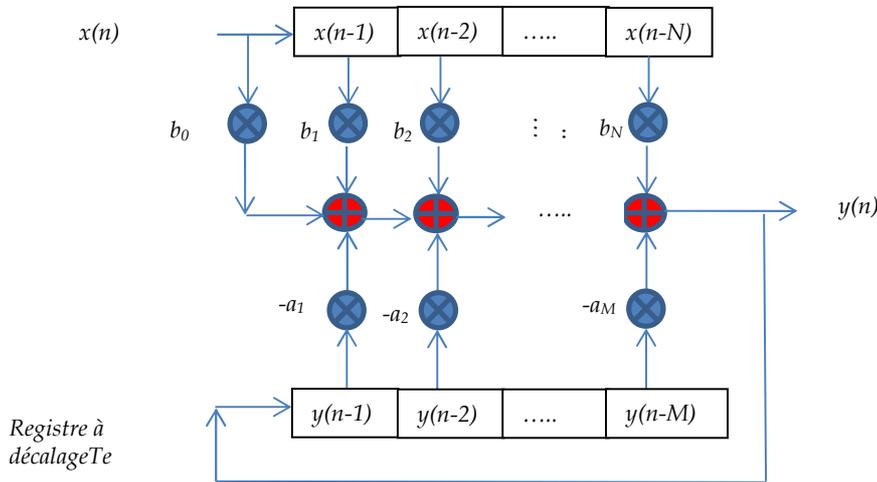
3. L'idée générale de cette approche consiste à trouver pour une fonction X(z) complexe un développement en fonctions en Z plus simples et pour lesquelles une transformée inverse est connue: $X(z) = \sum_i X_i(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} x(n) = \sum_i x_i(n)$

où les X_i(z) sont des fonctions dont les TZ⁻¹ sont connues

6. Structure des filtres numériques

L'application d'un filtre numérique implique le calcul de la sortie $y(n)$ à l'instant $t=nT_e$ à partir des sorties et entrées précédentes plus la valeur courante de l'entrée.

$$\sum_{i=0}^M a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) \quad \text{En prenant } a_0=1, \text{ on obtient}$$



Un filtre numérique est généralement constitué des éléments suivants :un ou plusieurs organes de retard (ce sont des registres à décalage jouant le rôle de mémoires retardées), pilotés par une horloge de période; des opérateurs arithmétiques (additionneurs et multiplieurs); des registres fournissant les coefficients de pondération du filtre [18]. Ainsi, à chaque top d'horloge T_e , les valeurs des registres subissent un décalage permettant de calculer la nouvelle sortie. Cette structure peut être aussi réalisée par logiciel.

Solutions

1. $X(z) = 1 + 0,5 z^{-1} + 0,25 z^{-2} - 1 z^{-3} - 0,5 z^{-4}$ RDC=C-\{0\}

2. $X(z) = \frac{z(2z-0.75)}{(z-0.5)(z-0.25)} \quad |z| > 0.5 \quad Y(z) = \frac{-0.25z}{(z-0.5)(z-0.25)} \quad 0.25 < |z| < 0.5 \quad N'existe pas$

3. $(1-z^N)/(1-z^{-1})$

4. $H(z)=z^2/(z^2-3z+2)$ causal pour $|z| > 2$ mais instable avec $x(n)=(2^{n+1}-1)U(n)$

$H(z)=0.375 (1/(3z-1)+1/(0.33z-1))$ causal pour $|z| > 3$ instable avec $x(n)=0.375(3^n - 0.33^n)U(n)$

6. $y(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n U(n) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n U(n)$ 10. $x(n) = 0.8^n \cos \left[\frac{\pi}{4} (n - 1) \right] U(n)$
 $x(n) = (n + 1)a^n U(n + 1) - 2na^{n-1} U(n) + (n - 1)a^{n-2} U(n - 1)$

Exercices supplémentaires

1. Soit $y(n) = x(n) + ax(n-1) + by(n-1)$, l'équation aux différences d'un système discret causal.

- a) Trouvez $h(n)$, la réponse impulsionnelle de ce système ; pour quelles valeurs de a et b le système est- il stable
- b) Trouvez la réponse impulsionnelle du système formé par la mise en série de deux systèmes $h(n)$.
- c) Même question pour la mise en parallèle de deux systèmes $h(n)$.

Réponses : a) $h(n) = b^n u(n) + ab^{n-1} u(n-1)$; stable pour a finie et $|b| < 1$.

b) $h(n)*h(n) = (n+1)b^n u(n) + (2nab^{n-1} + (n-1)a^2 b^{n-2})u(n-1)$ c) $2h(n) = 2b^n u(n) + 2ab^{n-1} u(n-1)$

2. On considère un système linéaire régi par l'équation aux différences suivante :

$y(n) = (x(n+m) + x(n+m-1) + x(n+m-2))/3$ où m est un paramètre entier.

-Montrer que ce système est linéaire invariant dans le temps. Etudier la causalité et la stabilité selon les valeurs de m .

-Calculer la fonction de transfert $H(z)$ de ce système pour $m=0$ et $m=1$.

-En déduire la réponse fréquentielle.

Réponses Le système est causal si $m < 1$ et toujours stable. Pour $m=0, H(z)=1/3(1+z^{-1}+z^{-2})$,

$H(f) = 0.33(1 + 2 \cos(2\pi fT_e))e^{-2j\pi fT_e}$ (filtre RIF passe-bas à phase linéaire). Pour $m=1$, de même filtre moyennneur

3. Déterminer en utilisant la décomposition en éléments simples, la forme du signal $x(n)$ dont la TZ est donnée par :

$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$ avec $|z| > 2$ et $X(z) = \frac{z^2}{z^2 - (a+1)z + a}$ avec $|a| < 1$

Réponses : $x(n) = (2^{n+1} - 1)u(n)$ $x(n) = 1/(1-a) + a^n a / (a-1) = (1-a^{n+1}) / (1-a)$

4. On considère que l'équation aux récurrences du système suivant est donnée comme suit :

$y(n) = 0.9 y(n-1) - 0.81 y(n-2) + x(n) + 2 x(n-1) + x(n-2)$

- Etudier la causalité et l'invariance de ce système
- Est-ce un filtre RIF ou RII ?
- Déterminer $H(z)$ et donner le tracé des pôles et zéros, en déduire le rôle de ce filtre :
- Donner les allures approximatives de $h(n)$ et $|H(f)|$
- Déterminer $h(n)$ et tracer la pour les 3 premières valeurs

TP n°4 Analyse des filtres numériques par la TZ (sous Matlab)

Rappel : Soit $H(z)$ la transformée en z d'un filtre numérique donné dont la décomposition sous forme fraction rationnelle est donnée par :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Mz^{-M}}$$

Grâce à la seule connaissance du vecteur b et du vecteur a , on peut analyser tout filtre et :

- Déterminer les pôles et les zéros du filtre (et étudier sa stabilité)
- Déterminer la réponse impulsionnelle ou indicielle
- Déterminer la réponse fréquentielle et le retard de groupe (dérivée de la phase), etc.

Quelques fonctions utiles[16]

$s = \text{filter}(b, a, e)$: filtre numériquement les données stockées dans le vecteur e avec le filtre décrit à la fois par le vecteur b (coefficients du numérateur de $H(z)$) et le vecteur a (coefficients du dénominateur de $H(z)$) pour une entrée e . Il faut normaliser l'équation de telle sorte que $a_0 = 1$.

Pour déterminer la réponse indicielle e sera un dirac, pour la réponse impulsionnelle e sera un échelon.

$[H, f] = \text{freqz}(b, a, N, fe)$: retourne N valeurs du gain complexe (Réponse fréquentielle TFD) du filtre numérique échantillonné à la fréquence fe (Hertz), décrit par b et a . Ces valeurs sont stockées dans H et calculées pour N fréquences mises dans f . Les fréquences sont equi-espacées sur l'intervalle $[0, fe/2]$.

$[b,a]=\text{invfreqz}(H,f, nb, na)$: retourne le numérateur b (d'ordre nb) et le dénominateur a (d'ordre na) à partir de la réponse fréquentielle donnée par H et f .

$[h, n] = \text{impz}(b, a, N, fe)$: retourne la réponse impulsionnelle du filtre numérique décrit par b et a . La réponse impulsionnelle est calculée en N instants stockés dans n et espacés de $1/fe$, les valeurs de réponse correspondante sont stockées dans h .

$[\text{tau},f]=\text{grpdelay}(b,a,N,fe)$: retourne le retard de groupe (dérivée de la phase) du filtre numérique décrit par b et a . La réponse impulsionnelle est calculée en N fréquences mises dans f .

$\text{zplane}(b,a)$: permet de tracer les pôles et les zéros dans le plan complexe.

I. Analyse d'un filtre RII

Soit le filtre $h(n)$ décrit par l'équation aux différences suivantes :

$$y(n) = 1.2 y(n-1) - 0.516 y(n-2) + 0.079 x(n) + 2 * 0.079 x(n-1) + 0.079 x(n-2)$$

- La première étape consiste à déterminer les vecteurs a et b . On calcule $H(z)$ (coefficients en z^{-1}) et on trouve :
 Numérateur : $b = [0.079 \ 2*0.079 \ 0.079]$ et Dénominateur : $a = [1 \ -1.2 \ 0.516]$

- Puis, par programme on peut : déterminer et tracer la réponse impulsionnelle, la réponse fréquentielle (module et phase), le retard de groupe, les pôles et les zéros, étudier la stabilité, la nature du filtre, etc.

```

clc ; clear all ; close all ;
b = [0.079 2*0.079 0.079]; %Numérateur
a = [1 -1.2 0.516]; %Dénominateur
figure (1); zplane(b,a);
N = 32; n=0:N-1; delta = [1; zeros(N-1,1)];
h = filter(b, a, delta); figure(2); stem(n,h);
echelon=ones(1,N); h_ind=filter(b,a,echelon);
figure(3); stem(n,h_ind);
L = 256; fe=1; [H,f] = freqz(b,a,L,fe);
module = abs(H); figure (4); plot(f,module);
% phase = angle(H); figure (5); plot(f,phase);
% [num,den]=invfreqz(H,f, 2,2)
    
```

1. Calculer les pôles et zéros de ce filtre (à préparer), correspondent-ils à ceux de la figure 1 ?
2. A partir du tracé des pôles et des zéros, esquisser l'allure de $h(n)$ et $H(f)$ en justifiant vos réponses (à préparer). Confirmer avec les figures 2 et 4.
3. Etudier la stabilité du filtre (à partir du tracé des pôles et de $h(n)$). Quel est le rôle de ce filtre?
4. Quelle valeur de b faut-il changer pour faire de ce filtre un passe-haut?
5. Modifier les valeurs de a pour avoir une réponse impulsionnelle divergente. Le filtre obtenu est-il stable?
6. Rétablir les valeurs par défaut et rajouter les lignes suivantes

```
nom_fich = uigetfile('*.wav', 'Selectionner le fichier son');
[x, fe]=wavread(nom_fich);
sound(x, fe); N=length(x); t=(0:N-1)/fe;
figure; subplot(2,1,1); plot(t, x);
legend('Son original'); xlabel('Temps (s)'); ylabel('Amplitude'); axis([0 N/fe -1 1.5]);
y = filter(b, a, x); sound(y, fe)
subplot(2,1,2); plot(t, y);
legend('Son filtré'); xlabel('Temps (s)'); ylabel('Amplitude'); axis([0 N/fe -1 1.5]);
```

7. Comparer les deux signaux en utilisant le zoom et commenter.
8. Prendre une petite portion du signal et observer sa TF avant et après filtrage en commentant.
9. Créer un signal composé de la somme de 2 sinusoides de fréquences 0.1 et 0.4 puis observer le signal avant et après filtrage.

II. Analyse d'un filtre RIF

On considère la récurrence suivante : $y(n)=0.5 x(n)-0.5 x(n-1)$

1. Déterminer $h(n)$, les pôles et zéros et esquisser $H(f)$. En déduire le rôle de $H(f)$, puis calculer le retard de groupe (en préparation).
2. Vérifier ces réponses par matlab.
3. Que peut-on dire sur la stabilité, la nature de ce filtre?
4. Quelle serait la sortie d'un tel filtre si l'entrée était constante?
5. Rétablir les valeurs par défauts et rajouter les lignes concernant le fichier audio puis commenter.
6. Prendre la même portion du signal et observer sa TF avant et après filtrage en commentant.
7. Créer un signal composé de la somme de 2 sinusoides de fréquences 0.1 et 0.4 puis observer le signal avant et après filtrage.
8. Refaire le même travail pour $y(n)=\frac{1}{5}\sum_{i=0}^4 x(n-i)$

TP n°4: Analyse des filtres numériques par la TZ (sous Python)

Rappel : Soit $H(z)$ la transformée en z d'un filtre numérique donné dont la décomposition sous forme fraction rationnelle est donnée par :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Mz^{-M}}$$

Grâce à la seule connaissance du vecteur b et du vecteur a , on peut analyser tout filtre et :

- Déterminer les pôles et les zéros du filtre (et étudier sa stabilité)
- Déterminer la réponse impulsionnelle ou indicielle
- Déterminer la réponse fréquentielle et le retard de groupe (dérivée de la phase), etc.

Quelques fonctions utiles

$s = \text{scipy.signal.lfilter}(b, a, e)$: filtre numériquement les données stockées dans le vecteur e avec le filtre décrit à la fois par le vecteur b (coefficients du numérateur de $H(z)$) et le vecteur a (coefficients du dénominateur de $H(z)$) pour une entrée e . Si $a_0 \neq 1$, b et a seront divisés par a_0 .

$z, p, k = \text{scipy.signal.tf2zpk}(b, a)$ retourne les zéros, les pôles et le gain du filtre dont les coefficients du numérateur (respectivement dénominateur) sont donnés par b (respectivement a)

$f, H = \text{scipy.signal.freqz}(b, a, N, fe)$: retourne N valeurs du gain complexe (Réponse fréquentielle TFD) du filtre numérique échantillonné à la fréquence fe (Hertz), décrit par b et a . Ces valeurs sont stockées dans H et calculées pour N fréquences mises dans f . Les fréquences sont équi-espacées sur l'intervalle $[0, fe/2]$.

$\text{zplane}(b, a)$: permet de tracer les pôles et les zéros dans le plan complexe. `scatter(real(p), imag(p))`
`scatter(real(z), imag(z))`

I. Analyse d'un filtre RII

Soit le filtre $h(n)$ décrit par l'équation aux différences suivantes :

$$y(n) = 1.2 y(n-1) - 0.516 y(n-2) + 0.079 x(n) + 2 * 0.079 x(n-1) + 0.079 x(n-2)$$

- La première étape consiste à déterminer les vecteurs a et b . On calcule $H(z)$ (coefficients en z^{-1}) et on trouve : Numérateur: $b = [0.079 \quad 2 * 0.079 \quad 0.079]$ et Dénominateur: $a = [1 \quad -1.2 \quad 0.516]$
- Puis, par programme on peut : déterminer et tracer la réponse impulsionnelle, la réponse fréquentielle (module et phase), les pôles et les zéros, étudier la stabilité, la nature du filtre, etc.

```
import numpy as np; import scipy.signal as sp; import matplotlib.pyplot as plt
from plot_zplane import zplane
b = np.array([0.079, 2*0.079, 0.079]); a = np.array([1, -1.2, 0.516]);
plt.figure(1)
z, p = zplane(b, a)
delta = np.zeros(32); delta[0] = 1; h = sp.lfilter(b, a, delta) ;
Echelon = np.ones(32); h_ind = sp.lfilter(b, a, Echelon)
plt.figure(2); plt.subplot(211); plt.stem(h)
plt.title('Réponse impulsionnelle'); plt.grid(True); plt.ylabel('Amplitude')
plt.subplot(212); plt.stem(h_ind)
plt.title('Réponse Indicielle'); plt.grid(True); plt.ylabel('Amplitude'); plt.show()
L = 256; fe = 1; f, H = sp.freqz(b, a, L, fs = fe);
plt.figure(3); plt.subplot(211); plt.plot(f, np.abs(H))
plt.title('Module du Filtre'); plt.grid(True); plt.xlabel('Fréquence (Hz)'); plt.ylabel('Amplitude')
plt.subplot(212); plt.plot(f, np.angle(H))
plt.title('Phase du Filtre'); plt.grid(True); plt.xlabel('Fréquence (Hz)'); plt.ylabel('Amplitude')
```

1. Calculer les pôles et zéros de ce filtre (à préparer), correspondent-ils à ceux de la figure 1 ?
2. A partir du tracé des pôles et des zéros, esquisser l'allure de $h(n)$ et $H(f)$ en justifiant vos réponses (à préparer). Confirmer avec les figures.
3. Etudier la stabilité du filtre (à partir du tracé des pôles et de $h(n)$). Quel est le rôle de ce filtre?
4. Quelle valeur de b faut-il changer pour faire de ce filtre un passe-haut?
5. Modifier les valeurs de a pour avoir une réponse impulsionnelle divergente. Le filtre obtenu est-il stable?
6. Rétablir les valeurs par défaut et rajouter les lignes suivantes

```
import sounddevice as snd; import scipy.io.wavfile as wav
import scipy.signal as sp; import time

fe,x = wav.read('vousavezducourrierenattente.wav')
snd.play(x, fe)
y = sp.lfilter(b,a,x) ;
y = np.uint8((y-min(y))*255/(max(y)-min(y)))
time.sleep(2)
snd.play(y, fe)
Te=1/fe; N=len(x); t = np.linspace(0, N-1, N)*Te;

plt.figure(5);plt.subplot(211); plt.plot(t,x); plt.grid(True);
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Phrase');
plt.subplot(212); plt.plot(t,y); plt.grid(True);
plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Phrase Filtrée');

NF=N
TFx = np.fft.fft(x,NF); TFx = np.fft.fftshift(TFx); freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*fe/NF;
TFy = np.fft.fft(y,NF); TFy = np.fft.fftshift(TFy); freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*fe/NF;

plt.figure(6); plt.plot(freq, 20*np.log10(abs(TFx)));
plt.plot(freq, 20*np.log10(abs(TFy)));
plt.title('Module du signal Filtré (orange)+ Signal original (bleu)');
plt.xlabel('Fréq (Hz)');plt.ylabel('Amp');
```

7. Comparer les deux signaux en utilisant le zoom et commenter.
8. Prendre une petite portion du signal et observer sa TF avant et après filtrage en commentant.
9. Créer un signal composé de la somme de 2 sinusoides de fréquences 0.1 et 0.4 puis observer le signal avant et après filtrage.

II. Analyse d'un filtre RIF

On considère la récurrence suivante : $y(n)=0.5 x(n)-0.5 x(n-1)$

1. Déterminer $h(n)$, les pôles et zéros et esquisser $H(f)$. En déduire le rôle de $H(f)$, puis calculer le retard de groupe (en préparation).
2. Vérifier ces réponses par programme.
3. Que peut-on dire sur la stabilité, la nature de ce filtre ?
4. Quelle serait la sortie d'un tel filtre si l'entrée était constante ?
5. Rétablir les valeurs par défauts et rajouter les lignes concernant le fichier audio puis commenter.
6. Prendre la même portion du signal et observer sa TF avant et après filtrage en commentant.
7. Créer un signal composé de la somme de 2 sinusoides de fréquences 0.1 et 0.4 puis observer le signal avant et après filtrage.
8. Refaire le même travail pour $y(n)=\frac{1}{5}\sum_{i=0}^4 x(n-i)$

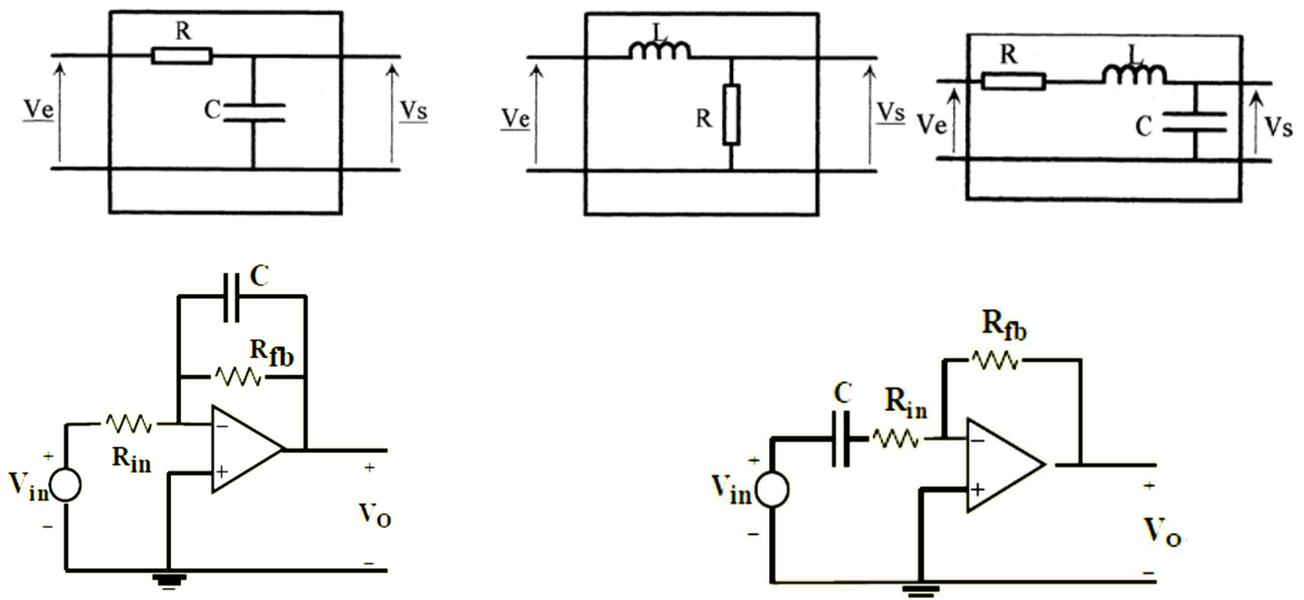
Annexe : Rappels Filtrés Analogiques

Pour concevoir un filtre analogique, on peut employer des filtres passifs obtenus par combinaison de résistances, de condensateurs et/ou de bobines ou encore utiliser des filtres actifs comportant un élément amplificateur (transistor, AO, etc.) qui permet donc de modifier les amplitudes des signaux. Ainsi, un filtre passif de base (de premier ordre) peut être composé d'une cellule RC ou d'une cellule RL.

Il faut noter que :

- les filtres numériques sont limités à des fréquences $< 100\text{MHz}$
- les filtres passifs (L,C, quartz, etc ;) sont utilisés pour les hautes fréquences
- les filtres actifs (R,C, ALI) utilisent des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) limités à 1Mhz
- les filtres à capacité commutés (R et C intégrés, ALI, Interrupteur commandé MOS) ont des fréquences ($<10\text{Mhz}$) programmables.

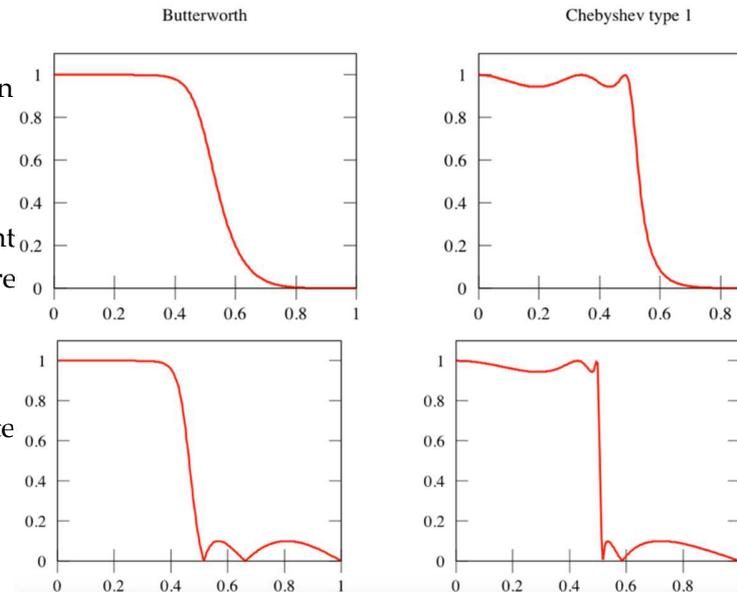
Ci-dessous, sont donnés quelques exemples de structure pour des filtres passifs passe-bas de premier et second ordre suivis de filtres actifs passe-bas de premier et second ordre aussi.



Pour obtenir des filtres d'ordre N plus élevé, on emploiera des filtres du premier et du deuxième ordremis en cascade. Les pentes asymptotiques seront proportionnelles au nombre de cellules ($+N \uparrow$ et $+\Delta f \downarrow$). A noter également que les filtres passe-bas ou passe-haut peuvent avoir un nombre entier d'ordre (1, 2, 3...) tandis que les filtres passe-bande ou coupe-bande ne peuvent qu'avoir un ordre pair (2, 4, 6, ...) car ils sont formés de paires de cellules : 2 cellules RC ou une cellule RC et une cellule RL.

Pour synthétiser des filtres analogiques répondant à un gabarit donné, on choisira parmi un ensemble de filtres analogiques testés et éprouvés donc connus pour leurs propriétés en termes de pente d'atténuation et d'ondulation dans la bande passante et atténuée telles que :

- Filtres de Butterworth : Coupure peu raide mais gain constant en bande passante
- Filtres de Tchebychev (Chebyshev) : Raideur de coupure importante mais ondulations dans la bande passante (Chebyshev 1) ou atténuée (Chebyshev 2) et simple à mettre en oeuvre
- Filtres de Caer (dit aussi elliptiques) : Coupure extrêmement raide mais ondulations dans la bande passante et atténuée mais circuits plus complexes à réaliser.
- Filtres de Bessel : Retard de groupe constant mais mauvaise sélectivité même pour ordre élevé.



Remarque : Le filtre de Bessel est intéressant pour filtrer les signaux large bande (modulations HF haut débit : PSK, 8-PSK, OFDM...) en préservant les phases. Il n'a pas intérêt dans le domaine du filtrage numérique.

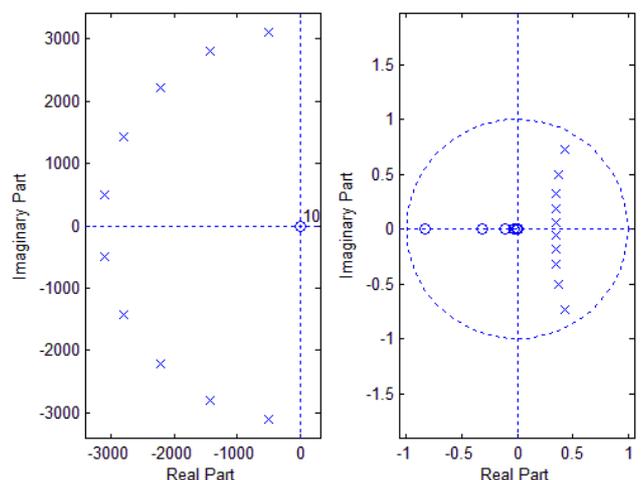
1. Un filtre de Butterworth est caractérisé par le fait que la réponse d'amplitude est maximale plate dans la bande passante et monotonement décroissante à partir d'une certaine fréquence (fréquence de coupure).

L'amplitude d'un filtre analogique Passe-bas de Butterworth d'ordre N est définie par l'expression :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}} \quad \text{ou} \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

ω_c est la pulsations de coupure limites et ϵ est un paramètre de conception qui fixe la région de tolérance dans la bande passante $\delta_1 = 1/(1+\epsilon^2)^{1/2}$. Le filtre analogique aura N pôles placés sur le cercle unité (à partie réelle négative).

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$p^2 + \sqrt{2}p + 1$
3	$(p^2 + p + 1)(p + 1)$
4	$(p^2 + 1.8477p + 1)(p^2 + 0.7653p + 1)$
5	$(p^2 + 1.6180p + 1)(p^2 + 0.6180p + 1)(p + 1)$
6	$(p^2 + 1.9318p + 1)(p^2 + \sqrt{2}p + 1)(p^2 + 0.5176p + 1)$



L'ordre N est déterminé par la zone de transition ($\omega_a - \omega_p$) et les ondulations permises en bande passante $A_p = 20 \log(1 + \delta_1)$ et bande atténuée ($A_a = -\log \delta_2$)

$$N \geq \frac{\log\left(10^{\frac{A_a}{20}} - 1\right)}{2 \log(\omega_a / \omega_p)}$$

$$N \geq \frac{\log\left(\left(10^{\frac{A_a}{20}} - 1\right) / \left(10^{\frac{A_p}{20}} - 1\right)\right)}{2 \log(\omega_a / \omega_p)} = \frac{\log\left(\left(\frac{1}{\delta_2^2} - 1\right) / \left(\frac{1}{\delta_1^2} - 1\right)\right)}{2 \log(\omega_a / \omega_p)}$$

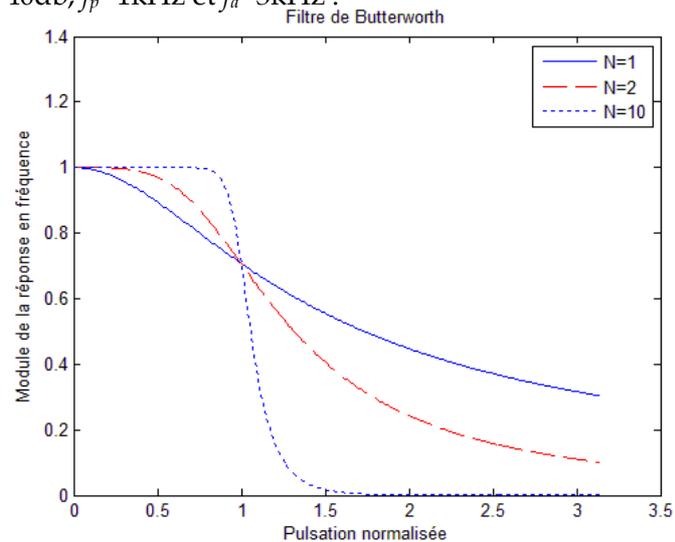
Remarque :

Plus N est élevé, plus grande est la sélectivité (zone de transition Δf étroite) mais un filtre RII de fait de sa récursivité a une période d'initialisation avant le régime permanent qui augmente avec l'ordre du filtre. En outre, son déphasage augmente avec l'ordre du filtre.

Exemple : On souhaite réaliser un filtre passe-bas de gain unitaire ne comportant pas d'oscillations ni dans la bande passante, ni dans la bande atténuée tel que : $A_p = 1 \text{ dB}$, $A_a = 40 \text{ dB}$, $f_p = 1 \text{ kHz}$ et $f_a = 3 \text{ kHz}$.

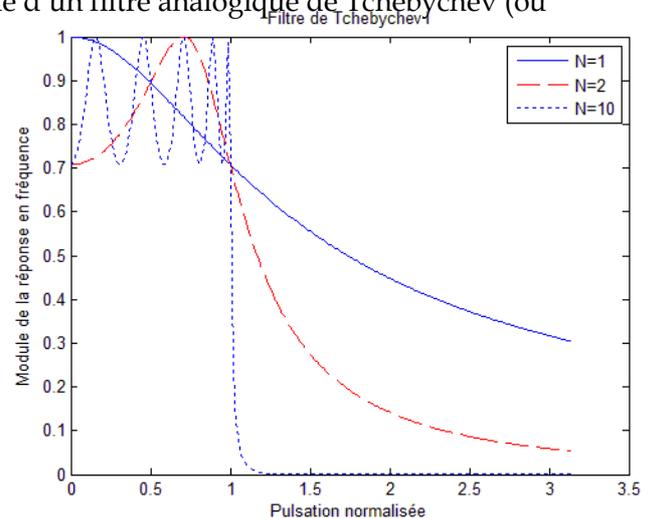
Déterminer le filtre et N.

Filtre : Butterworth $N \geq \frac{\log\left(10^4 / 0.2589\right)}{2 \log(3/1)} = 4.80 \approx 5$



2. Un filtre de Tchebychev est caractérisé généralement par une ondulation équilibrée dans la bande coupée. La forme analytique du module de réponse fréquentielle d'un filtre analogique de Tchebychev (ou Chebyshev) d'ordre N est donnée par :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cdot T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}}$$



Où ϵ est un paramètre réel inférieur à l'unité qui détermine l'amplitude des oscillations dans la bande passante et où $T_N(x)$ est le polynôme de Tchebychev d'ordre N, définie par :

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos[N \cdot \arccos(x)] & \text{pour } 0 \leq |x| \leq 1 \\ \cosh[N \cdot \operatorname{arccosh}(x)] & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases}$$

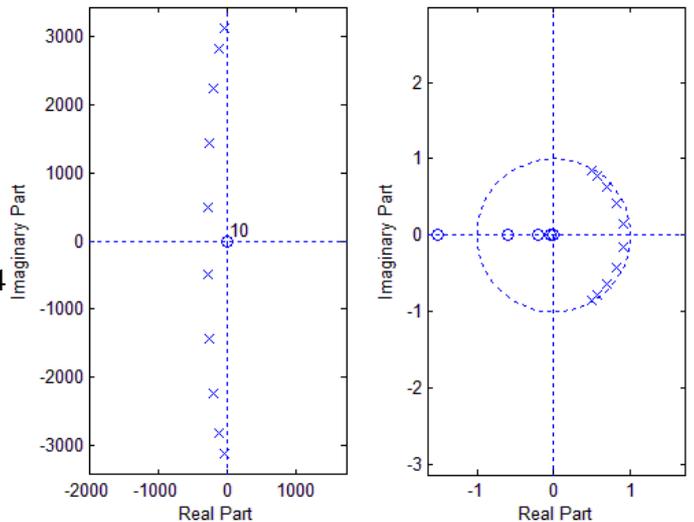
L'ordre N est déterminé par la zone de transition ($\omega_a - \omega_p$) et les ondulations permises en bande passante $A_p = 20 \log(1 + \delta_1)$ et bande atténuée ($A_a = -\log \delta_2$) *

$$N \geq \frac{\log \left(\frac{\sqrt{\left(10^{\frac{A_a}{20}} - 1\right)} / \left(10^{\frac{A_p}{20}} - 1\right) + \sqrt{\left(10^{\frac{A_a}{20}} - 1\right)} / \left(10^{\frac{A_p}{20}} - 1\right) - 1}{\log \left(\omega_a / \omega_p + \sqrt{\left(\omega_a / \omega_p\right)^2 - 1} \right)} \right)}{\log \left(\omega_a / \omega_p + \sqrt{\left(\omega_a / \omega_p\right)^2 - 1} \right)} \quad N \geq \frac{\log \left(2 \cdot 10^{\frac{A_a}{20}} / \sqrt{\left(10^{\frac{A_p}{20}} - 1\right)} \right)}{\log \left(\omega_a / \omega_p + \sqrt{\left(\omega_a / \omega_p\right)^2 - 1} \right)}$$

Exemple

On souhaite réaliser un filtre passe-bas de gain unitaire avec un filtre de Tchebychev tel que : $A_p = 1\text{db}$, $A_a = 40\text{db}$, $f_p = 1\text{kHz}$ et $f_a = 3\text{kHz}$. Déterminer N.

$$N \geq \frac{\log \left(2 \cdot 10^{\frac{A_a}{20}} / \sqrt{\left(10^{\frac{A_p}{20}} - 1\right)} \right)}{\log \left(\omega_a / \omega_p + \sqrt{\left(\omega_a / \omega_p\right)^2 - 1} \right)} = \frac{2.100 / 0.5089}{\sqrt{3 + \sqrt{8}}} = 3.39 \approx 4$$



Dans la pratique, on utilise trois valeurs d'ondulation, $\epsilon = 0.1 \text{ dB}$, 0.5 dB et 1 dB . Pour ces 3 valeurs $H_N(p)$ est donnée :

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)	Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$0.3017 p^2 + 0.7158 p + 1$	2	$0.6595 p^2 + 0.9402 p + 1$
3	$(0.5918 p^2 + 0.5736 p + 1)(1.031 p + 1)$	3	$(0.8753 p^2 + 0.5483 p + 1)(1.596 p + 1)$
4	$(0.7518 p^2 + 0.3972 p + 1)(1.6053 p^2 + 2.0475 p + 1)$	4	$(0.9402 p^2 + 0.3297 p + 1)(2.8057 p^2 + 2.3755 p + 1)$
5	$(0.8368 p^2 + 0.2787 p + 1)(1.5725 p^2 + 1.3712 p + 1)(1.855 p + 1)$	5	$(2.0974 p^2 + 1.2296 p + 1)(0.9654 p^2 + 0.2161 p + 1)(2.759 p + 1)$

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$0.9070 p^2 + 0.9956 p + 1$
3	$(1.0058 p^2 + 0.497 p + 1)(2.023 p + 1)$
4	$(1.0136 p^2 + 0.2828 p + 1)(3.5791 p^2 + 2.4113 p + 1)$
5	$(2.3293 p^2 + 1.0911 p + 1)(1.0118 p^2 + 0.1610 p + 1)(3.454 p + 1)$

On rappelle que les fonctions de transfert $H_N(p)$ des filtres analogiques polynômiaux (Butterworth, Tchebychev, Bessel, Causer, etc.) sont données pour des fréquences de coupure normalisées et uniquement pour des filtres passe-bas [2].

Passe-bas	$p = p / \omega_A$	Passe-bande	$p = \frac{1}{B} \left(\frac{p}{\omega_A} + \frac{\omega_A}{p} \right)$	Pulsation centrale $\omega_A = \sqrt{\omega_{A1} \omega_{A2}}$
Passe-haut	$p = \omega_A / p$	Coupe-bande	$p = \left[\frac{1}{B} \left(\frac{p}{\omega_A} + \frac{\omega_A}{p} \right) \right]^{-1}$	Largeur de Bande $B = (\omega_{A2} - \omega_{A1})$

A partir de l'expression de $H_N(p)$ normalisée, on dénormalise en remplaçant p par les valeurs données au tableau précédent permettant d'aboutir à une fonction de transfert dénormalisée $H(p)$.

Références

- [1] F. Cottet. Aide-mémoire Traitement du Signal. Dunod, Paris, 2005.
- [2] J.L. Lecornu D. Le Roux. Mts 201 A Signaux Numeriques Telecom Bretagne
- [3] O. Français. Théorie de l'échantillonnage et de la quantification. ESIEE.
- [4]. Maurice Charbit, Gérard Blanchet. Eléments de base pour le Traitement Numérique du Signal et de l'Image. Telecom Paris.
- [5] https://moodle.insa-rouen.fr/pluginfile.php/6997/mod_resource/content/0/cours7.pdf
- [6] <http://chamilo2.grenet.fr/inp/courses/ENSE32A4EMAAAK0/document/html/toc1.htm>
- [7] <http://www.groupe.polymtl.ca/ele2700/TP/seance3-TP2-HIVER-2015.pdf>
- [8] Alexandre Renaux. Traitement Numérique Des Signaux. IFIPS / Université Paris Sud Orsay
- [9] Olivier Sentieys. Signaux et Systèmes Discrets. ENSSAT - Université de Rennes 1.
- [10] J.L. Zarader. Cours de Traitement du Signal. Ecole Polytechnique Universitaire de Paris
- [11] M. Frikel. Cours Traitement Numérique du Signal. ENSICAEN.
- [12] C. Doignon. Traitement Numérique du Signal Déterministe. Université Louis Pasteur de Strasbourg
- [13] <http://fr.audiofanzine.com/techniques-du-son/forums/t.392548,plug-ins-d-eq-sonnent-ils-differemment-pourquoi,p.18.html>
- [14] http://perso.iut-nimes.fr/flouchet/syst%20ech/T_en_z.pdf
- [15] <http://pageperso.univ-lr.fr/pierre.courtellemont/TD4.pdf>
- [16] https://perso.univ-rennes1.fr/laurent.albera/alberasiteweb/cours/tp_filtrage.pdf
- [17] Joel Leroux. Techniques numériques pour le traitement du signal. Polytech, Nice-Sofia.
- [18] http://www.eaeie.org/sites/all/themes/eaeie/tnprojects/theiere_signal/theiere_signal_fr/frame.htm
- [19] J. Prado, G. Blanchet. Méthodes Numérique pour le traitement du signal.
- [20] <https://perso.esiee.fr/~venardo/doc/algoI4.pdf>
- [21] http://www.laurent-duval.eu/Documents-Supelec-FI/Duval_L_2009_Lecture-Supelec-TNS_Bancs-Filtres.pdf
- [22] <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01128245/file/2008PEST0211.pdf>
- [23] <http://people.irisa.fr/Nancy.Bertin/wp-content/uploads/2014/09/cours6.pdf>
- [24] <https://docplayer.fr/37834686-Gel-4101-traitement-numerique-du-signal.html>
- [25] <http://people.irisa.fr/Nancy.Bertin/wp-content/uploads/2014/09/cours41.pdf>
- [26] P.Nayman, "Certains Aspects Du Traitement Du Signal ", LPNHE paris ,2012-2013.
- [27] <http://www.le2i.cnrs.fr/IMG/publications/ondelettes.pdf>
- [28] <https://www.i2m.univ-amu.fr/~caroline.chaux/GEOMDATA/TI-te5215.pdf>
- [29] <https://homepages.laas.fr/adoncesc/Wavelet/RapportWavelet.pdf>
- [30] http://dobigeon.perso.enseeiht.fr/teaching/TNS2/Cours_TNS_part3.pdf
- [31] <https://www.fsg.ulaval.ca/departements/professeurs/paul-fortier-111/>