

I. Rappels sur les filtres numériques (RIF et RII)

La transformée de Fourier est un outil précieux d'analyse et de traitement des signaux. Cependant, dans certains problèmes (comme le filtrage numérique), les limites de la TF sont vite atteintes. La transformée en Z, qui s'applique aux signaux discrets, généralise la TF et permet de dépasser ces limites [10]. Elle est tout-à-fait analogue à la transformée de Laplace, mais plus facile à utiliser. Ce type de transformée permet de décrire aisément les signaux à temps discret et la réponse des systèmes linéaires invariants soumis à des entrées diverses. C'est un outil qui permet de calculer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant décrit par une équation aux différences finies. Elle permet l'interprétation directe des caractéristiques des signaux et des filtres dans le domaine des fréquences [9].

1. Transformée en Z et propriétés

- **Définition :** La TZ est la généralisation de la TFTD ($X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)e^{-2\pi jfnT_e}$).

Soit un signal discret $x(n)$. Sa TZ est définie par:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} \quad \text{où } z \text{ est une variable complexe définie partout où cette série converge.}$$

En effet, comme cette transformation est une série infinie, elle n'existera que pour les valeurs de z pour lesquelles cette série converge.

Exemples :

$$- x(n) = \delta(n) \Rightarrow X(z) = 1,$$

$$- x(n) = \delta(n-k) \Rightarrow X(z) = z^{-k}, \quad \text{si } k > 0 \text{ RDC} = \mathbb{C} - \{0\} \quad \text{si } k < 0 \text{ RDC} = \mathbb{C} - \{\infty\}$$

$$- x(n) = (1, 2, 3, 5, 0, 2) \text{ on peut écrire } x(n) = \delta(n) + 2.\delta(n-1) + 3.\delta(n-2) + 5.\delta(n-3) + 2.\delta(n-5)$$

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 2z^{-5} \text{ RDC} = \mathbb{C} - \{0\}$$

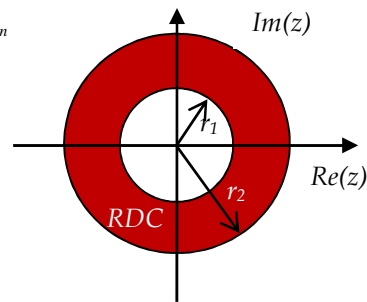
L'ensemble des valeurs de la variable complexe z pour lesquelles la série converge est appelée Région De Convergence (RDC):

$$RDC = \left\{ z \in \mathbb{C} / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n).z^{-n}| < +\infty \right\}$$

De façon générale, on montre que la RDC est un anneau de convergence centré sur l'origine défini par :

$$r_1 < |z| < r_2 \quad \text{avec } r_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x(n)|^{1/n} \text{ et } r_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x(-n)|^{-1/n}$$

où r_1 peut être réduit à 0 et r_2 peut être égal à $+\infty$.

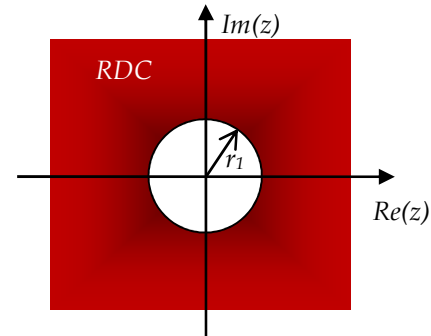
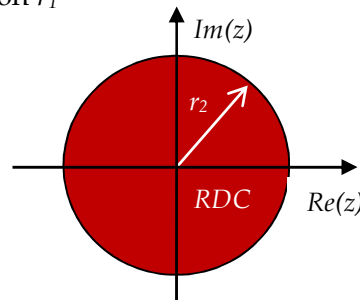


- $x(n)=0$ pour $n < n_0 \Rightarrow r_2 = +\infty$,

RDC = région extérieure au cercle de rayon r_1

- $x(n)=0$ pour $n > n_0 \Rightarrow r_1 = 0$

RDC = disque de rayon r_2



$\Rightarrow$ système anti-causal : RDC cercle. système causal : RDC extérieure au cercle.

Exemples

- Soit $a > 0$, $x(n) = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a}$, convergente pour $|z| > a$.

- Soit $b > 0$, $y(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 0 \\ -b^n & \text{si } n < 0 \end{cases} \Rightarrow Y(z) = \sum_{n<0} -b^n z^{-n} = \frac{z}{z-b}$, convergente pour $|z| < b$.

- Soient $a > 0, b > 0$, $w(n) = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0 \\ b^n & \text{si } n < 0 \end{cases} \Rightarrow W(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-b}$, convergente pour $b > |z| > a$.

Remarque : La TZ de a^n pour $n \in]-\infty, +\infty[$ n'existe pas.

Les propriétés qui sont les plus utilisées sont résumées comme suit :

Si on définit : $x(n) \xrightarrow{TZ} X(z)$, $x_1(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z)$ et $x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_2(z)$

- Linéarité : $a x_1(n) + b x_2(n) \xrightarrow{TZ} a X_1(z) + b X_2(z)$ - Convolution : $x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z) X_2(z)$

- Théorème du retard : $x(n-k) \xrightarrow{TZ} z^{-k} X(z)$ - Avance : $x(n+k) \xrightarrow{TZ} z^k X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) z^{k-n}$

Exemples

$$x(n) = \cos(w_0 n) U(n) = \frac{1}{2} (e^{jw_0 n} + e^{-jw_0 n}) U(n) \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{jw_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-jw_0} z^{-1}} \right) = \frac{1 - \cos(w_0) z^{-1}}{1 - 2 \cos(w_0) z^{-1} + z^{-2}} \quad \text{avec} \quad |z| > 1$$

2. TZ rationnelles (correspondant aux SLID)

Les systèmes linéaires invariants décrits par une équation aux différences finies possèdent une transformée en Z rationnelle c'est ainsi que celles-ci vont s'écrire comme le rapport de deux polynômes en z^{-1} .

$$\sum_{i=0}^M a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) \xrightarrow{TZ} \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} X(z)$$

On peut caractériser un système LI par $h(n)$ ou par la transformée en Z ($H(z)$) de sa réponse impulsionnelle $h(n)$, encore appelée fonction de transfert du système.

$$\Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}} = \frac{b_0}{a_0} z^{M-N} \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0}{a_0} z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^N (z - z_i)}{\prod_{i=1}^M (z - p_i)} = K z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^N (z - z_i)}{\prod_{i=1}^M (z - p_i)}$$

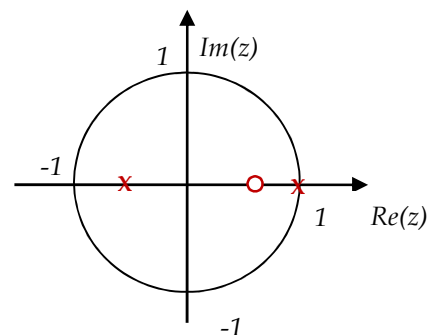
On appelle zéros, les valeurs de z pour lesquelles $H(z)=0$ et on appelle pôles, les valeurs de z pour lesquelles $H(z)$ est infini (annule le dénominateur). C'est ainsi que $H(z)$ possède N zéros (z_i), M pôles (p_i). Si $M > N$, elle possède $(M-N)$ zéros en 0, sinon $(N-M)$ pôles en 0.

Ainsi, la position de ses pôles et de ses zéros (+le facteur d'amplitude $K=b_0/a_0$) va nous fournir une description complète de $H(z)$ (par conséquent de $h(n)$ et $H(f)$) donc du comportement du système. $H(z)$ peut donc être représentée sous la forme d'un cercle modélisant la position des pôles et des zéros dans le plan complexe.

Exemple

$$H(z) = \frac{3z - 2}{(z - 1)(z + 0.5)}$$

Un zéro en $2/3$ et deux pôles $p_1 = -0.5$ et $p_2 = 1$



Remarques

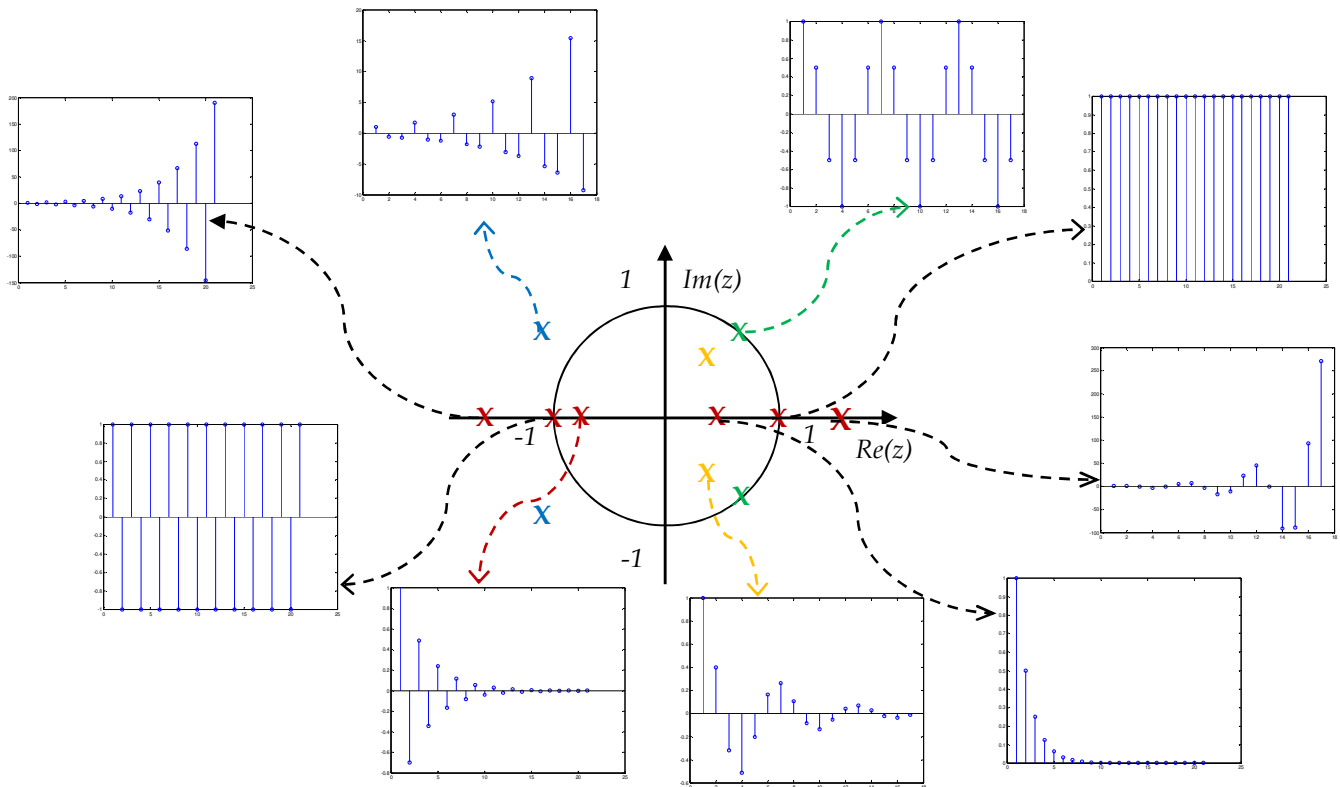
- Dans la plupart des systèmes, les a_i et les b_i sont réels $\Rightarrow$ les pôles et les zéros sont soit réels soit des paires de complexes conjugués.

- Rappelons que le rayon d'un système causal se trouve à l'extérieur d'un cercle. Par ailleurs, s'il est stable :

$$\sum_n |h(n)| < \infty, \text{ puisque } H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n}, \text{ il suffit donc que } z=1 \text{ fasse partie de la RDC.}$$

- Pour un système causal et stable, tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité ($|p_i| < 1, \forall i$). Le domaine de convergence ne peut contenir de pôles puisque la TZ ne converge pas aux pôles. S'il est anti-causal, il sera stable si les pôles sont à l'extérieur du cercle unité.

- Si le filtre est non-récurif $H(z) = \sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}$. Un filtre RIF a tous ses pôles à l'origine et sera donc toujours stable.



- A un pôle p_i simple ou multiple va correspondre une réponse impulsionnelle qui converge si $|p_i| < 1$. Elle divergera dans le cas contraire, soit si $|p_i| > 1$.

- Sachant qu'à chaque pôle complexe est associé un pôle conjugué cela donnera une réponse impulsionnelle $h(n)$ oscillante (cosinus ou sinus) amortie si $|p_{i=1,2}| < 1$ ou divergente si $|p_{i=1,2}| > 1$.

- Dans un système à phase minimale, tous les zéros sont à l'intérieur du cercle unité ($|z_i| < 1, \forall i$).

• Détermination de la réponse fréquentielle des filtres numériques

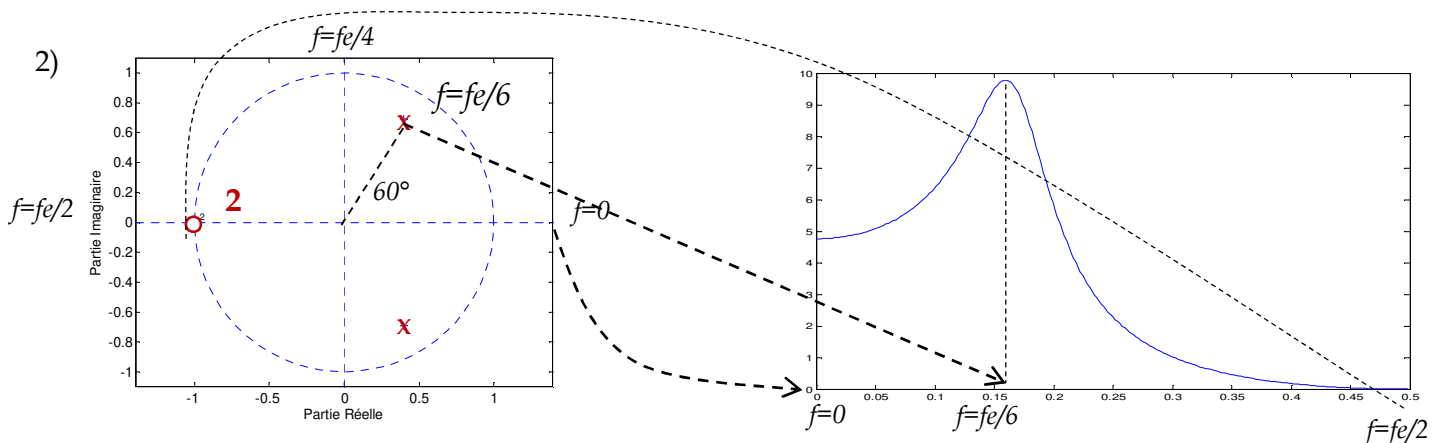
On suppose que le cercle unité ($|z| = 1$) $\in$ RDC de $X(z)$. On restreint le calcul de $X(z)$ au cercle unité en posant $z = e^{2\pi j f T_e}$.

Lorsqu'un zéro est placé sur un point donné du plan en z , la réponse fréquentielle sera de 0 au point considéré. Un pôle quant à lui produira un pic au point correspondant. Plus les pôles ou les zéros sont proches du cercle unité, plus ils influencent la réponse en fréquence [11].

- un zéro ou un pôle à l'origine n'influent pas sur le module de la réponse fréquentielle.

- un zéro sur le cercle unité introduit une annulation du module pour la fréquence correspondant
- Un zéro au voisinage du cercle unité introduit une atténuation dans le module de la réponse en fréquence. Atténuation d'autant plus importante que le zéro est proche du cercle unité.
- Un pôle sur le cercle unité introduit une résonance infinie dans le module de la réponse en fréquence pour la fréquence correspondante.
- Un pôle au voisinage du cercle unité introduit une résonance d'autant plus importante dans le module de la réponse en fréquence que le pôle est proche du cercle unité.

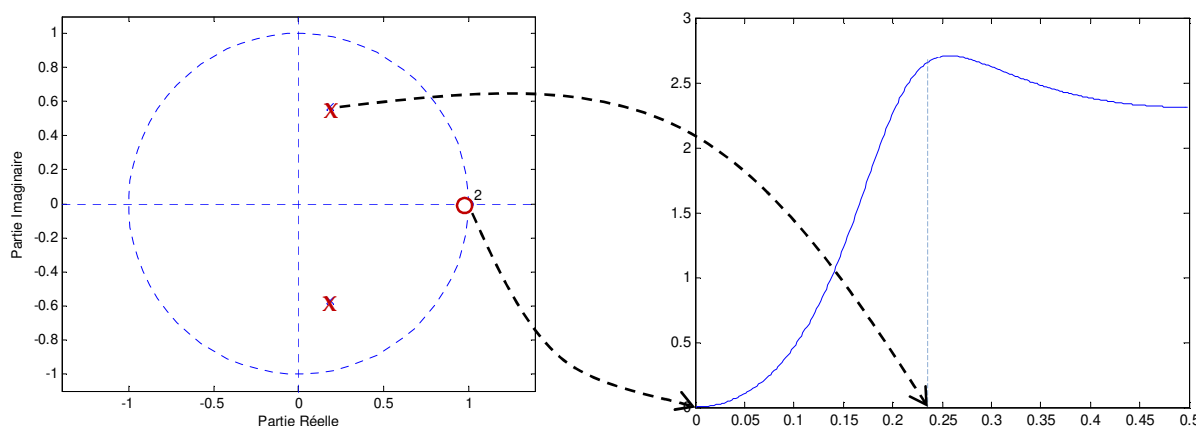
1) Sur la figure ci-dessous le cercle complet correspond à une fréquence d'échantillonnage f_e . Des pôles proches du cercle unité sont à l'origine de larges pics tandis que des zéros proches ou sur le cercle unité produisent des minima. Ce tracé nous permettra d'identifier la nature du filtre. On peut aussi avoir une idée sur son comportement général : passe-bas, passe-haut ou passe-bande, connaître sa ou ses fréquences de coupure.



$$3) H(z) = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 - 0.371z + 0.36} \Rightarrow \text{Zéros double en } z = -1, \text{ pôles } p_{1,2} = \pm 0.6e^{j72^\circ}$$

- Un zéro double en $z = 1 \Rightarrow |H(f)| = 0$ pour $f = 0$

- Des pôles proches du cercle unité $\Rightarrow$ maxima.



Remarque : Puisque les coefficients du filtre sont réels, les pôles et zéros sont réels (sur l'axe des réels) ou paires de complexes conjugués.

- **Détermination de la réponse impulsionnelle des FN (TZ inverse)**

La transformée en Z présente l'avantage d'être plus facilement inversible que la transformée de Fourier. Le passage de la TZ vers $h(n)$ peut se faire par le biais de la transformées en Z de signaux élémentaires connus à condition qu'il soit possible d'écrire $H(z)$ comme la combinaison de transformées élémentaires. Dans le cas contraire, on peut employer l'intégration sur un contour fermé en utilisant le calcul des résidus, ou le développement en puissance de z et de z^{-1} , ou encore le développement en fractions élémentaires [12].

1. La relation générale de la transformée en z inverse est donnée par l'équation donnée par l'intégrale de Cauchy : $x(n) = \frac{1}{2\pi.j} \oint_C X(z).z^{n-1}.dz$, où C est un contour fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre contenant l'origine.

En pratique, on utilise le théorème des résidus: $x(n) = \sum_{p_i \text{ poles de } z^{n-1}X(z)} \text{Re s} \left[z^{n-1}X(z) \right]_{z=p_i}$

$$\text{Re s} [z^{n-1}X(z)]_{z=p_i} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-p_i)^m z^{n-1}X(z) \right]_{z=p_i}$$

2. Transformée inverse par division polynômiale : Il est possible de calculer la transformée en Z inverse selon les puissances croissantes de z^{-1} (système causal) ou selon les puissances décroissantes de z (système anti-causal).

$$X(z) = \sum_n C_n z^{-n} \xrightarrow{TZ^{-1}} x(n) = C_n$$

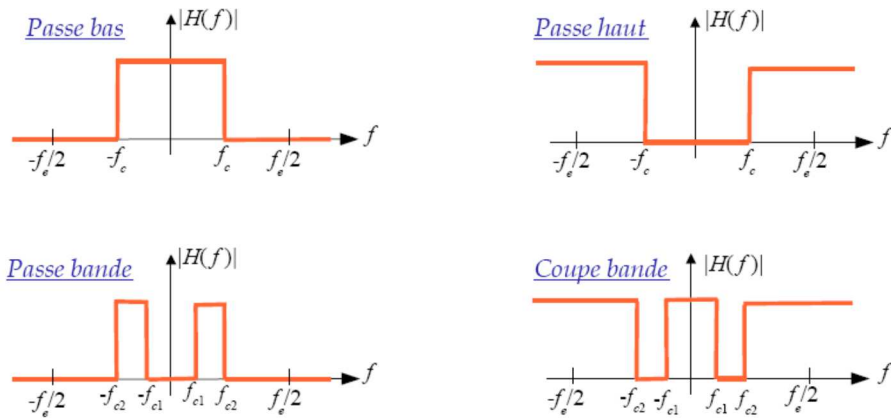
3. L'idée générale de cette approche consiste à trouver pour une fonction $X(z)$ complexe un développement en fonctions en Z plus simples et pour lesquelles une transformée inverse est connue:

$$X(z) = \sum_i X_i(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} x(n) = \sum_i x_i(n)$$

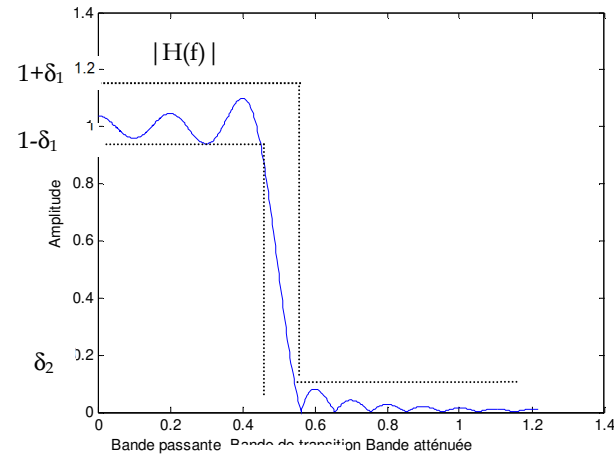
où les $X_i(z)$ sont des fonctions dont les TZ⁻¹ sont connues (Voir page 38).

3. Caractéristiques des filtres numériques

Un filtre numérique est constitué d'un groupement de circuits logiques astreints à un processus de calcul (ou algorithme) qui confère à ce filtre une fonction déterminée (passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur de bande, intégrateur [$y(n)=(x(n)+x(n-1))/2$], différentiateur [$y(n)=(x(n)-x(n-1))/2$], ...). Il faut souligner que certains filtres ne sont pas conçus pour arrêter une fréquence, mais pour modifier légèrement le gain à différentes fréquences, comme les égaliseurs. Ce sont tous des systèmes linéaires, discrets, invariants dans le temps et unidimensionnels. De plus, pour qu'ils soient physiquement réalisables, il faut qu'ils soient nécessairement causaux.



Les filtres représentés ci-dessus sont idéaux. Dans un cas réel il n'est pas possible d'obtenir une fréquence de coupure aussi raide. Le passage entre zones passantes et zones atténuées se fait par des zones dites "de transition" f_p-f_a dont la largeur va exprimer la sélectivité du filtre. Par ailleurs, les bandes passantes et atténuées ne sont également pas idéales, elles contiennent des ondulations dont l'amplitude est exprimée par les paramètres d'ondulation en bande passante δ_1 et bande atténuée δ_2 [9].



- Filtre à phase linéaire :**

Idéalement, il est souhaitable qu'un filtre possède une phase linéaire dans la bande passante. Une phase linéaire assurera un même déphasage pour toutes les fréquences (pas de distorsion). Les filtres FIR peuvent générer des filtres à phase linéaire à la condition que la réponse impulsionnelle soit symétrique.

Si un filtre est à phase linéaire, sa réponse fréquentielle est de la forme :

$$H(f) = R(f)e^{-j\phi(f)} \text{ avec } \phi(f) = \phi_0 + 2\pi f\tau$$

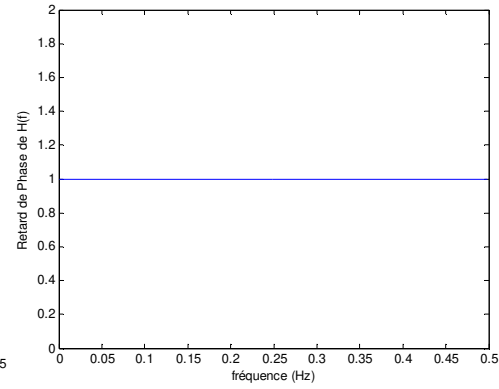
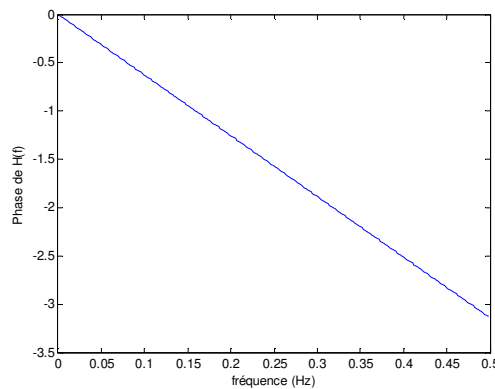
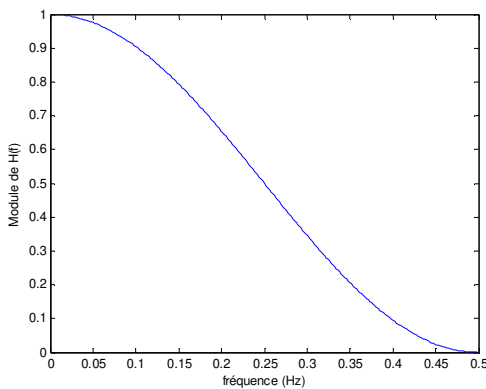
Et la dérivée de cette dernière par rapport à f fournit le 'retard de groupe', défini donc par :

$$\beta = -\frac{d\phi(f)}{df}$$

et qui correspond au retard subi par le signal après être passé par un filtre. Si la phase est linéaire (filtres RIF symétrique), le retard est constant et le signal à la sortie aura donc une distorsion minimale puisque l'effet de la phase sur le signal sera un simple décalage temporel (primordial dans un système audio)

Exemple: $y(n) = \frac{1}{4}(x(n) + 2x(n-1) + x(n-2))$

$$\Rightarrow h(n) = \frac{1}{4}(\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)) \text{ et } H(f) = e^{-2\pi jf} \cos^2(\pi f)$$



- **Filtre à minimum de phase :**

Pour un filtre RII, le retard de groupe n'est pas constant. On souhaite avoir un minimum de retard en s'orientant faire des filtres à minimum de phase. Un filtre est dit à minimum de phase si lui et son inverse sont tous deux stables et causaux. Ce qui implique que tous les pôles et zéros de la fonction de transfert $H(z)$ sont à l'intérieur du disque unité. Un filtre à phase minimale présente une réponse impulsionnelle (coefficients de $H(z)$) à tendance décroissante car ses zéros sont en module inférieurs ou égaux à l'unité.

Exemple : $y(n) = 0,75 x(n) + 0,25 x(n-1)$

$y(n)$ est obtenu plutôt à partir des échantillons "récents" du signal d'entrée qu'à partir des échantillons "anciens". Il faut noter que tout filtre causal et stable peut être décomposé en un produit de filtres à phase minimale par une cellule passe-tout.

- **RII ou RIF ?**

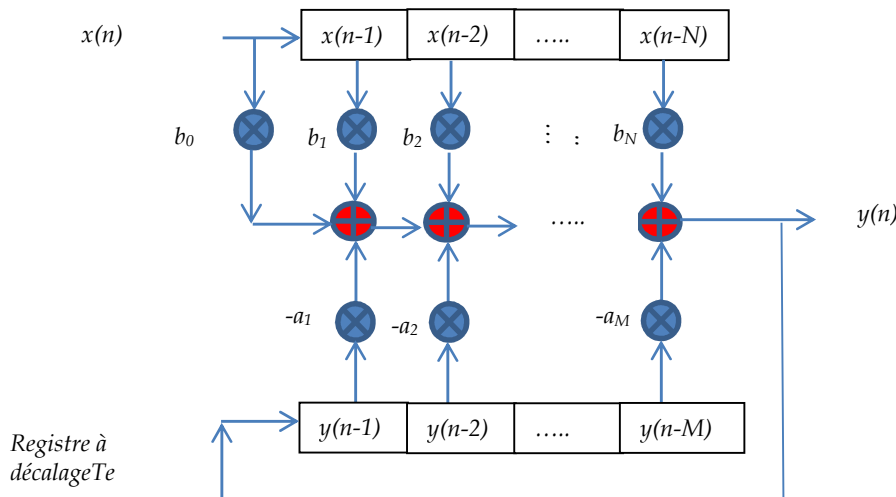
➤ Les filtres RII, on l'avantage qu'ils sont efficaces. Avec très peu de pôles et zéros on peut assurer la plupart des réponses fréquentielles dont on peut avoir besoin dans les applications audio. Cependant, le filtre étant récursif, les erreurs de précision numérique deviennent une question d'importance, car ils peuvent s'amplifier et devenir hors de contrôle, d'abord dans la forme de bruit, mais éventuellement dans la forme d'instabilité. La forme de la réponse impulsionnelle n'est pas facile à déterminer, non plus, car elle est définie indirectement par les pôles et zéros de $H(f)$.

➤ Par contre, les filtres RIF n'ont jamais des problèmes d'instabilité, car la sortie n'est qu'une somme finie d'échantillons de l'entrée. Cependant, quand la réponse impulsionnelle est longue, le numéro d'opérations peut devenir un facteur décisif quand il faut choisir entre RIF ou RII. Un autre avantage des RIF est le retard de groupe constant, qui permet d'avoir une distorsion de phase minimale sur le signal traité [13].

- **Structure des filtres numériques**

L'application d'un filtre numérique implique le calcul de la sortie $y(n)$ à l'instant $t=nT_e$ à partir des sorties et entrées précédentes plus la valeur courante de l'entrée.

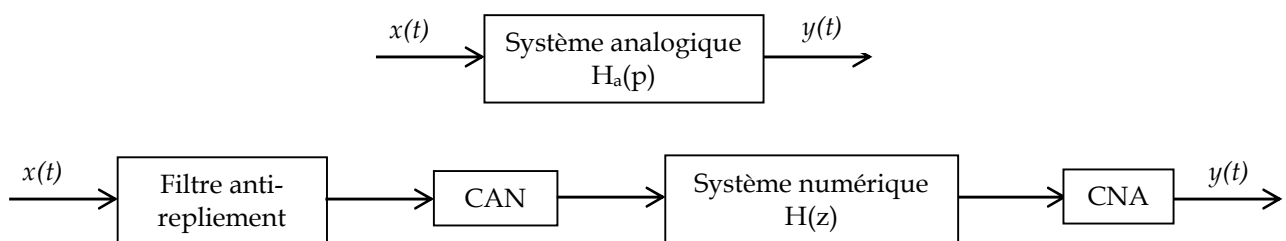
$$\sum_{i=0}^M a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) \quad \text{En prenant } a_0=1, \text{ on obtient}$$



Un filtre numérique est généralement constitué des éléments suivants : un ou plusieurs organes de retard (ce sont des registres à décalage jouant le rôle de mémoires retardées), pilotés par une horloge de période; des opérateurs arithmétiques (additionneurs et multiplieurs); des registres fournissant les coefficients de pondération du filtre [18]. Ainsi, à chaque top d'horloge T_e , les valeurs des registres subissent un décalage permettant de calculer la nouvelle sortie. Cette structure peut être aussi réalisée par logiciel.

4. Synthèse des Filtres numériques et Gabarit analogique

La synthèse d'un filtre est un ensemble de processus qui débute par la définition des caractéristiques du filtre, jusqu'à sa réalisation informatique et/ou électronique, en passant par la détermination de ses coefficients. Pour synthétiser un filtre numérique, on considère connu le gabarit du filtre analogique et on cherche un système numérique caractérisée par une fonction de transfert $H(z)$ à insérer dans le circuit ci-dessus permettant de satisfaire le gabarit analogique.



La détermination de la fonction de transfert d'un filtre numérique, par une méthode directe, n'est pas toujours très simple. Par contre, le problème qui consiste à transformer un filtre analogique en un filtre numérique est relativement simple. De ce fait, de nombreuses méthodes sont proposées pour concevoir un filtre numérique à partir du filtre analogique équivalent. Dans tous les cas, la synthèse d'un filtre numérique est une approximation d'un filtre analogique idéal équivalent. Il est nécessaire de contraindre un certain nombre de paramètres.

La synthèse d'un filtre numérique comprend les étapes suivantes :

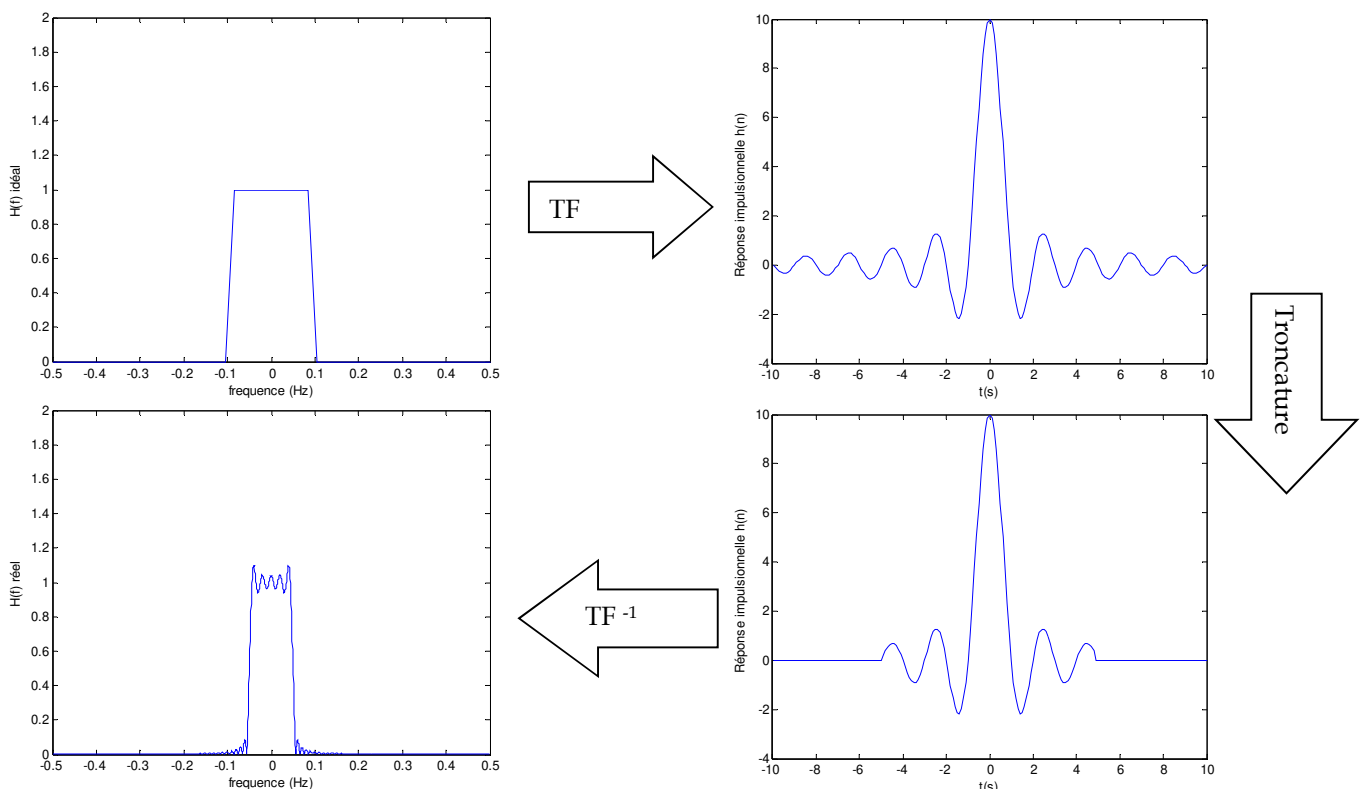
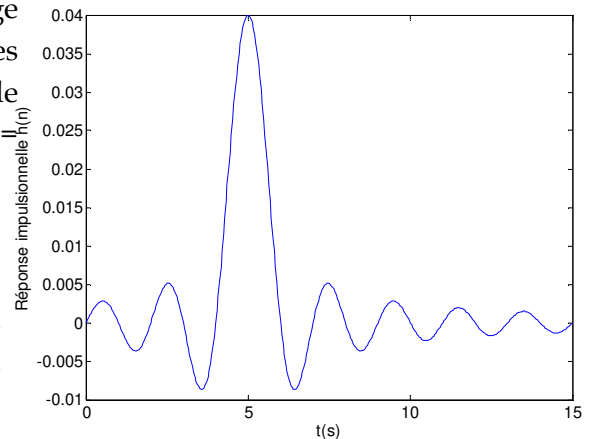
1. la détermination d'une réponse en fréquence idéale souhaitée ;

2. la détermination de la meilleure approximation sous un certain nombre de contraintes (stabilité, rapidité, précision, déphasage linéaire, etc.) ;
3. le choix d'une structure de calcul réalisant le filtre approximé.

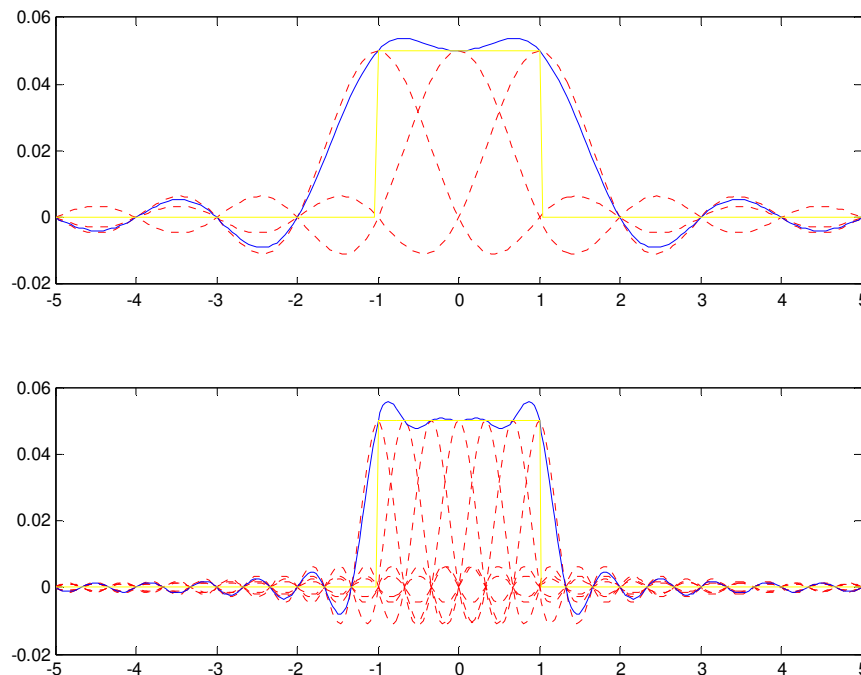
Les fonctions modèles utilisées pour la synthèse des filtres sont soit la réponse impulsionnelle soit la réponse en fréquence (celle-ci est préférée) de filtres analogiques connus. Si l'on emploie la réponse impulsionnelle, les éléments $h(n)$ de la réponse impulsionnelle numérique sont obtenus en calculant $h(t)$, la réponse impulsionnelle du filtre analogique, aux instants $t=nT_e$.

Rappelons que les filtres idéaux présentent un déphasage linéaire et ne sont pas physiquement réalisables, car les réponses fréquentielles idéales correspondent à une réponse temporelle non-causale. Par exemple, en considérant le filtre passe-bas $H(f) = \Pi(f) e^{-2\pi j f T}$, on obtiendra un sinc décalé de T .

On peut observer qu'il faut annuler une partie du signal. De ce fait, il n'est plus possible d'obtenir un filtre passe-bas idéal (droit et avec une droite de transition perpendiculaire). Il s'ensuit que les filtres qui vont pouvoir être réellement synthétisés n'ont pas de réponse fréquentielle correspondant à la fonction porte, mais pourront s'en rapprocher.



Comme l'illustre la figure suivante, la troncature (multiplication par une porte de largeur NT_e) du sinc dans le domaine temporel se traduira par une convolution dans le domaine fréquentiel du filtre idéal avec un sinc s'annulant tous les NT_e . Pour de grandes valeurs de N , les sinc dans la bande passante se compenseront les uns les autres mais autour des points de discontinuité (fréquence de coupure), les ondulations restent apparentes.



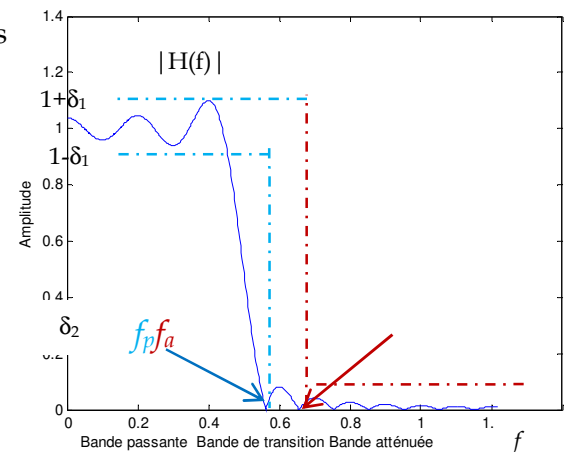
On peut observer que les différences vis-à-vis du filtre idéal (soit la fonction porte) sont principalement les ondulations dans la bande passante et dans la bande atténuée ainsi que la largeur de la transition.

C'est ainsi que les spécifications du filtre vont être définies par un gabarit fréquentiel linéaire ou en dB (décibels). Ce gabarit indique la ou les fréquences de coupure, la largeur de la bande de transition minimale souhaitée, le maximum d'ondulation de la bande passante et de la bande atténuée, la fréquence d'échantillonnage et éventuellement l'ordre maximal permis.

Gabarit d'un filtre

Le gabarit d'un filtre n'est autre que l'ensemble des caractéristiques du filtre, à savoir :

- la bande passante (BP) de 0 jusqu'à f_p
- la bande atténuée (ou coupée BA) de f_a jusqu'à $f_q/2$
- Le gain du filtre dans la bande passante.
- L'atténuation du filtre en bande coupée f_a .
- la largeur $\Delta f = f_a - f_p$ de la zone de transition $\Rightarrow f_c = f_a + \Delta f / 2 = (f_a + f_p) / 2$
- l'amplitude des oscillations en bande passante :
 $\delta_1 \Rightarrow A_p = 20 \log(1 + \delta_1)$ ondulation permise en BP
- l'amplitude des oscillations en bande atténuée :
 $\delta_2 \Rightarrow A_a = -20 \log(\delta_2)$ ondulation permise en BA



En pratique, plus les fréquences f_a et f_p sont proches, plus l'ordre du filtre devra être élevé. Pour un filtre idéal, ces valeurs seraient confondues.

5. Synthèse des filtres RIF par la méthode des fenêtres

L'emploi des filtres RIF peut se révéler attrayant eu égard à ses nombreux avantages : stabilité inconditionnelle (Tous les pôles sont en 0), phase linéaire possible. Néanmoins, ils présentent l'inconvénient de nécessiter un plus grand nombre de coefficients que les filtres RII pour obtenir les mêmes caractéristiques

fréquentielles à cause de l'absence de pôles hors 0. Ainsi, toute fonction de filtrage numérique stable et causale peut être approchée par la fonction de transfert d'un filtre RIF.

Rappelons que la sortie d'un filtre RIF va s'exprimer comme une combinaison linéaire d'un ensemble fini d'éléments d'entrée :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) \quad \text{d'où} \quad H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n \cdot z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n \cdot e^{-2\pi j f n T_e}$$

Ainsi, les coefficients de pondération ne sont rien d'autre que les valeurs de la réponse impulsionnelle du filtre. Ces coefficients constituent les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction de transfert $H(f)$ (voir TFTD chapitre 1)

Du fait qu'un filtre RIF possède une fonction de transfert polynomiale (non rationnelle), il ne peut être obtenu par transposition d'un filtre continu. Les deux méthodes les plus utilisées pour l'approximation des filtres numériques RIF sont alors:

- Développement par série de Fourier : cette série est ensuite tronquée par des fonctions fenêtres pour limiter la réponse impulsionnelle. Les coefficients de Fourier coïncident avec les échantillons de la réponse impulsionnelle du Filtre.
- Echantillonnage de la réponse fréquentielle : Cette méthode fait appel à la TFD. Celle-ci est appliquée aux coefficients recherchés b_i pour obtenir une suite fréquentielle qui corresponde à la réponse fréquentielle du filtre.

Il existe d'autres méthodes telles les méthodes d'optimisation qui sont basées sur la minimisation d'un critère d'erreur entre la courbe réelle et le filtre idéal [9].

La méthode de la fenêtre consiste, connaissant l'expression analytique $H(f)$ de la réponse fréquentielle continue (dont la formulation mathématique connue) à approcher, à déterminer par utilisation de la transformée de Fourier à temps discret inverse, la réponse impulsionnelle. Cette réponse temporelle non causale obtenue sera retardée pour la rendre causale [18]. Ainsi :

1. A partir du gabarit idéal du filtre, on détermine les coefficients du filtre en limitant le calcul à N valeurs réparties symétriquement autour de $n=0$. Puis, on calcule de la TFTD inverse du filtre idéal qui nous permettra de retrouver les échantillons de la réponse impulsionnelle soient les coefficients du filtre :

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} H(f) e^{2\pi j f n T_e} df & N \text{ impair (Filtre de type I)} \\ \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} H(f) e^{-j\pi f T_e} e^{2\pi j f n T_e} df & N \text{ pair (Filtre de type II)} \end{cases}$$

Remarques :

- Le filtre de type I est le plus employé (C'est celui que nous développons dans ce qui suit) hormis pour les différenciateurs.

- Le filtre de type II possède un zéro en -1 (Nombre de zéros est impair donc répartition de zéros en paires conjuguées + un zéro en $f_e/2$ puisque une somme de cosinus), il ne peut donc être employé pour un passe-haut ou un coupe-bande.
- Il existe des filtres de type III (N impair) et IV (N pair) permettant d'obtenir une réponse impulsionnelle anti-symétrique avec déphasage linéaire également (somme de sinus au lieu de cosinus). Ils possèdent tous deux des zéros en 1 (sin en $f=0$ est nulle), leur utilisation n'est donc pas adaptée aux filtres passe-bas. En outre le filtre de type III possède également un 0 en -1, on ne peut l'employer que pour un passe-bande.

2. Cette méthode produit une série infinie de coefficients, on limite, alors la réponse impulsionnelle à N échantillons (troncature). Sachant que la troncature induit des ondulations, on peut faire appel aux fenêtres de pondération pour les atténuer. Ainsi, la réponse impulsionnelle idéale $h(n)$ sera multipliée par la fenêtre discrète $w_N(n)$ de longueur N:

$$h'_N(n) = h(n) \cdot w_N(n). \text{ (Choix de la fenêtre : voir chapitre 1)}$$

3. Il ne reste plus qu'à décaler la réponse impulsionnelle $h(n)$ pour avoir une solution causale.

Remarque : Pour le choix de f_c il faudra faire attention aux fréquences de coupure à prendre en compte. Afin d'avoir de bons résultats lors de la synthèse, ce ne sont pas les fréquences de coupure du filtre idéal qu'il faut utiliser mais il faut déplacer celles-ci afin de les centrer dans la zone de transition. Pour un passe-bas, l'augmenter de la demi zone de transition (Δf), soit $f_p + \Delta f$ et pour un passe-haut, la diminuer de la demi zone de transition. Pour un passe-bande, diminuer la première fréquence de coupure de la demi zone de transition et augmenter la seconde de la demi zone de transition, pour un rejeteur de bande, on fera l'inverse.

Exemple :

- Calcul de la réponse impulsionnelle idéale (cas N impair)

$$h(n) = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} H(f) e^{2\pi j f n T_e} df$$

$$\text{On pose } f_c = (f_p + f_a)/2 \Rightarrow h(n) = \frac{1}{f_e} \int_{-f_c}^{f_c} e^{2\pi j f n T_e} df = \frac{1}{2\pi j n f_e T_e} e^{2\pi j f n T_e} \Big|_{-f_c}^{f_c}$$

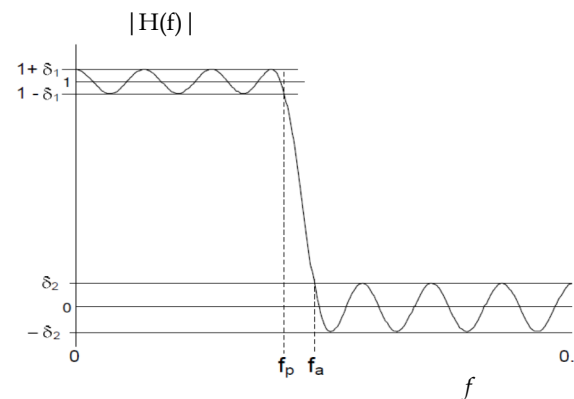
$$\Rightarrow h(n) = \frac{e^{2\pi j f_c n T_e} - e^{-2\pi j f_c n T_e}}{2\pi j n} = \frac{\sin(2\pi f_c n T_e)}{\pi n} = \frac{\sin(\pi n f_c / (f_e/2))}{\pi n}$$

On normalise les fréquences par rapport à $f_e/2$ (ou f_e) c.a.d que l'on remplace partout f_c par $f_c/(f_e/2)$, on obtient alors :

$$h(n) = \frac{\sin(\pi n f_c / (f_e/2))}{\pi n} \frac{f_c / (f_e/2)}{f_c / (f_e/2)} = f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$$

Tout aussi facilement, on peut déterminer les réponses impulsionnelles d'un passe-haut ($1-H(f)$), d'un passe-bande (différence de 2 passe-bas) et d'un coupe-bande donnés.

FGE, USTHB [assiakourgli@gmail.com / <http://perso.usthb.dz/~akourgli/>]



Les valeurs de la réponse impulsionnelle idéale $h(n)$ sont données au tableau suivant. Les fréquences f_c indiquées dans ce tableau (fréquences de coupure désirées) s'expriment également en fréquences normalisées (divisées par $f_e/2$).

	Réponse impulsionnelle $h(n)$	
Type de filtre	$h(n)$ pour $n \neq 0$	$h(n)$ $n=0$
Passe-bas	$f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$	f_c
Passe-haut	$-f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$	$1-f_c$
Passe-bande	$f_{c2} \frac{\sin(\pi n f_{c2})}{\pi n f_{c2}} - f_{c1} \frac{\sin(\pi n f_{c1})}{\pi n f_{c1}}$	$f_{c2} - f_{c1}$
Rejécteur de bande	$f_{c1} \frac{\sin(\pi n f_{c1})}{\pi n f_{c1}} - f_{c2} \frac{\sin(\pi n f_{c2})}{\pi n f_{c2}}$	$1-(f_{c2} - f_{c1})$

- Limitation du nombre d'échantillons à N

$$h'_N(n) = h(n) \cdot w(n)$$

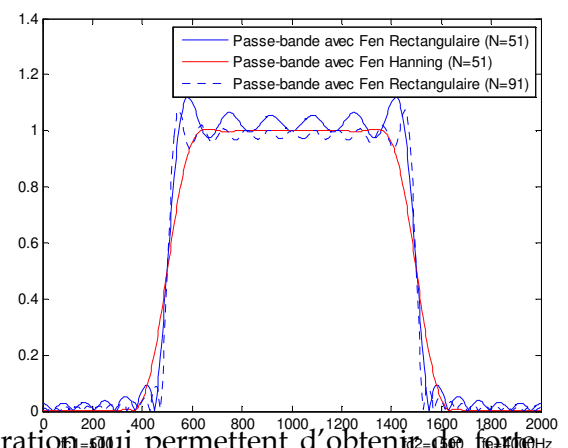
$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \Rightarrow |W(f)| = \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)} \quad H'_N(f) = H(f) * W(f)$$

La troncature temporelle introduit des ondulations et induit une zone de transition moins rapide déterminée par la largeur du lobe principal. Un compromis est à faire entre la raideur et l'amplitude des ondulations. Notons que cette méthode donne des ondulations de même amplitude dans la bande passante et dans la bande atténuée.

Remarque: Si N augmente, l'étendue des oscillations diminue (la réponse est plus plate) et la largeur de la bande de transition décroît (Δf faible). On peut observer que les oscillations les plus fortes tendent à se concentrer aux discontinuités. Ces dernières ne diminuent pas si N augmente : on a toujours un dépassement à peu près égal à 9% se concentrant aux points de discontinuité : c'est le phénomène de Gibbs (Voir TP n°1).

Pour diminuer les oscillations : on utilise les fenêtres de pondération qui permettent d'obtenir de forte atténuation des oscillations mais cela se fait au détriment de la largeur de la bande de transition qui devient plus grande.

Pour le choix de la fenêtre de pondération, on procédera comme suit : En fonction de l'atténuation δ_2 requise dans la spécification du filtre, on choisira le type de fenêtre $w(n)$ à utiliser. Puis en fonction de la



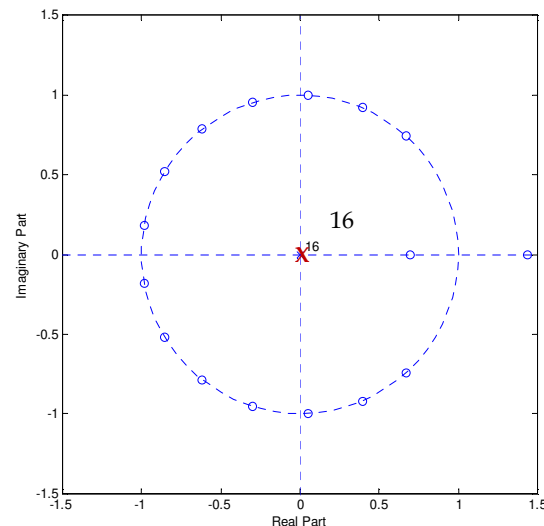
largeur de la zone de transition Δf (spécifiée aussi au départ) et du type de la fenêtre $w(n)$, on déterminera la longueur de la réponse impulsionnelle N .

Fenêtres $w_N(n)$	Largeur de Transition : $\Delta f (2\Delta f / f_c)$	Atténuation en bande atténuée A
$w_{Rect}(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$1.8/N$	21
$w_{Han}(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$6.2/N$	44
$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$6.6/N$	53
$w_{Black}(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$11/N$	74

Exemple : On veut synthétiser un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = f_e/10$ avec $\Delta f = f_e/5$ et une ondulation en bande atténuée > 50 db (voir TP n°3)

On normalise les fréquence $f_c / (f_e/2) \Rightarrow f_c = 0.2$ $\Delta f / (f_e/2) \Rightarrow \Delta f = 0.4$

- a- $h(n) = 0.2 \frac{\sin(\pi n / 5)}{\pi n / 5}$
- b- On choisit $w(n)$ comme étant la fenêtre de Hamming
($A_a = 20 \log(\delta_2) = -53$) $\Rightarrow \Delta f = 6.6/N$
- c- On calcule $N = 6.6 / \Delta f = 16.5$ on prend $N = 17$
- d- on calcule les valeurs $h(n) = 0.2 \frac{\sin(\pi n / 5)}{\pi n / 5}$ pour $-8 \leq n \leq 8$

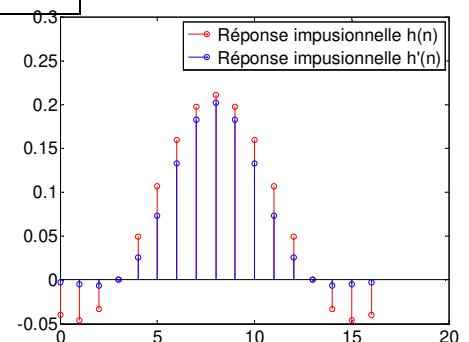


N	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$h(n)$	-0,0399	-0,0456	-0,0329	0	0,0493	0,1064	0,1597	0,1974	0,2110
N	1	2	3	4	5	6	7	8	
$h(n)$	0,1974	0,1597	0,1064	0,0493	0	-0,0329	-0,0456	-0,0399	

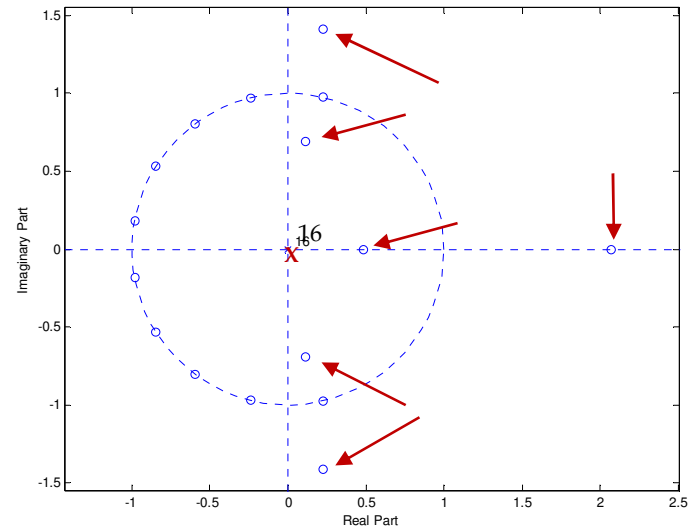
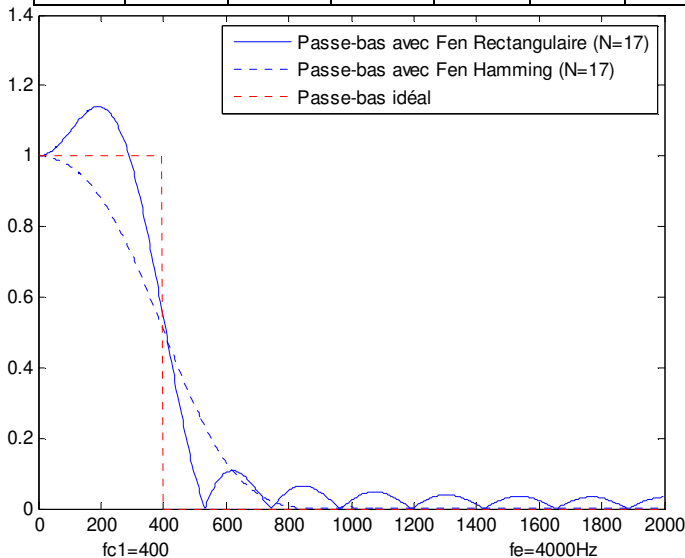
- e- On multiplie $h(n)$ par $w(n)$ pour trouver $h'_N(n) = h(n) \cdot w(n)$

$$h'_N(n) = 0.2 \frac{\sin(\pi n / 5)}{\pi n / 5} \left[0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{16}\right) \right]$$

- f- On translate le résultat de 8 échantillons.



N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(n)$	-0,0399	-0,0456	-0,0329	0	0,0493	0,1064	0,1597	0,1974	0,2110
$h'_N(n)$	-0,0031	-0,0050	-0,0067	0	0,0255	0,0730	0,1325	0,1826	0,2023
N	9	10	11	12	13	14	15	16	
$h(n)$	0,1974	0,1597	0,1064	0,0493	0	-0,0329	-0,0456	-0,0399	
$h'_N(n)$	0,1826	0,1325	0,0730	0,0255	0	-0,006	-0,005	-0,0030	



On peut remarquer l'emplacement de zéros autour du premier 0 en 1 permet d'atténuer les lobes secondaire et de maintenir une réponse cste autour du zéro.

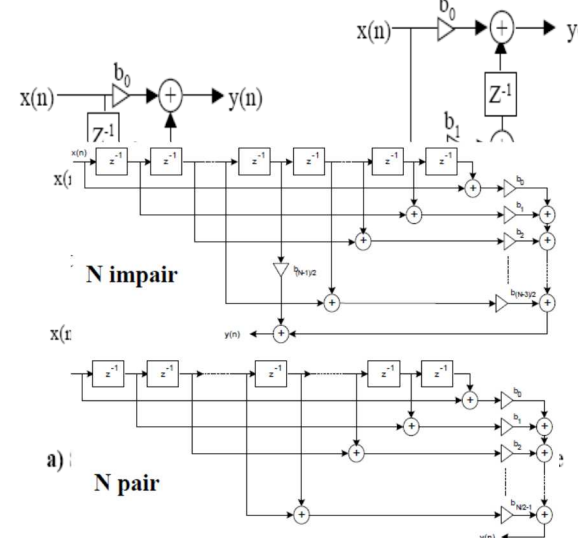
Constitution et réalisation des filtres numériques RIF

La réalisation concrète d'un filtre numérique consistera en fait à matérialiser l'algorithme de calcul pour la structure retenue. On aura la possibilité de travailler : Soit en logique câblée (assemblage d'organes logiques, tels que portes, mémoires, etc ...), soit en logique programmée (organisation autour d'un processeur de traitement du signal (DSP) ou, même, utilisation d'un microprocesseur(micro-ordinateur) standard).

La structure canonique directe (transversale ou non réursive) est donnée ci-contre:

Un filtre RIF nécessite $(N-1)$ opérations de multiplication, N opération d'addition pour chaque nouvel échantillon à filtrer.

On peut également exprimer la complexité en nombre de multiplication-accumulation qui, dans le cas d'un filtrage RIF, vaut N [9]. Le coût mémoire d'un filtrage RIF est de $2(N+1)$ [($N+1$) coefficients b_i et ($N+1$) points mémoire pour le vecteur des entrées $x(i)$]. Si la fréquence d'échantillonnage du signal d'entrée vaut f_e , cela signifie que le filtre devra être réalisé en un temps T_{calcul} inférieur à $T_e = 1/f_e$. Pour un filtre à retard de groupe constant, la structure sera la suivante :



6. Synthèse des filtres récurrents RII

Le principe de définition du cahier des charges d'un filtre récurrent (RII) se déroule de la même manière que pour un filtre non récurrent (RIF) mais la synthèse se fera de différente manière. L'intérêt d'employer un filtre RII réside principalement dans la possibilité d'obtenir une bande de transition étroite pour un ordre raisonnable bien qu'il présente d'une part, un risque d'instabilité du à une grande sensibilité numérique des coefficients mais que l'on peut toutefois contrôler en déterminant une structure mieux adaptée, et d'autre part, une variation de phase fortement non linéaire.

Rappelons que pour un filtre RII, la sortie s'exprime comme une combinaison linéaire d'un ensemble fini d'éléments d'entrées et de sortie:

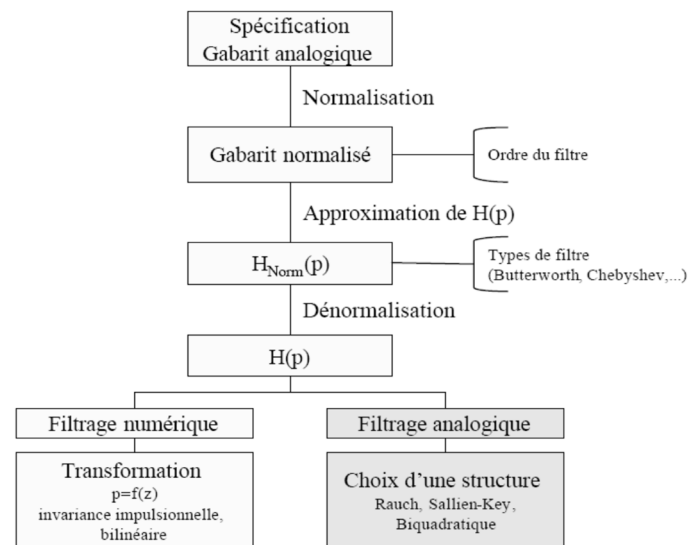
$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i) \quad \text{d'où} \quad H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i \cdot z^{-i}}$$

La méthode directe consiste à placer des pôles et des zéros aux fréquences utiles mais la plus courante (indirecte dite aussi de transposition) est l'utilisation des méthodes de synthèse des filtres analogiques aboutissant à une fonction $H(p)$ correspondant aux spécifications. Une fonction permettant le passage du plan p dans le plan z ($p = fct(z)$) est ensuite utilisée pour obtenir $H(z)$. Cette fonction doit maintenir la stabilité du filtre analogique et maintenir, au mieux, les caractéristiques de la réponse fréquentielle $H(f)$ du filtre numérique.

• Rappels sur les filtres analogiques

Il existe de nombreuses méthodes permettant de synthétiser un filtre numérique récurrent à partir d'un filtre analogique pris comme modèle [18]:

- le filtre doit avoir une réponse impulsionnelle ou indicelle imposée : ce sont les méthodes de l'invariance impulsionnelle.
- le filtre doit avoir une réponse fréquentielle entrant dans un gabarit donné : c'est la transformation bilinéaire.

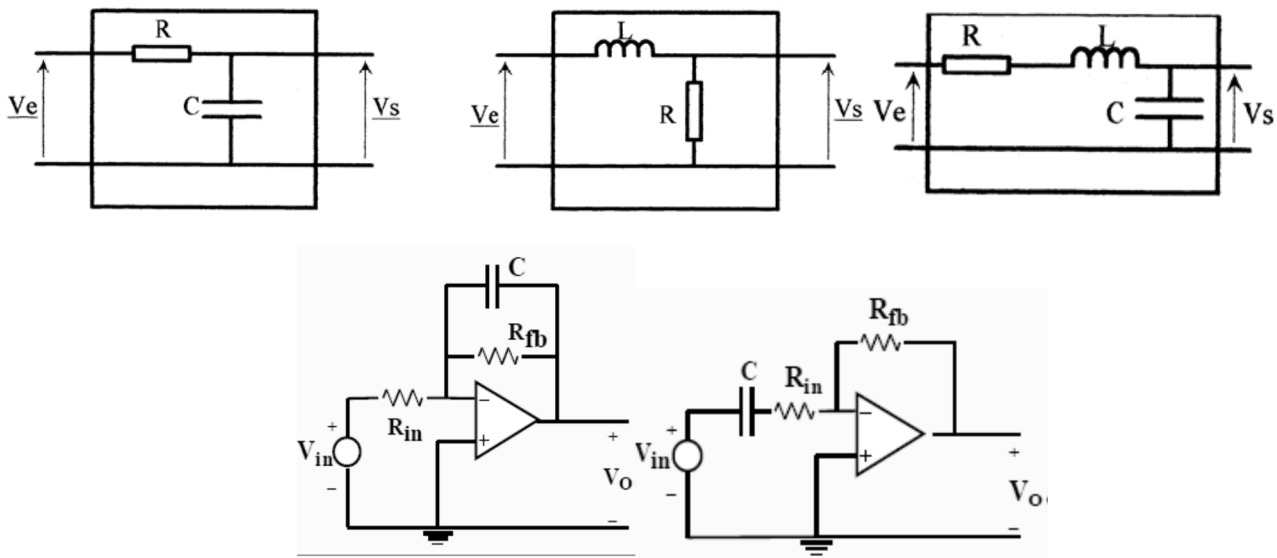


Pour concevoir un filtre analogique, on peut employer des filtres passifs obtenus par combinaison de résistances, de condensateurs et/ou de bobines ou encore utiliser des filtres actifs comportant un élément amplificateur (transistor, AO, etc.) qui permet donc de modifier les amplitudes des signaux. Ainsi, un filtre passif de base (de premier ordre) peut être composé d'une cellule RC ou d'une cellule RL.

Il faut noter que :

- les filtres numériques sont limités à des fréquences < 100MHz
- les filtres passifs (L,C, quartz, etc ;) sont utilisés pour les hautes fréquences
- les filtres actifs (R,C, ALI) utilisent des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) limités à 1Mhz
- les filtres à capacité commutés (R et C intégrés, ALI, Interrupteur commandé MOS) ont des fréquences (<10 Mhz) programmables

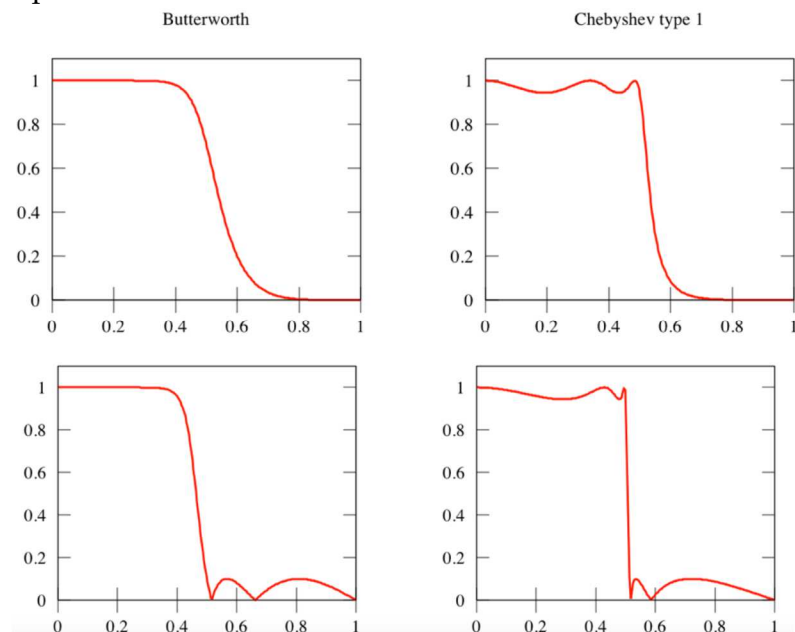
Ci-dessous, sont donnés quelques exemples de structure pour des filtres passifs passe-bas de premier et second ordre suivis de filtres actifs passe-bas de premier et second ordre aussi.



Pour obtenir des filtres d'ordre N plus élevé, on emploiera des filtres du premier et du deuxième ordremis en cascade. Les pentes asymptotiques seront proportionnelles au nombre de cellules ($+N \uparrow$ et $+\Delta f \downarrow$). A noter également que les filtres passe-bas ou passe-haut peuvent avoir un nombre entier d'ordre (1, 2, 3...) tandis que les filtres passe-bande ou coupe-bande ne peuvent qu'avoir un ordre pair (2, 4, 6, ...) car ils sont formés de paires de cellules : 2 cellules RC ou une cellule RC et une cellule RL.

Pour synthétiser des filtres analogiques répondant à un gabarit donné, on choisira parmi un ensemble de filtres analogiques testés et éprouvés donc connus pour leurs propriétés en termes de pente d'atténuation et d'ondulation dans la bande passante et atténuée telles que :

- Filtres de Butterworth : Coupure peu raide mais gain constant en bande passante
- Filtres de Tchebychev (Chebyshev) : Raideur de coupure importante mais ondulations dans la bande passante (Chebyshev 1) ou atténuée (Chebyshev 2) et simple à mettre en oeuvre
- Filtres de Cauet (dit aussi elliptiques) : Coupure extrêmement raide mais ondulations dans la bande passante et atténuée mais circuits plus complexes à réaliser.
- Filtres de Bessel : Retard de groupe constant mais mauvaise sélectivité même pour ordre élevé.



Remarque : Le filtre de Bessel est intéressant pour filtrer les signaux large bande (modulations HF haut débit : PSK, 8-PSK, OFDM...) en préservant les phases. Il n'a pas intérêt dans le domaine du filtrage numérique.

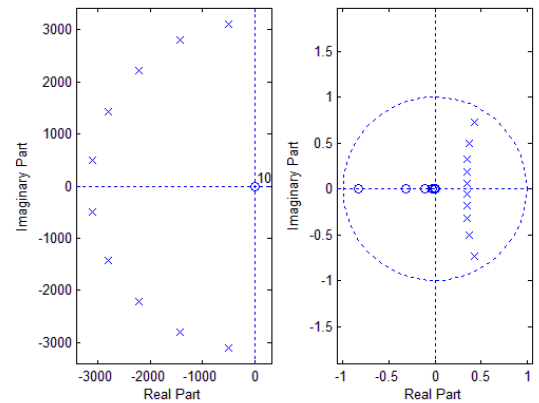
1. Un filtre de Butterworth est caractérisé par le fait que la réponse d'amplitude est maximale plate dans la bande passante et monotonement décroissante à partir d'une certaine fréquence (fréquence de coupure).

L'amplitude d'un filtre analogique Passe-bas de Butterworth d'ordre N est définie par l'expression :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}} \quad \text{ou} \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

ω_c est la pulsations de coupure limites et ε est un paramètre de conception qui fixe la région de tolérance dans la bande passante $\delta_1 = 1/(1+\varepsilon^2)^{1/2}$. Le filtre analogique aura N pôles placés sur le cercle unité (à partie réelle négative).

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$p^2 + \sqrt{2}p + 1$
3	$(p^2 + p + 1)(p + 1)$
4	$(p^2 + 1.8477p + 1)(p^2 + 0.7653p + 1)$
5	$(p^2 + 1.6180p + 1)(p^2 + 0.6180p + 1)(p + 1)$
6	$(p^2 + 1.9318p + 1)(p^2 + \sqrt{2}p + 1)(p^2 + 0.5176p + 1)$



L'ordre N est déterminé par la zone de transition ($\omega_a - \omega_p$) et les ondulations permises en bande passante $A_p = 20 \log(1 + \delta_1)$ et bande atténuée ($A_a = -\log \delta_2$)

$$N \geq \frac{\log\left(10^{\frac{A_a}{10}} - 1\right)}{2 \log(\omega_a / \omega_p)}$$

$$N \geq \frac{\log\left(10^{\frac{A_a}{10}} - 1\right) / \left(10^{\frac{A_p}{10}} - 1\right)}{2 \log(\omega_a / \omega_p)} = \frac{\log\left(\left(\frac{1}{\delta_2^2} - 1\right) / \left(\frac{1}{\delta_1^2} - 1\right)\right)}{2 \log(\omega_a / \omega_p)}$$

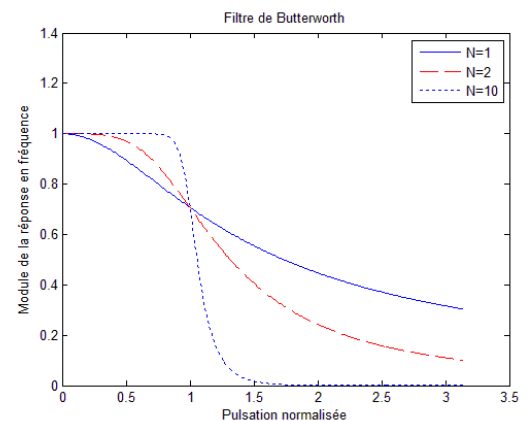
Remarque : Plus N est élevé, plus grande est la sélectivité (zone de transition Δf étroite) mais un filtre RII de fait de sa récursivité a une période d'initialisation avant le régime permanent qui augmente avec l'ordre du filtre. En outre, son déphasage augmente avec l'ordre du filtre.

Exemple : On souhaite réaliser un filtre passe-bas de gain unitaire ne comportant pas d'oscillations ni dans la bande passante, ni dans la bande atténuée tel que : $A_p = 1\text{db}$, $A_a = 40\text{db}$, $f_p = 1\text{kHz}$ et $f_a = 3\text{kHz}$.

Déterminer le filtre et N.

$$N \geq \frac{\log(10^4 / 0.2589)}{2 \log(3/1)} = 4.80 \approx 5$$

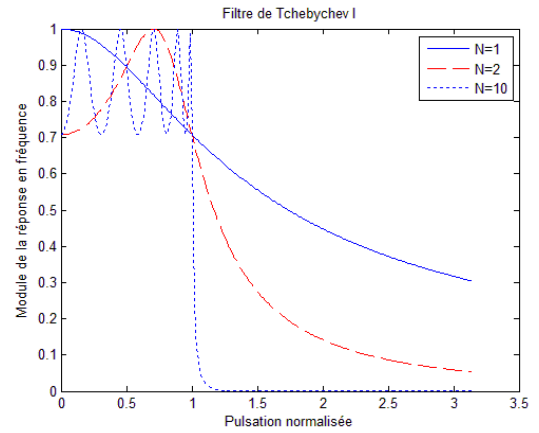
2. Un filtre de Tchebychev est caractérisé généralement par une coupée. La forme analytique du module de réponse fréquentielle d'un filtre analogique de Tchebychev (ou Chebyshev) d'ordre N est donnée par :



$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}}$$

Où ε est un paramètre réel inférieur à l'unité qui détermine l'amplitude des oscillations dans la bande passante et où $T_N(x)$ est le polynôme de Tchebychev d'ordre N, définie par :

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos[N \arccos(x)] & \text{pour } 0 \leq |x| \leq 1 \\ \cosh[N \operatorname{arccosh}(x)] & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases}$$



L'ordre N est déterminé par la zone de transition ($\omega_a - \omega_p$) et les ondulations permises en bande passante $A_p = 20 \log(1 + \delta_1)$ et bande atténuée ($A_a = -\log \delta_2$) *

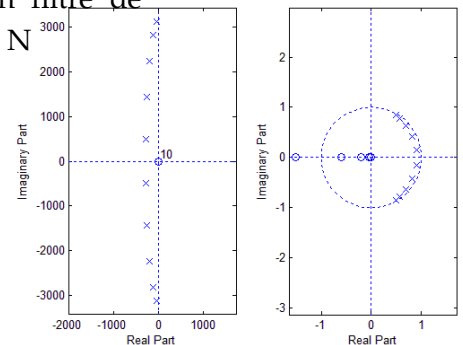
$$N \geq \frac{\log \left(\sqrt{\left(10^{\frac{A_a}{10}} - 1\right)} / \sqrt{\left(10^{\frac{A_p}{10}} - 1\right)} + \sqrt{\left(10^{\frac{A_a}{10}} - 1\right)} / \sqrt{\left(10^{\frac{A_p}{10}} - 1\right)} - 1 \right)}{\log \left(\omega_a / \omega_p + \sqrt{(\omega_a / \omega_p)^2 - 1} \right)}$$

$$N \geq \frac{\log \left(2 \cdot 10^{\frac{A_a}{20}} / \sqrt{\left(10^{\frac{A_p}{10}} - 1\right)} \right)}{\log \left(\omega_a / \omega_p + \sqrt{(\omega_a / \omega_p)^2 - 1} \right)}$$

Exemple

On souhaite réaliser un filtre passe-bas de gain unitaire avec un filtre de Tchebychev tel que : $A_p = 1\text{dB}$, $A_a = 40\text{dB}$, $f_p = 1\text{kHz}$ et $f_a = 3\text{kHz}$. Déterminer N

$$N \geq \frac{\log \left(2 \cdot 10^{\frac{A_a}{20}} / \sqrt{\left(10^{\frac{A_p}{10}} - 1\right)} \right)}{\log \left(\omega_a / \omega_p + \sqrt{(\omega_a / \omega_p)^2 - 1} \right)} = \frac{2.100 / 0.5089}{\sqrt{3} + \sqrt{8}} = 3.39 \approx 4$$



Dans la pratique, on utilise trois valeurs d'ondulation, $\varepsilon = 0.1 \text{ dB}$, 0.5 dB et 1 dB . Pour ces 3 valeurs $H_N(p)$ est donnée :

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)	Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$0.3017 p^2 + 0.7158 p + 1$	2	$0.6595 p^2 + 0.9402 p + 1$
3	$(0.5918 p^2 + 0.5736 p + 1)(1.031 p + 1)$	3	$(0.8753 p^2 + 0.5483 p + 1)(1.596 p + 1)$
4	$(0.7518 p^2 + 0.3972 p + 1)(1.6053 p^2 + 2.0475 p + 1)$	4	$(0.9402 p^2 + 0.3297 p + 1)(2.8057 p^2 + 2.3755 p + 1)$
5	$(0.8368 p^2 + 0.2787 p + 1)(1.5725 p^2 + 1.3712 p + 1)(1.855 p + 1)$	5	$(2.0974 p^2 + 1.2296 p + 1)(0.9654 p^2 + 0.2161 p + 1)(2.759 p + 1)$

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$0.9070 p^2 + 0.9956 p + 1$
3	$(1.0058 p^2 + 0.497 p + 1)(2.023 p + 1)$
4	$(1.0136 p^2 + 0.2828 p + 1)(3.5791 p^2 + 2.4113 p + 1)$
5	$(2.3293 p^2 + 1.0911 p + 1)(1.0118 p^2 + 0.1610 p + 1)(3.454 p + 1)$

On rappelle que les fonctions de transfert $H_N(p)$ des filtres analogiques polynômiaux (Butterworth, Tchebychev, Bessel, Cauchy, etc.) sont données pour des fréquences de coupure normalisées et uniquement pour des filtres passe-bas [2].

Passe-bas	$p = p / \omega_A$
Passe-haut	$p = \omega_A / p$

Passe-bande	$p = \frac{1}{B} \left(\frac{p}{\omega_A} + \frac{\omega_A}{p} \right)$	Pulsation centrale $\omega_A = \sqrt{\omega_{A1} \omega_{A2}}$
Coupe-bande	$p = \left[\frac{1}{B} \left(\frac{p}{\omega_A} + \frac{\omega_A}{p} \right) \right]^{-1}$	Largeur de Bande $B = (\omega_{A2} - \omega_{A1})$

A partir de l'expression de $H_N(p)$ normalisée, on dénormalise en remplaçant p par les valeurs données au tableau précédent permettant d'aboutir à une fonction de transfert dénormalisée $H(p)$.

La Méthode de la transformation bilinéaire a pour objectif de faire coïncider au mieux les domaines analogique et numérique. Les filtres qui en sont dérivés sont plus stables que sont obtenus à travers l'emploi de la méthode de la variance impulsionnelle. Mais, en contrepartie, elle introduit une distorsion sur l'axe des fréquences.

On sait qu'un filtre analogique est caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$ et un filtre numérique est défini par sa fonction de transfert $H(z)$ avec $z = e^{2\pi j f T_e} = e^{p T_e}$. Ce qui implique que $p = \ln(z) / T_e$. Dans les deux cas, cette transformation entraîne une relation non linéaire entre les fréquences f_A du domaine analogique et les fréquences f_N du domaine numérique.

Pour conserver le caractère polynomial des fonctions de transfert, une approximation de $\ln(z)$ par les séries de Laurent est employée :

$$\ln(z) \approx 2 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^5 + \dots$$

En ne conservant que le terme du premier ordre, on définit la transformation bilinéaire :

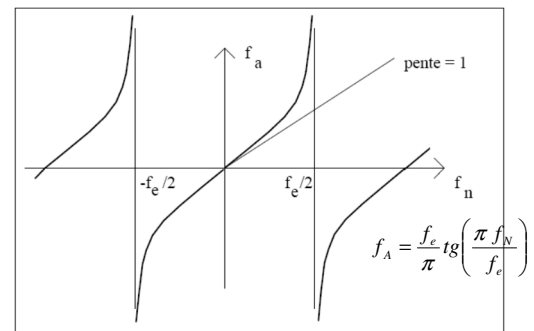
$$p = \frac{\ln(z)}{T_e} \approx \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$$

$$\text{Sachant que } p = j\omega_A = \frac{\ln(z)}{T_e} = \frac{2}{T_e} \frac{e^{j\omega_N T_e} - 1}{e^{j\omega_N T_e} + 1} = \frac{2}{T_e} \frac{e^{j\omega_N T_e / 2} (e^{j\omega_N T_e / 2} - e^{-j\omega_N T_e / 2})}{e^{j\omega_N T_e / 2} (e^{j\omega_N T_e / 2} + e^{-j\omega_N T_e / 2})} = \frac{2}{T_e} \frac{j \sin(\omega_N T_e / 2)}{\cos(\omega_N T_e / 2)}$$

Ainsi, on peut montrer qu'on obtient la correspondance entre fréquence analogique f_A (ou pulsation analogique ω_A) et la fréquence numérique f_N (ou ω_N) par :

$$\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_N T_e}{2} \right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi f_N}{f_e} \right)$$

Cette équation montre qu'il n'y a pas égalité entre pulsation analogique et pulsation discrète et que la relation les liant n'est pas non plus linéaire puisqu'il y a distorsion des fréquences, y compris du retard de groupe.



Pour faire la synthèse d'un filtre numérique par la transformation bilinéaire, on procède comme suit :

- On définit les caractéristiques souhaitées du filtre numérique (fréq d'échantillonnage, de coupure, etc.)

- On calcule les pulsations analogiques ω_A correspondant aux pulsations numériques $\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi f_N}{f_e}\right)$

- On détermine le gabarit du filtre analogique $H_N(p)$ normalisée d'ordre n (Chebyshev, Butterworth, etc.) qui servira de modèle au filtre numérique et on écrit la fonction de transfert dénormalisée $H(p)$ de ce filtre analogique (qu'il faut recalculer en fonction de ω_A).

- On applique la transformation bilinéaire à $H(p)$ en remplaçant $p = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ ce qui donne la fonction $H(z)$.

Exemple 1: On désire concevoir un filtre passe-bas numérique de premier ordre à partir d'une fonction de transfert d'un filtre RC dans le domaine continu ($H_N(p)=1/(1+p)$). La fréquence de coupure désirée est $f_N=30$ Hz et la fréquence d'échantillonnage est $f_e=150$ Hz.

$$\text{On calcule d'abord } \omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{2}{T_e} 0.7265 \text{ puis } H(p) = \frac{1}{(1+p)} \Big|_{p=p/\omega_A} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.7265}{p + \frac{2}{T_e} 0.7265}$$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.7265}{\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} + \frac{2}{T_e} 0.7265} = \frac{0.7265(z+1)}{(z-1) + 0.7265(z+1)} = \frac{0.7265(z+1)}{1.7265z - 0.2735}$$

$$\text{On peut remarquer que } f_A = \frac{2}{T_e(2\pi)} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{f_e}{\pi} 0.7265 = 34.69 \neq f_N = 30$$

Exemple 2: On désire réaliser un filtre numérique passe-bas du second ordre avec les caractéristiques suivantes [18]: fréquence de coupure $f_N= 500$ Hz (gain de 1), fréquence d'échantillonnage $f_e=5$ kHz,

$$\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_N T_e}{2}\right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{2}{T_e} 0.325$$

$$H_N(p) = \frac{0.1075}{p^2 + 0.1075p + 1} \Rightarrow H(p) = H_N(p = p/\omega_A) = \frac{0.1075\omega_A^2}{p^2 + 0.1075p\omega_A + \omega_A^2} = \frac{\frac{4}{T_e^2} 0.0114}{p^2 + \frac{2}{T_e} 0.035p + \frac{4}{T_e^2} 0.1056}$$

$$H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{4}{T_e^2} 0.0114}{\left(\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \frac{2}{T_e} 0.035 \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} + \frac{4}{T_e^2} 0.1056} = \frac{0.0114}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 0.035 \frac{z-1}{z+1} + 0.1056}$$

$$H(z) = \frac{0.0114(z+1)^2}{(z-1)^2 + 0.035(z-1)(z+1) + 0.1056(z+1)^2} = \frac{0.0114(z+1)^2}{1.14z^2 - 1.7888z + 1.0706}$$

Pour un filtre numérique passe-bas ou passe-haut, on peut déterminer $H(z)$ directement à partir de $H_N(p)$ en utilisant la pulsation normalisée $\Omega_c = \text{tg}\left(\frac{\pi f_N}{f_e}\right)$ et remplacer p dans $H_N(p)$ comme suit:

- pour un passe-bas par $p = \frac{1}{\Omega_c} \frac{z-1}{z+1}$ soit $H(z) = H_N(p)|_{p=\frac{1}{\Omega_c} \frac{z-1}{z+1}}$

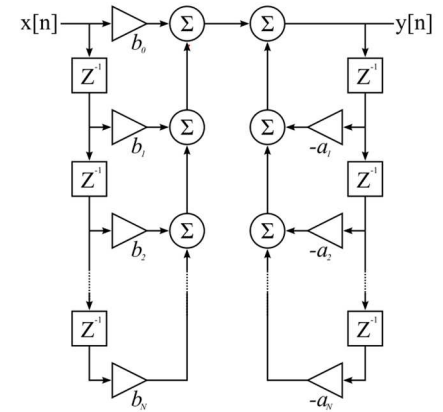
- pour un passe-haut par $p = \Omega_c \frac{z+1}{z-1}$ soit $H(z) = H_N(p)|_{p=\Omega_c \frac{z+1}{z-1}}$

- pour un passe bande ou un rejeteur de bande, la détermination de ω_A s'obtient par la pulsation centrale $\omega_A = \sqrt{\omega_{A1}\omega_{A2}}$

Remarque: Puisqu'il n'est pas possible de faire coïncider précisément la réponse fréquentielle du filtre analogique (sur $[0, +\infty[$ et numérique (sur $[0, f_e/2]$ la transformation bilinéaire aura pour objet de faire coïncider au mieux les deux réponses. Cette méthode donne d'assez bons résultats à condition que les fréquences caractéristiques ne soient pas trop proches de la demi-fréquence d'échantillonnage.

• Réalisation du filtre RII

Un filtre RII nécessite $(2N+1)$ opérations de multiplication, $2N$ opérations d'addition pour chaque nouvel échantillon à filtrer ou $(2N+1)$ MAC (Multiplication-Accumulation). Le coût mémoire d'un filtre RII en structure directe est de $(4N+3)$ mémoire $[(2N+1)$ coefficients b_i et $2(N+1)$ points mémoire ou retard pour les vecteurs des entrées $x(n)$ et des sorties $y(n)$ [9].



7. Les filtres multi-cadences

Le traitement multi-cadences implique plusieurs fréquences d'échantillonnage. Il peut avoir plusieurs motivations. Il peut être le fruit de contraintes liées à une application dans laquelle les flux de signaux numériques à traiter et à générer doivent l'être à des fréquences d'échantillonnage différentes [20]. Cette situation peut se rencontrer par exemple dans les applications audio où co-existent plusieurs fréquences d'échantillonnage : 32kHz (diffusion); 44,1 kHz (disque compact numérique); 48kHz (bande sonore numérique); 96kHz; ...

Cette approche peut aussi permettre d'améliorer les caractéristiques d'implantation d'un algorithme en adoptant pour chacune de ses étapes un échantillonnage que l'on appelle critique dans le sens où la fréquence de traitement est choisie égale à la fréquence de Nyquist. Ainsi la chaîne de traitement correspondant à l'émetteur bande de base d'un modulateur DPQSK où l'on a trois fréquences de traitement : la fréquence bit, la fréquence symbole et la fréquence d'échantillonnage [20]

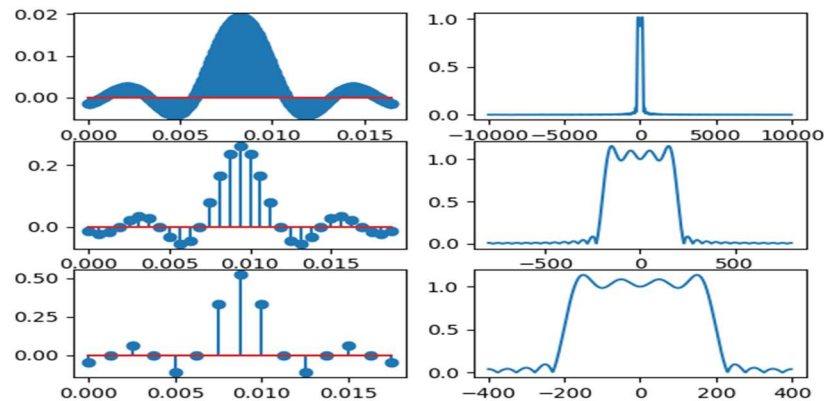
Dans les systèmes considérés aux chapitres précédents, n'était considéré qu'une seule fréquence ou cadence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$. Mais il arrive que la fréquence maximale f_{max} soit diminuée (filtrage passe-bas) ou augmentée (le cas d'une modulation). Dans les deux cas, il est plus judicieux d'adapter la fréquence d'échantillonnage afin de minimiser le temps de calcul. Il s'agira d'une décimation ou sous-échantillonnage

(augmentation de f_{max}) et d'une interpolation ou sur-échantillonnage (diminution de f_{max}). A noter, également que le sur-échantillonnage est souvent utilisé pour augmenter le SNR dans les opérations de CNA. Tous deux interviennent dans le changement de fréquence et dans les techniques des bancs de filtres

Exemple : Supposons que l'on veuille synthétiser un filtre passe-bas avec les spécifications suivantes : $f_p=100\text{Hz}$ $f_a=300\text{Hz}$ $A_a>50\text{ dB}$ $f_e=20\text{kHz}$.

L'emploi de la fenêtre de Hamming nous donne $N=331$, soit un nombre de coefficients important. Or le filtre occupe une petite portion de la bande passante (passe-bas avec $f_c=1\% f_e$). On peut donc sous-échantillonner et puis sur-échantillonner sans perte d'informations.

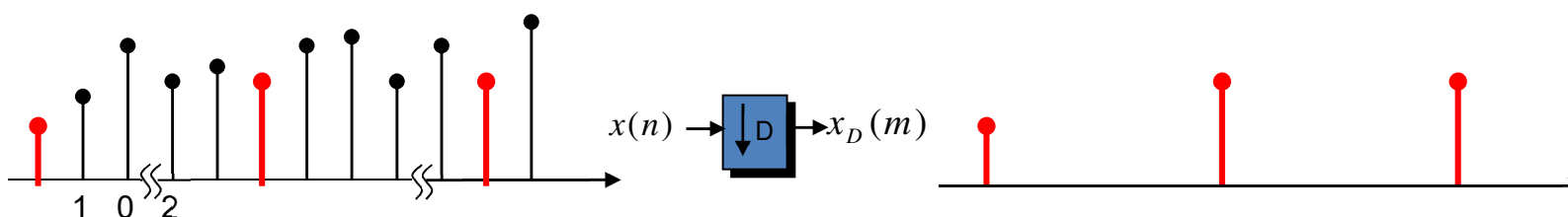
Ainsi en prenant $f_e=f_e/25=800\text{Hz}$ cela nous donnerait $N=15 \ll 331$ et on obtient, ainsi, un filtre plus rapide. C'est le principe des bancs de filtres qui revient à diviser la bande passante en plusieurs filtres à bande étroite donc des filtres que l'on pourra facilement décimer ce qui représente donc un gain de temps.



Sous échantillonnage et sur-échantillonnage

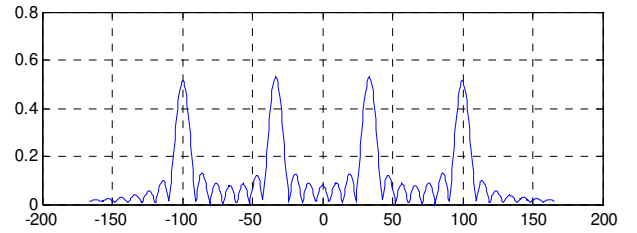
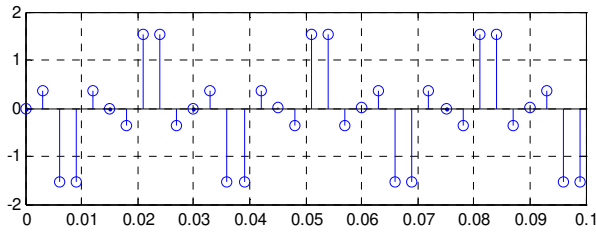
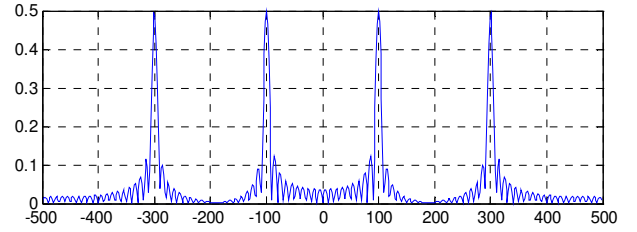
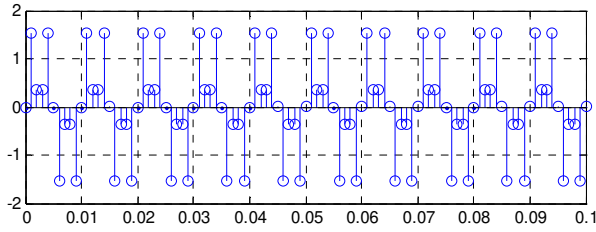
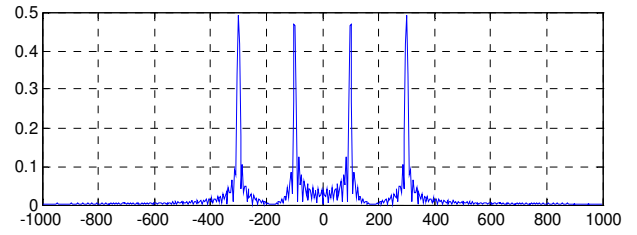
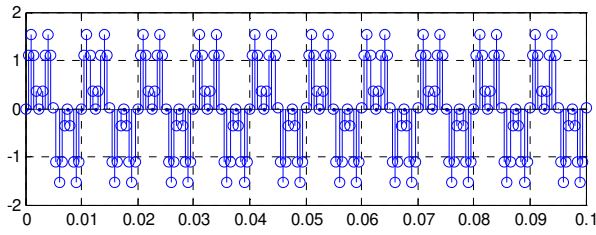
Rappelons que lorsqu'on souhaite échantillonner un signal, nous devons respecter le théorème de Shannon à savoir prendre une fréquence d'échantillonnage $f_e/2 > f_{max}$. Si ce signal a subi des traitements qui ont eu pour résultat, entre autres, la modification de la fréquence maximale. On parlera alors de sous-échantillonnage ou de sur-échantillonnage.

Sous-échantillonnage : Il consiste à fabriquer à partir du signal original x un signal x_D comportant moins d'échantillons que le signal d'origine. Il faut "enlever" des échantillons, d'où le nom décimation (En anglais : down sampling). On parle de sous-échantillonnage d'un facteur D quand le signal d'origine x comporte N échantillons et le signal sur-échantillonné x_D en comporte N/D , avec $x_D(n) = x(n/D)$

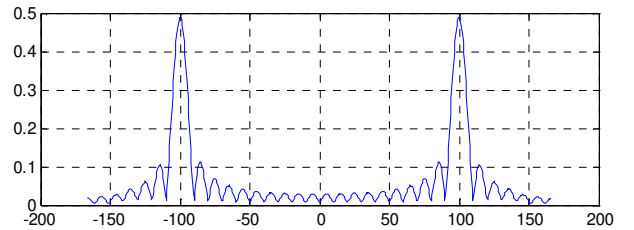
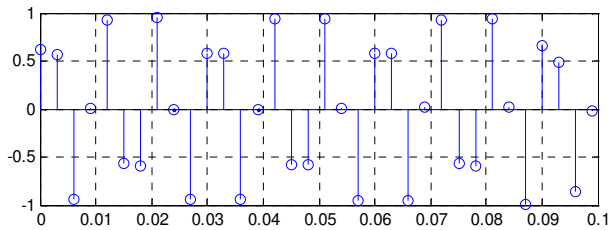
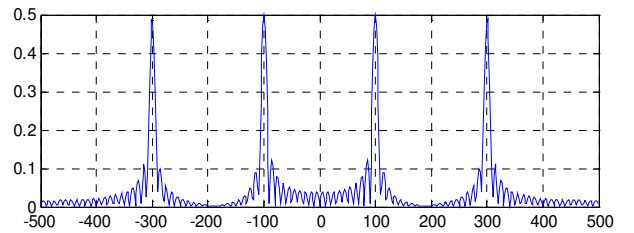
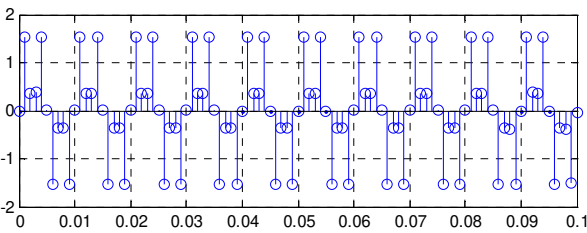
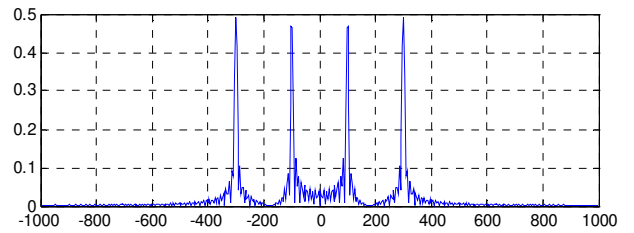
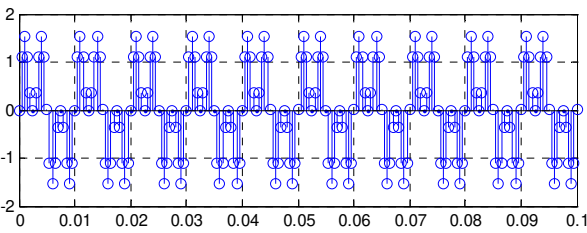


Le sous-échantillonnage naïf consiste à se débarrasser de $D - 1$ échantillons sur D . Cela revient à devoir échantillonner directement à f_e/D , mais rien ne garantit que $f_e/D > 2 f_{max}$. Il y a donc un risque de repliement spectral.

Exemple : Le signal suivant est le résultat de la somme de 2 sinusoides de fréquences 100 et 300Hz. On le décime de 2 et de 6. On remarque que lorsque $f_e=f_e/6$ il y a repliement puisque la condition de Shanon n'est plus respectée.



Pour sous-échantillonner correctement, il va falloir supprimer le contenu fréquentiel de $x(n]$ entre $f_e/2D$ et f_e/D puisque le spectre devient périodique de période f_e/D et ce avant la décimation.



Dans ce cas, nous avons pour la fonction de transfert $X_D(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_D(m)z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n/D)z^{-n/D}$

Rappels :

Peigne de Dirac : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$ périodique de période $T_e \Rightarrow$ décomposable en série de Fourier telle que $C_n = \frac{1}{T_e} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j n \frac{t}{T_e}}$ En discret $\sum \delta(n - mM) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{2\pi j m \frac{n}{M}}$

La décimation de M est équivalente à un échantillonnage de M $\Rightarrow y(m) = y\left(\frac{n}{M}\right) = \sum x(n) \cdot \delta(n - mM)$

► Fonction de transfert $Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x(n) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{\frac{2\pi j k n}{M}} \right) z^{-n/M} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(e^{-\frac{2\pi j k}{M}} z^{\frac{1}{M}} \right)^{-n} \right)$

$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(W_M^k z^{\frac{1}{M}}\right)$ avec $W_M = e^{-\frac{2\pi j}{M}}$

► Réponse en fréquence

$y(m) = x(n) \cdot \sum \delta(n - mM) \Rightarrow Y(f) = X(f) * \frac{f_e}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \delta\left(f - \frac{mf_e}{M}\right)$

$\Rightarrow Y(f) = \frac{f_e}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X\left(f - \frac{mf_e}{M}\right) \Rightarrow$ **Périodisation de $\frac{f_e}{M}$**

Exemples:

- Décimation de 4 $Y(z) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X\left(W_4^k z^{\frac{1}{4}}\right)$ avec $W_4 = e^{-\frac{2\pi j}{4}}$

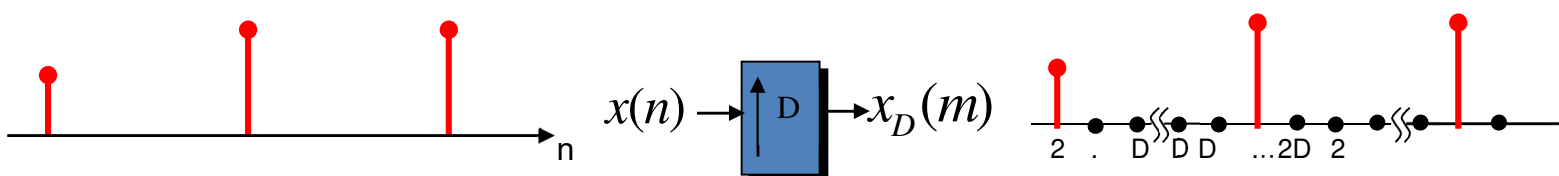
$Y(z) = \frac{1}{4} \left(X\left(W_4^0 z^{\frac{1}{4}}\right) + X\left(W_4^1 z^{\frac{1}{4}}\right) + X\left(W_4^2 z^{\frac{1}{4}}\right) + X\left(W_4^3 z^{\frac{1}{4}}\right) \right)$

$Y(z) = \frac{1}{4} \left(X\left(z^{\frac{1}{4}}\right) + X\left(-j z^{\frac{1}{4}}\right) + X\left(-z^{\frac{1}{4}}\right) + X\left(j z^{\frac{1}{4}}\right) \right) \Rightarrow Y(f) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X\left(f - \frac{kf_e}{4}\right)$

o Décimation de 2

$Y(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 X\left(W_2^k z^{\frac{1}{2}}\right)$ avec $W_2 = e^{-\frac{2\pi j}{2}}$ $Y(z) = \frac{1}{2} \left(X\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) \right) \Rightarrow Y(f) = \frac{1}{2} \left[X(f) + X\left(f - \frac{f_e}{2}\right) \right]$

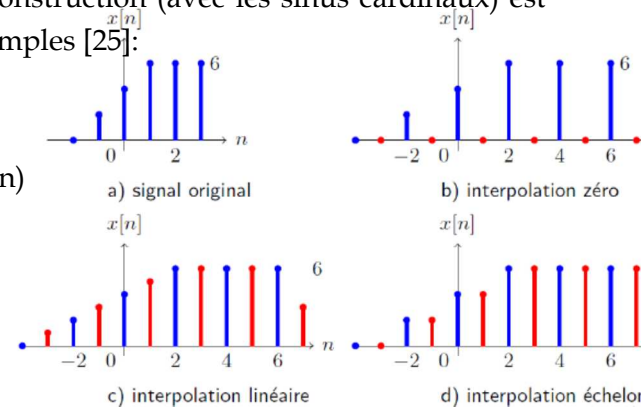
Sur-échantillonnage : Il consiste à fabriquer à partir du signal original x un signal x_M un signal de même durée mais comportant davantage d'échantillons que le signal d'origine. Il faut "rajouter" des échantillons, d'où le nom d'interpolation (en anglais : upsampling). On parle de sur-échantillonnage d'un facteur M quand le signal d'origine x comporte N échantillons et le signal sur-échantillonné en comporte MN, avec $x_M(Mn) = x(n)$.



Théoriquement, si le signal d'origine a été bien échantillonné, la reconstruction parfaite est possible, donc le sur-échantillonnage aussi. Cependant, la formule de reconstruction (avec les sinus cardinaux) est compliquée à mettre en pratique. On fait appel à des idées plus simples [25]:

- Intcaler des zéros (interpolation zéro)
- Recopier la valeur de l'instant précédent (interpolation échelon)
- Tracer une droite entre deux échantillons disponibles

Adjacents (interpolation linéaire)



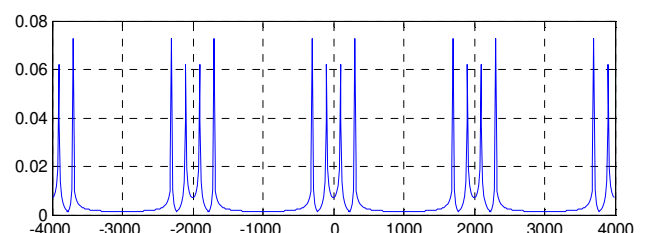
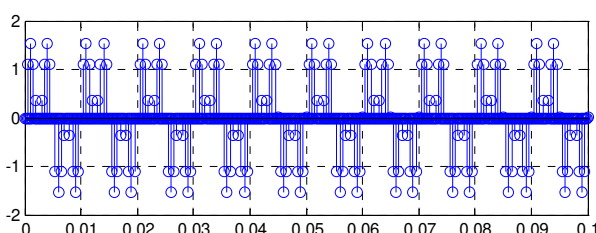
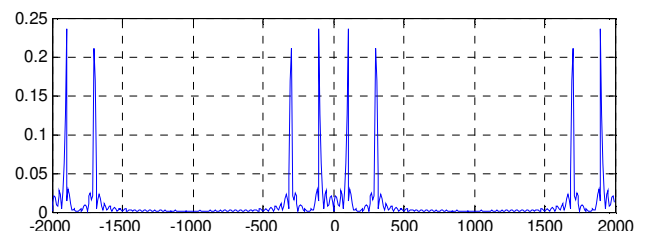
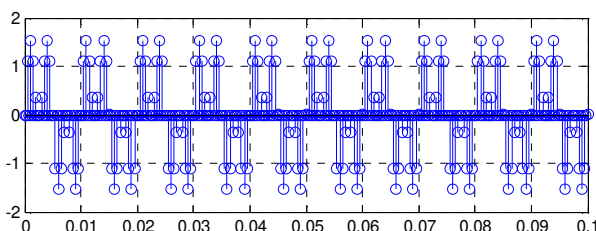
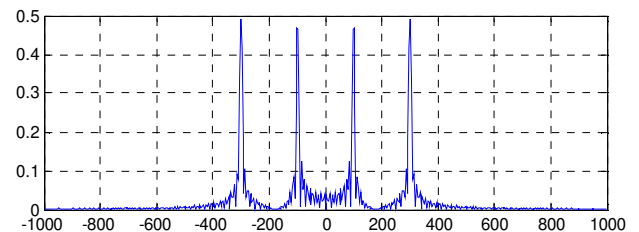
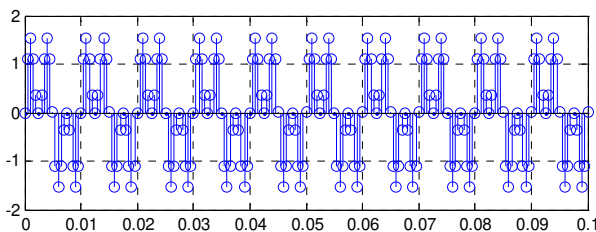
Le signal d'origine n'a pas de contenu fréquentiel au-delà de $f_e/2$. Le processus d'interpolation est susceptible d'en ajouter. On le fait donc suivre d'un filtrage passe-bas à la coupure $f_e/2$ pour supprimer le contenu ajouté. C'est la raison pour laquelle la méthode d'interpolation n'a pas beaucoup d'importance.

Exercice d'application : Vérifier que l'interpolation zéro préserve le spectre du signal.

$$X_D(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_D(m)z^{-m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_D(nD)z^{-nD} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)(z^{-n})^D = X(z^D)$$

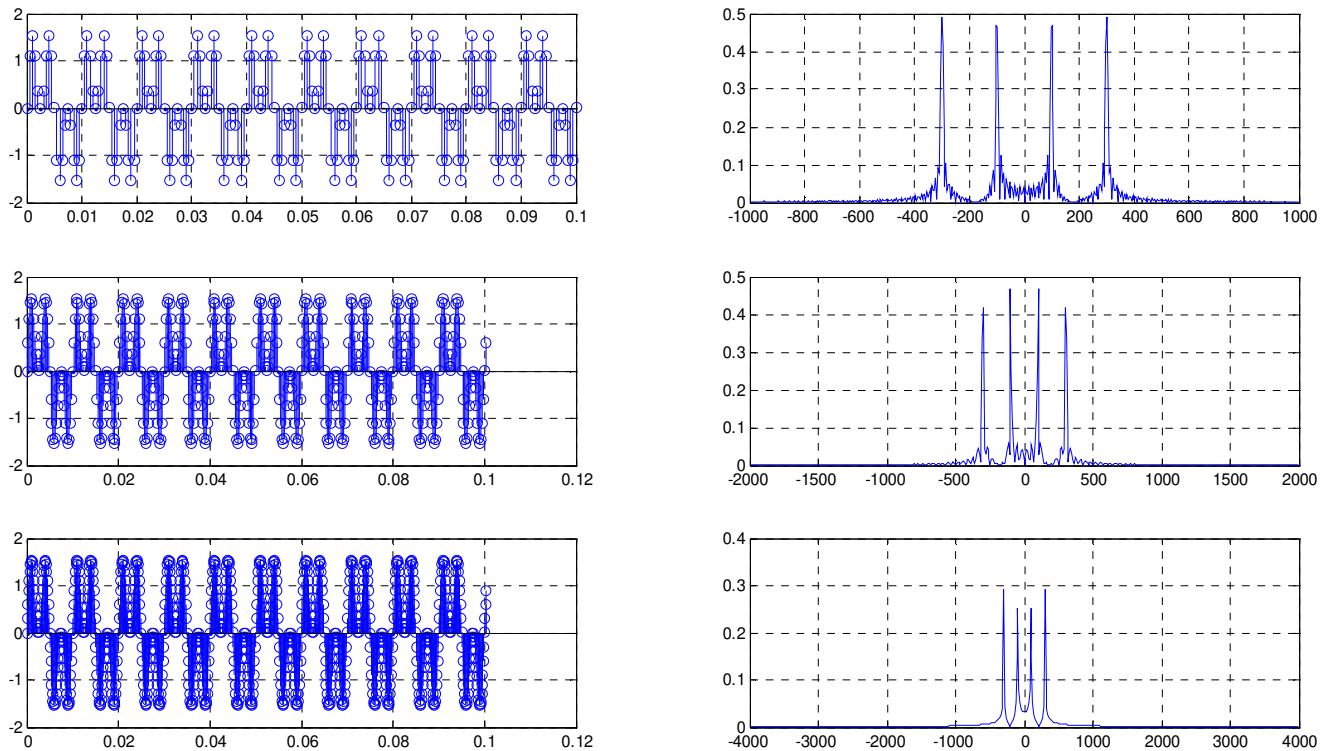
Ce qui en fréquence nous donne : $X_D(f) = X(z = e^{2\pi j f D T_e} = e^{2\pi j f D / f_e})$ ce qui signifie que le signal original et sur-échantillonné ont le même spectre, on ne fait que parcourir le cercle D fois.

Exemple : On reprend le même signal que l'on interpole de 2 puis de 4.

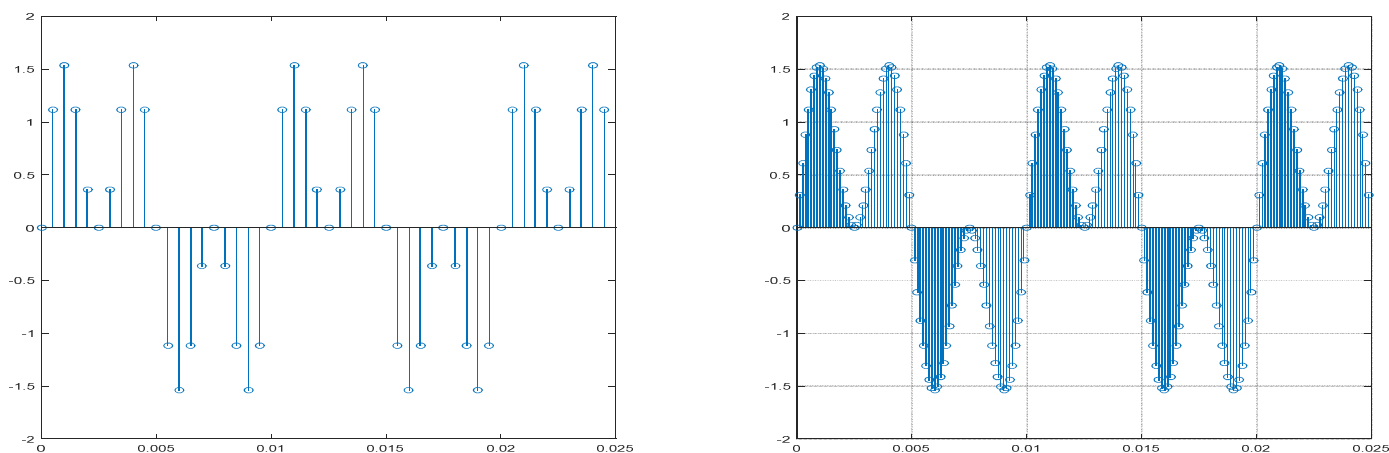


Après sur-échantillonnage, la forme du spectre reste la même aucune énergie n'a été ajoutée au signal), mais la fréquence d'échantillonnage est maintenant de Df_e . Le sur-échantillonnage fait apparaître ce que l'on appelle des spectres miroirs et pour obtenir un signal dont la forme temporelle correspondrait au signal $x(n)$ que l'on aurait échantillonné à une fréquence Df_e .

Il faut supprimer ces spectres miroirs et donc filtrer par un filtre passe-bas le signal sur-échantillonné $y(m)$ avec un filtre ayant une bande atténuée à partir de $f_e/2$



Nous pouvons observer l'effet l'interpolation suivie du filtrage passe-bas anti-miroirs (équivalent à un 0 padding dans le domaine fréquentiel)



Exemples:

- Interpolation de 4 $Y(z) = X(z^4)$

- Interpolation de 2 $Y(z) = X(z^2)$

Remarque :

La décomposition polyphases intervient dans les bancs de filtres, elle permet une représentation simple pour le sur et sous échantillonnage [21]. Quand un signal subit une décimation d'un facteur 2, cela revient à séparer les échantillons avec un indice pair de ceux avec un indice impair, ou encore, à séparer deux phases distinctes ayant des délais (aussi appelé écarts de phase) différents dans le vecteur [22]. Si on considère une décimation d'un facteur M, le principe est exactement le même mais avec M phases distinctes.

Changement de fréquence rationnel

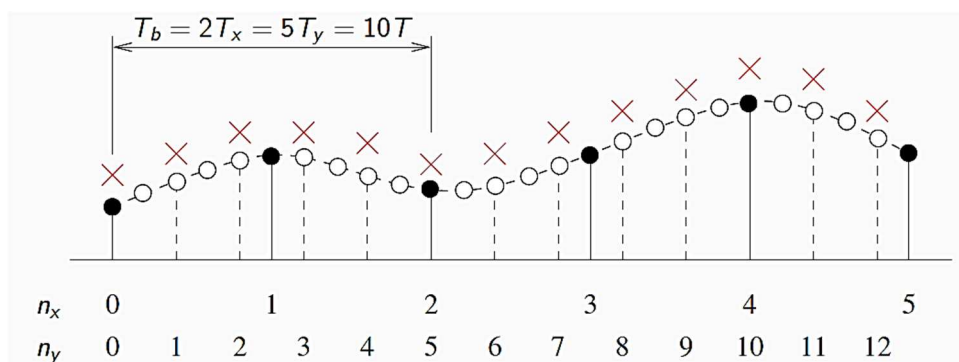
Supposons que l'on veuille changer numériquement la fréquence d'échantillonnage d'un signal $x(n)$ et passer d'une fréquence d'échantillonnage f_1 à une fréquence d'échantillonnage f_2 où $f_2/f_1 = L/M$. Cela conduit donc à sur-échantillonner le signal $x(n)$ d'un facteur L puis à le décimer d'un facteur M.

- Le sur-échantillonnage par L doit être suivie d'un filtre passe-bas coupant à $f_e/2L$ pour supprimer les spectres dus au sur-échantillonnage où f_e est la fréquence d'échantillonnage du signal de sortie.
- La décimation par M doit être précédée d'un filtrage anti-repliement ayant une fréquence de coupure de $f_e/2M$, si f_e est la fréquence d'échantillonnage du signal d'entrée.

On ne conservera alors qu'un seul des deux filtres passe-bas : celui dont la fréquence de coupure est la plus basse



Remarque : Si L et M sont premiers entre eux, décimation et interpolation sont commutatifs, ci-dessous un exemple : de conversion où $L = 5$ et $M = 2$ [31]



En outre, d'après la théorie des nombres, si L et M sont premiers entre eux alors ils existent deux entiers l_0 et m_0 que $l_0L - m_0M = -1 \rightarrow z^{-1} = z^{-(l_0L - m_0M)} = z^{-l_0L} z^{m_0M}$

Exemple : On souhaite sur une réduction de fréquence d'échantillonnage d'un signal audio d'un facteur 2/3 (passage de 48kHz à 32kHz). A noter que décimation et interpolation ne sont pas commutatives sauf si L et M sont premiers entre eux [20].

Remarques

Un filtre de décimation/interpolation à bande passante très étroite est complexe à mettre en œuvre (Ordre élevé)

. Il peut être remplacé par la mise en cascade de filtres plus simples. Les spécifications des filtres individuels sont considérablement assouplis puisque la spécification globale du filtre est partagée entre plusieurs filtres d'ordre inférieur.

Ainsi, pour un facteur de décimation ou interpolation, il est plus judicieux d'opérer par paliers (multi-étages).

Si on doit décimer de 15, cela nécessite un filtre d'ordre élevé. On peut alors procéder en décimant par 3 puis par 5. Ce qui nous permettra d'employer 2 filtres de plus faible ordre.

Les applications du traitement multi-cadences sont nombreuses : Conception de déphaseurs, interfaçage de systèmes numériques à taux différents, implémentation de filtres LP à bande étroite, implémentation de bancs de filtres numériques, codage sous-bande de signaux de parole, filtres miroirs en quadrature, transmultiplexeurs, sur-échantillonnage dans les CA/N et CN/A .

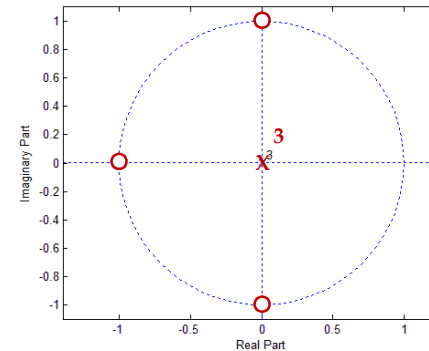
TD n°1

1. Soit $H(z)$ la fonction de transfert d'un SLIT causal avec : $H(z) = \frac{az-1}{z-a}$ avec a réel.

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $H(z)$ correspond à un système stable. Prendre une valeur de $a=0.5$. Représenter alors les pôles et zéros de la fonction, la région de convergence. Donner et tracer $|H(f)|$. Ce filtre est-il à minimum de phase?

2. On suppose que le tracé des pôles et des zéros de ce système est le suivant :

- Est-ce un filtre RIF ou RII ? (Justifier votre réponse)
- Donner l'allure approximative de $H(f)$
- Déterminer $H(z)$ puis déterminer et tracer $h(n)$
- A partir de $h(n)$, étudier la stabilité, la causalité et l'invariance de ce filtre.
- Calculer et tracer $H(f)$ pour au moins 3 valeurs
- Ce filtre possède-t-il un retard de groupe constant (justifier)
- Déterminer sa réponse pour une entrée échelon $x(n)=U(n)$.



3. On considère que l'équation aux récurrences du système suivant est donnée comme suit :

$$y(n) = x(n) - x(n-2) - 0.878 y(n-2)$$

- Etudier la causalité et l'invariance de ce système
- Est-ce un filtre RIF ou RII ?
- Déterminer $H(z)$ et donner le tracé des pôles et zéros, en déduire le rôle de ce filtre :
- Donner les allures approximatives de $h(n)$ et $|H(f)|$
- Déterminer la réponse impulsionnelle $h(n)$ et tracer la pour les 3 premières valeurs
- On suppose que $f_e = 6$ kHz, quelle sera la sortie du filtre si l'on donne en entrée : un signal bruité par une sinusoïde de 500 Hz puis un signal composé de 2 sinusoïdes l'une de 1500 Hz et l'autre de 2500 Hz

4. Obtenir les coefficients d'un filtre à RIF passe-bas par la méthode de fenêtrage pour obtenir les spécifications suivantes :

- Fréquence de coupure idéale : $f_c = 1.75$ kHz
- Largeur de transition : $\Delta f = 0.5$ kHz
- Atténuation en bande atténuée : $A = -20 \log_{10}(\delta) > 51$ dB avec $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$
- Fréquence d'échantillonnage : $f_e = 8$ kHz

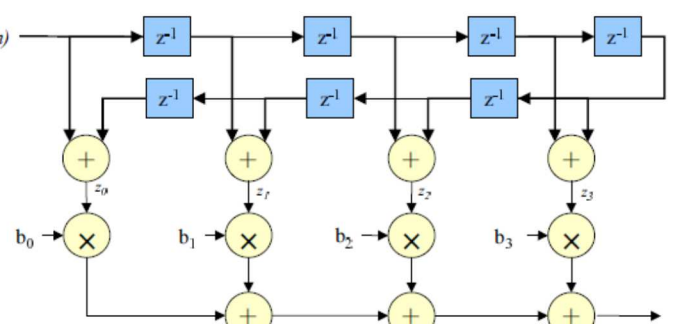
5. On souhaite approcher un filtre idéal passe-haut par un filtre à réponse impulsionnelle finie, synthétisé par la méthode du fenêtrage. Ce filtre doit répondre aux spécifications suivantes :

- ✓ Fréquence de coupure $f_c = 2$ kHz
- ✓ Largeur de transition : $\Delta f = 0.5$ kHz
- ✓ Atténuation en bande atténuée : $A = -20 \log_{10}(\delta) > 40$ dB avec $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$
- ✓ Fréquence d'échantillonnage : $f_e = 8$ kHz

- Déterminer l'expression mathématique exacte de $h'(n)$.
- Calculer $h'(0)$ et tracer approximativement $h'(n)$.
- Quel est l'intérêt du fenêtrage et quel est son inconvénient ?
- Quel est l'inconvénient de cette technique de synthèse des
- Citer un avantage et un inconvénient de la synthèse par d

6. On considère un filtre RIF de longueur $N=8$ dont la Structure est donnée ci-contre :

FGE, USTHB [assiakourgli@gmail.com / <http://perso.usthb.dz>.



Avec $b_0=0.2, b_1=0.3, b_2=0.4, b_3=0.5$

- Déterminer l'équation aux différences
- Déterminer la fonction de transfert puis $h(n)$
- Identifier alors le type de filtre RIF (I,II,III ou IV)
- Quel est son inconvénient ?

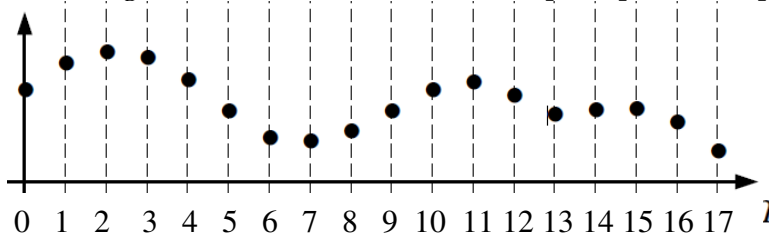
7. On considère le filtre passe-bas analogique normalisé à un pôle unique $H_N(p)=1/(p+1)$. On considère que la fréquence de coupure normalisée à -3db se produit pour $f_c=f_e/10$. Par transformation bilinéaire, trouver le filtre numérique passe-bas équivalent $H(z)$.

8. Soit la fonction de transfert passe bas dénormalisée $H(p)$ suivante : $(p+0.1)/((p+0.1)^2+\omega_a^2)$. Sachant que $\omega_a=4$, utiliser la méthode de la transformée bilinéaire pour transformer ce filtre en numérique. Le filtre numérique aura sa résonance pour $\omega_N = \pi/(2.T_e)$.

9. Soit le signal $x(n)=n U(n)$, donner et tracer le signal résultant si :

- On le décime par 2, par 3 et par 4
 - On l'interpole de 2, de 4
 - On le décime par 2 puis qu'on l'interpole par 2 et si on inverse les 2 opérations
 - On le décime par 3 et on l'interpole de 2 et si on inverse les 2 opérations
- Vérifier que la décimation n'est pas invariante à la translation contrairement à l'interpolation;

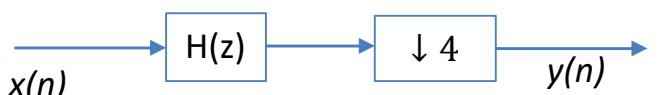
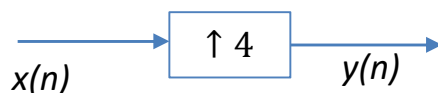
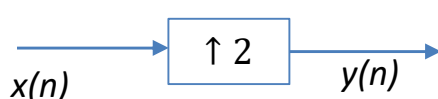
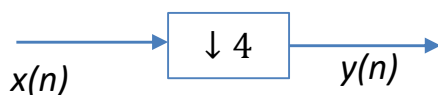
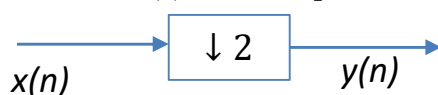
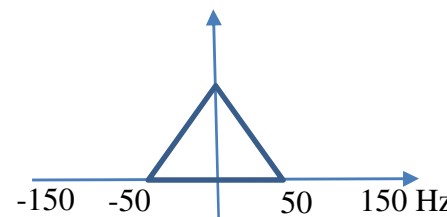
10. Soit le signal suivant, on veut le décimer par 2 puis l'interpoler par 2 également



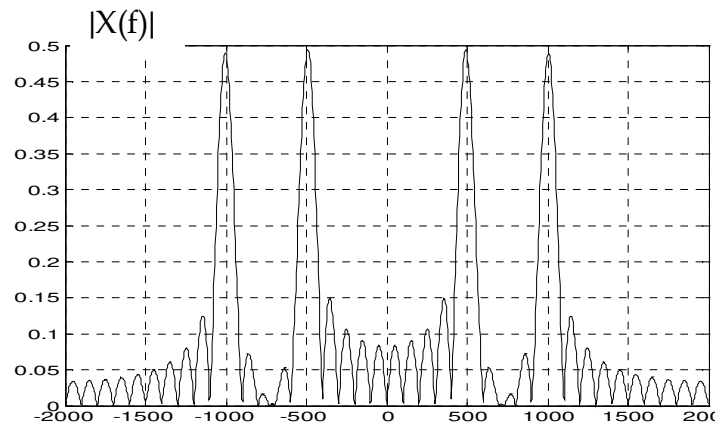
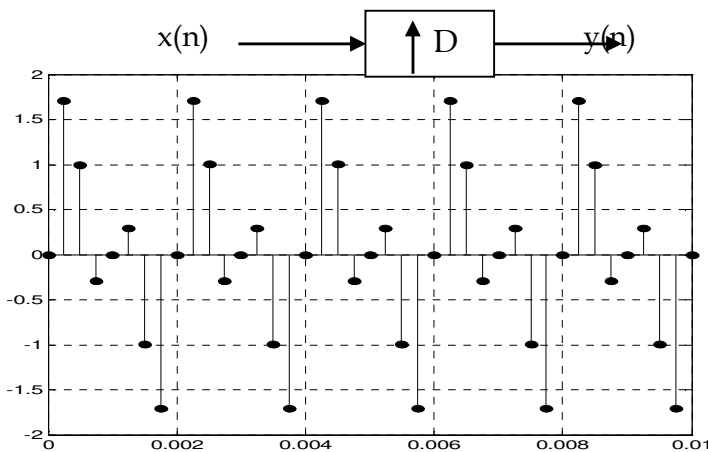
- Donner le tracé du signal décimé puis interpolé
- On considère que la fréquence du signal original est 10kHz, donner la fréquence à la sortie du décimateur puis celle de l'interpolateur.

11. On considère le signal $x(n)$ dont la TFTD est donnée comme ci-contre ,

- Tracer la TFTD de la sortie correspondante pour les 8 cas :
- Donner la fréquence de coupure du filtre passe-bas $H(z)$ pour chaque cas
- Préciser le rôle de $H(z)$ dans chaque cas



12. Avant de convertir un signal numérique $x(n)$ (ci-dessous signal et sa TFTD), en signal analogique, on décide de l'interpoler par D.



- Quelle est l'intérêt de l'interpolation dans ce cas ?
- Déterminer l'expression du signal $x(n)$.
- Tracer le signal interpolé pour $D=3$ et sa TFTD.
- On considère que $D=6$, tracer à nouveau le signal interpolé et sa TFTD.
- Donner la décomposition polyphases initiale et finale pour $D=3$
- Tracer le signal et sa TFD dans le cas où l'on fait suivre l'interpolation d'un filtre passe-bas à $f_c/2$

13. Un signal audio est enregistré à une fréquence de 30 kHz, à la réception avant de le convertir en analogique, on opère un changement de fréquence telle que la nouvelle fréquence soit 45 kHz.

- Donner le schéma général de cette opération en employant la décimation et l'interpolation
- Donner la fréquence de coupure de chaque filtre passe-bas, lequel faudra-t-il garder

Solutions

1. Le module vaut toujours 1 (cellule passe-tout), Maximum de phase

2. Tous les pôles en 0 alors RIF, $H(z) = z^{-3} + z^{-2} + z^{-1} + 1$, $h(n) = \delta(n-3) + \delta(n-2) + \delta(n-1) + 1$,

$H(f) = 2(\cos(3\pi f T_e) + \cos(\pi f T_e))e^{-3\pi j f T_e}$, Retard de groupe cst, $x(n) = U(n)$ alors $y(n) = U(n-3) + U(n-2) + U(n-1) + U(n)$

3. Causal, stable, RII, notch filter, $H(z) = \frac{K(z^2 - 1)}{z^2 + 0.878} = \frac{K(1 - z^{-2})}{1 + 0.878z^{-2}}$

4. $\Delta f = 0.125$ $f_c = 0.4375$ $h(n) = f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c} = \frac{\sin(\pi n 0.4375)}{\pi n}$ pour $n \neq 0$ et $h(0) = f_c$ Hamming $\Rightarrow N = 53$

Les coefficients du filtre sont symétriques, il suffira par conséquent de calculer les valeurs de $h(0)$ à $h(26)$.

$h(0) = f_c = 0.4375$ $w(0) = 0.54 + 0.46\cos(0) = 1$ $h(0) = h(N(0))$ $w(0) = 0.4375$

$$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{52}\right) & \text{pour } |n| \leq 26 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$h(0) = 0.4375$, $h(1) = h(-1) = 0.311$, $h(2) = h(-2) = 0.060$, $h(3) = h(-3) = -0.0856$, $h(4) = h(-4) = -0.053$, $h(5) = h(-5) = 0.0325$, $h(6) = h(-6) = 0.0434$, $h(7) = h(-7) = -0.0075$, $h(8) = h(-8) = -0.0319$, ..., $h(26) = h(-26) = -0.0009$.

Pour rendre le filtre causal, on ajoute 26 à chacun des indices.

5. $\Delta f = 0.5$ $f_c = 0.125$ $h(n) = -f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$ pour $k \neq 0$ et $h(0) = 1 - f_c$ $A > 40$ Hanning $\Rightarrow N = 51$

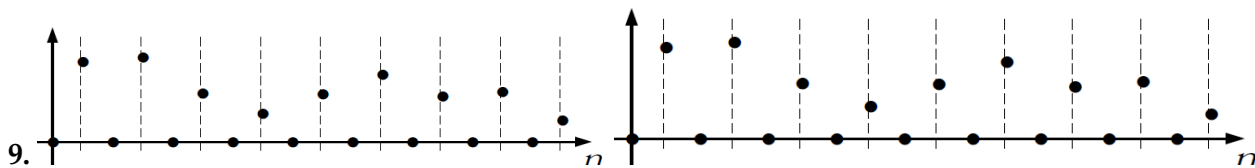
6. $y(n) = b_3(x(n-3) + x(n-4)) + b_2(x(n-2) + x(n-5)) + b_1(x(n-1) + x(n-6)) + b_0(x(n) + x(n-7))$

Type II, pas adéquat pour un passe-haut (un zéro en -1)

7. $\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{0.65}{T_e} \Rightarrow H(p) = H_N(p) \Big|_{p/\omega_A} = \frac{\omega_A}{p + \omega_A} = \frac{0.65/T_e}{p + 0.65/T_e}$

$p = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.65/T_e}{\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.65/T_e} = \frac{0.245(1+z^{-1})}{1-0.509z^{-1}}$

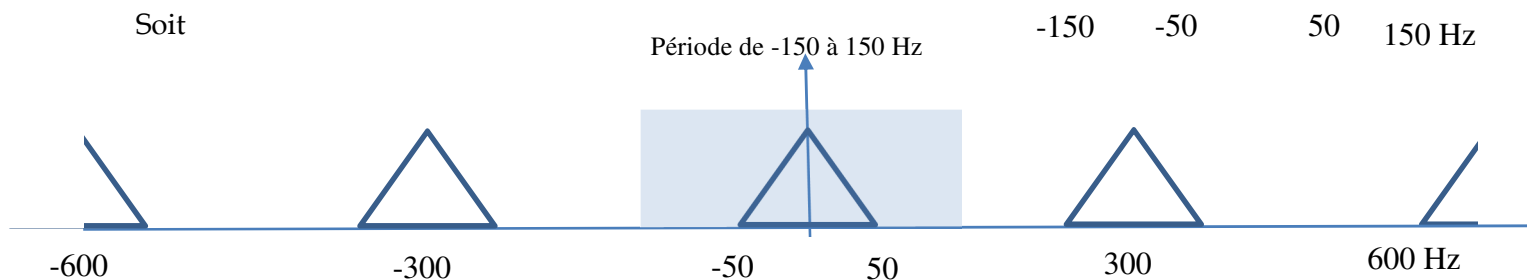
8. $\omega_a = 4 = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow T_e = 0.5 \Rightarrow p = 4 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow H(z) = \frac{4 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.1}{\left(4 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.1\right)^2 + 16} = \frac{0.125 + 0.006z^{-1} - 0.118z^{-2}}{1 + 0.0006z^{-1} - 0.950z^{-2}}$



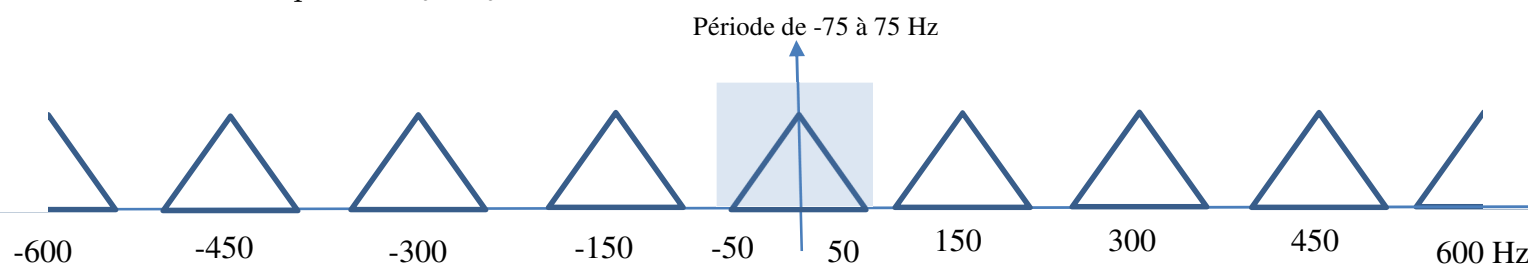
Après décimation $f_e = 5\text{kHz}$ Après interpolation $f_e = 10\text{kHz}$

10. Le signal original est périodique de période 300Hz

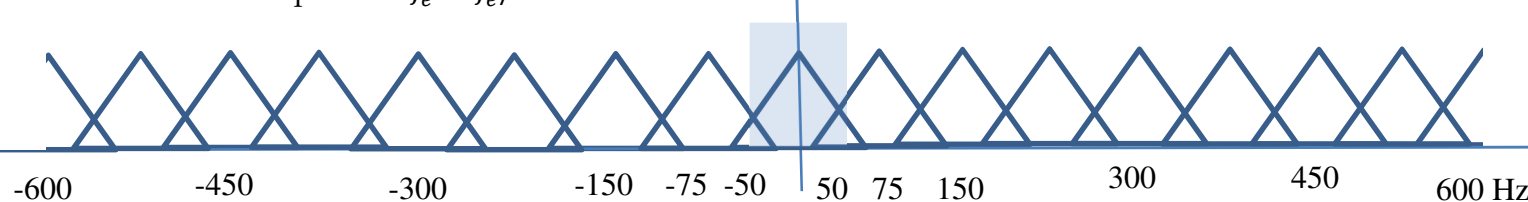
Soit



Décimation par 2 $\Rightarrow f'_e = f_e/2 = 150\text{Hz}$



Décimation par 4 $\Rightarrow f'_e = f_e/4 = 75\text{Hz}$ Période de 37,5 à 37,5 Hz

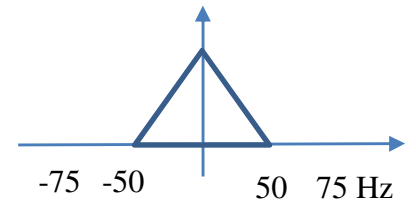


C'est pour cette raison qu'on place un filtre passe-bas à $f_e'/2 = f_e/(2M)$

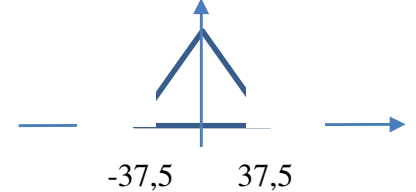


Le signal original est périodique de période 300Hz

Période de -75 à 75 Hz

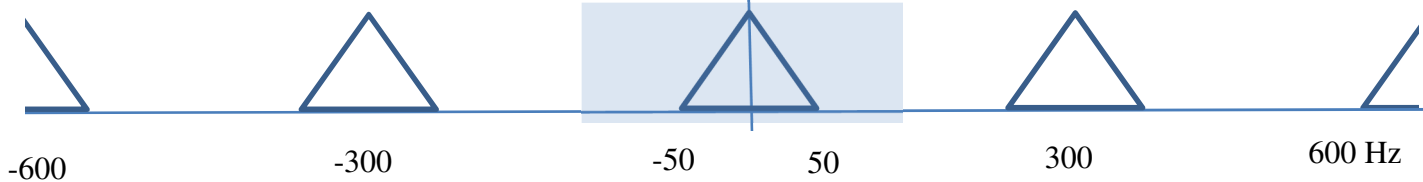


Période de -37,5 à 37,5 Hz



-150 -50 50 150 Hz

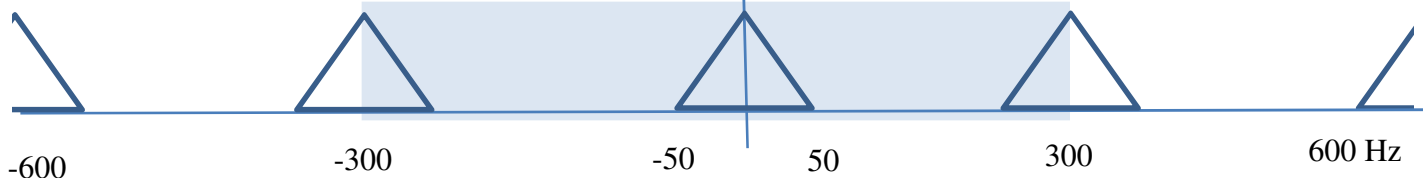
Période de -150 à 150 Hz



Interpolation par 2 $\Rightarrow f_e' =$

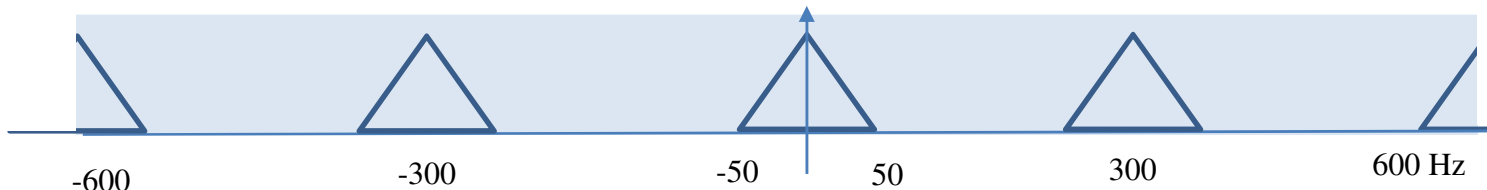
Période de -300 à 300 Hz

$2f_e = 600\text{Hz}$

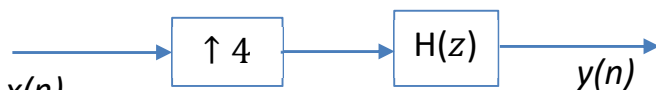
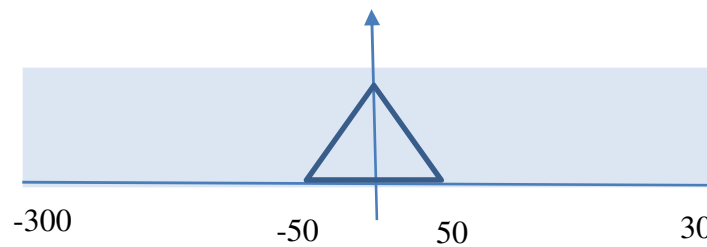
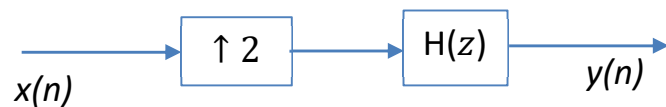


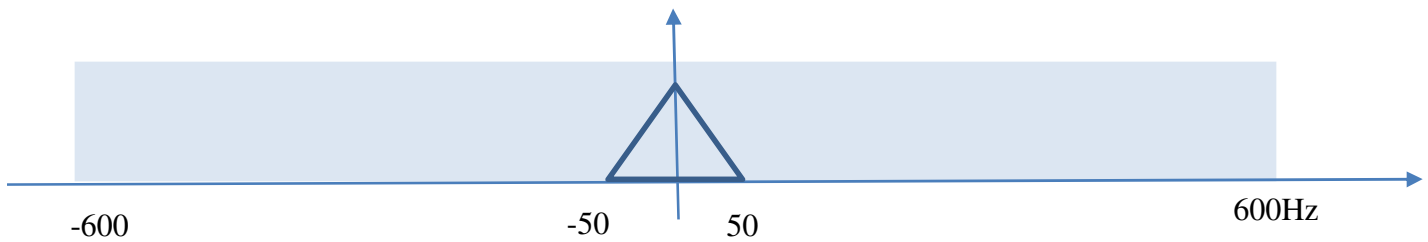
Interpolation par 4 $\Rightarrow f_e = 4f_e = 1200\text{Hz}$

Période de -600 à 600 Hz



Apparition de spectres miroirs $\Rightarrow$ Filtre passe-bas à $f_e/4$





$$f_c = \frac{300}{2.2} = 75, f_c = \frac{300}{2.4} = 37,5$$

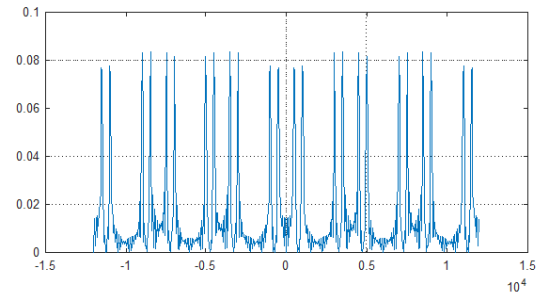
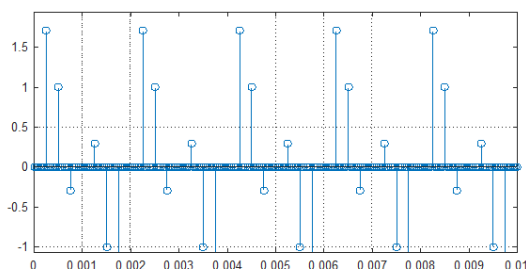
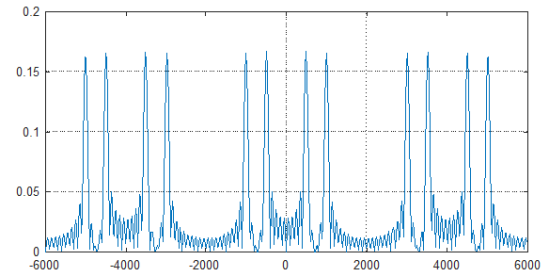
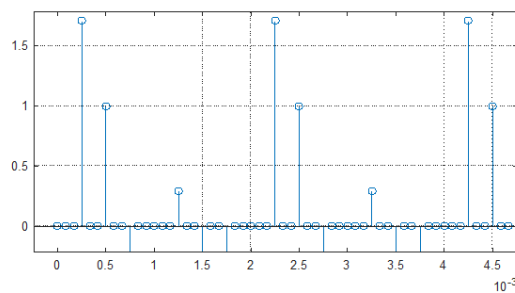
$$f_c = \frac{300}{2} = 150, f_c = \frac{300}{2} = 150$$

Décimation: Anti-repliement

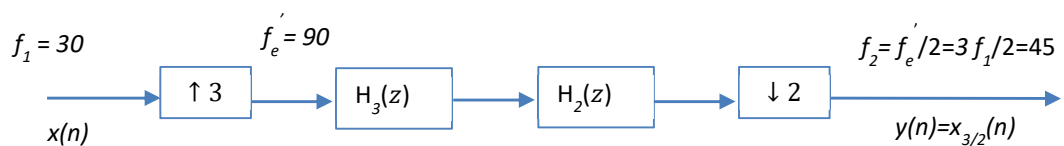
Interpolation: Anti-miroirs (Voir cours)

11. Gagner en précision avant la conversion numérique analogique

- $h(n) = \sin(2\pi \cdot 500 \cdot n) + \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot n)$ $f_e = 4\text{kHz}$
- $D=3 \Rightarrow$ Insérer 2 zéros entre 2 échantillons consécutifs. TFTD sur 3 périodes de -6kHz à 6kHz
- $D=6 \Rightarrow$ Insérer 5 zéros entre 2 échantillons consécutifs. TFTD sur 6 périodes de -12kHz à 12kHz



12.



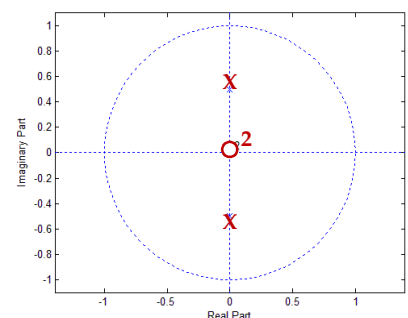
Exercice supplémentaires

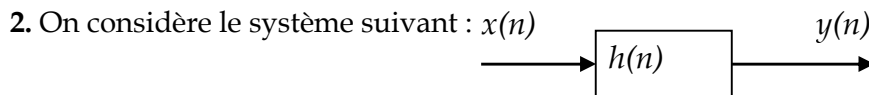
$$f_c = f_1/2 = f'_e/6 = 15$$

$$f_c = f'_e/4 = 22.5$$

1. On suppose le tracé des pôles et des zéros du système suivant :

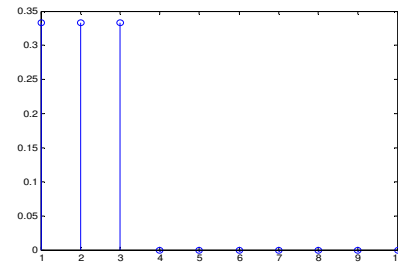
- Est-ce un filtre RIF ou RII ? (Justifier votre réponse)
- Donner l'allure approximative de $H(f)$
- Déterminer $H(z)$ puis déterminer l'équation de récurrence
- Déterminer et tracer $h(n)$
- A partir de $h(n)$, étudier la stabilité, la causalité et l'invariance du filtre





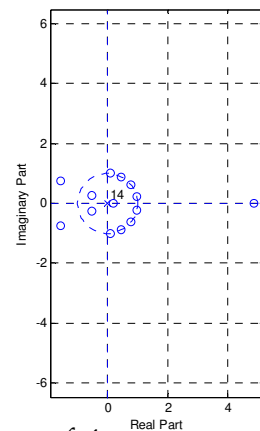
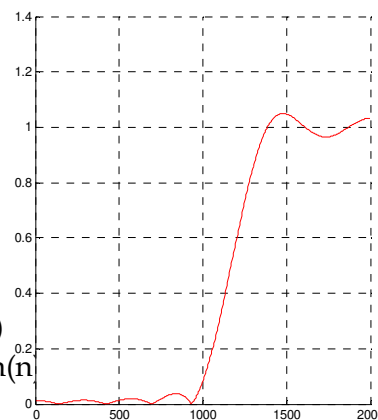
On suppose que $h(n)$ est donné comme ci-contre.

- Etudier la causalité. Est ce un filtre RIF ou RII
- A partir de l'expression de $h(n)$, déduire le rôle de ce filtre :
- Déterminer l'équation aux récurrences du système :
- Déterminer les pôles et zéros de ce filtre puis donner leur tracé. En déduire un tracé approximative de $|H(f)|$
- Calculer et tracer $|H(f)|$ puis en déduire le tracé du module de la TFD pour $N=6$.



3. Au cours de la transmission d'un signal numérique (échantillonné à une fréquence de 2,5 kHz), il a été affecté d'un bruit localisé entre les bandes de fréquence 350 Hz et 550 Hz. On veut éliminer le bruit par l'emploi d'un filtre RIF possédant une bande de transition $\Delta f=100$ Hz. Concevoir ce filtre par la méthode du fenêtrage. On souhaite une atténuation en bande atténuée $A=-20 \log_{10}(\delta) > 20$ dB.

- Tracer $H(f)$ idéal
- Déterminer $h(n)$ et l'ordre N du filtre
- Calculer $h(0)$, $h(1)=h(-1)$
- Tracer alors approximativement $H(f)$



4. Les tracés du module de la réponse en fréquence de 0 à $f_e/2$ et des pôles et zéros d'un filtre numérique synthétisé par la méthode des fenêtres sont donnés comme suit :

- Le déphasage de ce filtre est-il linéaire ? (Justifier)
- Déterminer $H(k)$ puis la réponse impulsionnelle $h(n)$
- Calculer $h(0)$.
- On veut employer une fenêtre de hanning. Que devient le tracé du module de la réponse en fréquence (le superposer à $H(f)$)

5. On considère le filtre analogique d'ordre 3 associé à la fonction d'approximation de Butterworth. Réaliser le filtre numérique passe-bas correspondant en utilisant la transformation bilinéaire. La fréquence de coupure est $f_c=1$ kHz et la fréquence d'échantillonnage $f_e=10$ kHz.

6. On cherche à réaliser un filtre numérique équivalent au filtre analogique dénormalisé de transmittance

$$H_A(p) = \frac{1}{1 + 0.2p}$$

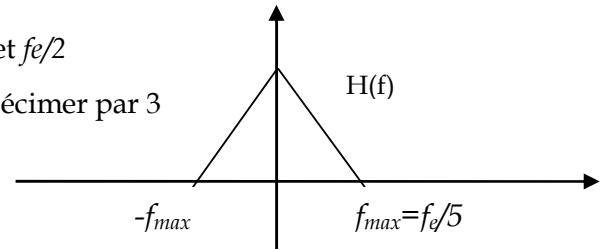
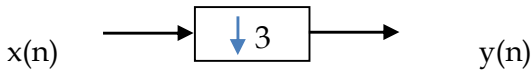
- Déterminer la réponse impulsionnelle $h_a(t)$
- Calculer la réponse en z de ce filtre obtenue par transformation bilinéaire pour une fréquence d'échantillonnage $T_e = 0.2$. Quelle est sa fréquence de coupure ? Calculer la réponse en z d'un filtre similaire de même fréquence de coupure que le filtre analogique.

7. Soit le signal suivant : $h(n) = \sin(2\pi \cdot 150 \cdot n) + \sin(2\pi \cdot 350 \cdot n)$ et le module de la TFD dont les tracés respectifs sont donnés ci-dessus : (voir exo 9)

- Déterminer T_e .
- Quel est l'intérêt de l'interpolation ?
- Tracer le signal (les 20 premières valeurs) et la TF obtenue pour une interpolation de 2 puis de 4 (sans filtrage passe-bas)
- Pourquoi emploie-t-on un filtre passe-bas lors l'interpolation, où le place-t-on ?
- Quel est le type du filtre de Tchebyshev employé dans ce cas et pourquoi ?
- Donner la décomposition polyphases finale pour une interpolation de 2 en donnant l'expression des filtres polyphases

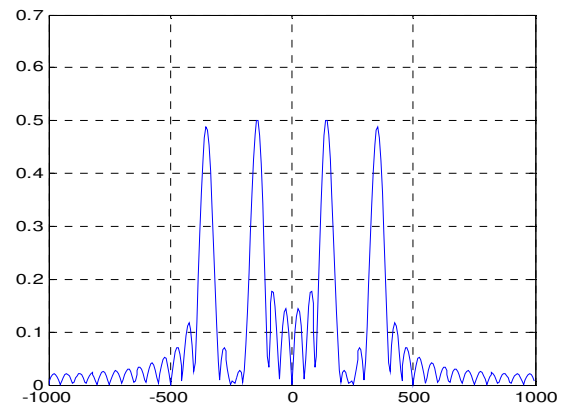
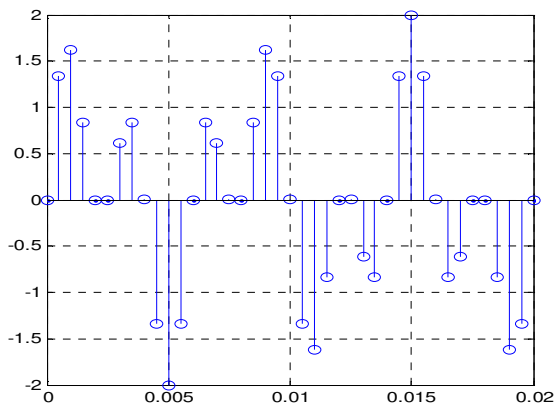
8. Afin de transmettre un signal $x(n)$ (dont la TFTD entre $-f_e/2$ et $f_e/2$

est donné ci-contre) plus rapidement, on décide de le décimer par 3



- Tracer la TFTD obtenue après décimation ($f_e=30\text{kHz}$)
- On veut placer un filtre anti-repliement, ou doit-on le placer ? (justifier), tracer la TFTD à nouveau
- Donner la décomposition polyphases initiale et finale en donnant l'expression de chaque filtre.

9. Soit le signal suivant : $h(n) = \sin(2\pi \cdot 150 \cdot n) + \sin(2\pi \cdot 350 \cdot n)$ et le module de la TFD dont les tracés respectifs sont donnés ci-après :



- Tracer le signal et la TF obtenue pour une décimation de 2 puis de 4 (avec filtrage passe-bas)
- Donner la décomposition polyphases finale pour une décimation de 4 en donnant l'expression des filtres polyphases
- Quel est l'intérêt de la décomposition polyphases
- Pourquoi emploie-t-on un filtre passe-bas lors de la décimation

Solutions : Interros et examens années précédentes

TP n°1 : Synthèse des filtres RIF et RII

But du TP : Dans ce TP, on teste deux méthodes différentes pour synthétiser un filtre numérique : un filtre RIF par la méthode des fenêtres et un filtre RII par la méthode de la transformation bilinéaire.

1. Rappels

Un filtre de réponse impulsionnelle finie (RIF) possède une fonction de transfert polynomiale. Il ne peut pas être obtenu par transposition d'un filtre continu, comme cela est fait pour les filtres RII. Les filtres RIF présentent l'inconvénient de nécessiter un grand nombre de coefficients pour obtenir les mêmes caractéristiques fréquentielles. Mais par contre, ils sont inconditionnellement stables. On peut synthétiser des filtres RIF à phase linéaire, c'est-à-dire à temps de propagation de groupe constant.

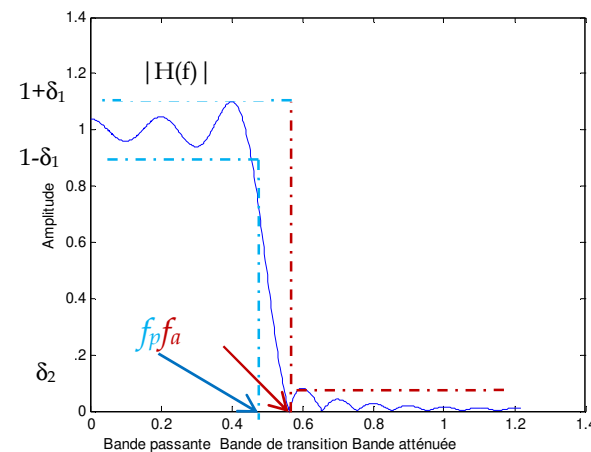
L'intérêt des filtres récursifs (RII) est leur faible coût en calcul. Avec très peu de pôles et zéros on peut assurer la plupart des réponses fréquentielles dont on peut avoir besoin dans les différentes applications. Les inconvénients des filtres récursifs sont : leur non-linéarité en phase linéaire (phase linéaire : temps de propagation constant pour tout fréquence), et leur instabilité numérique. En effet, le filtre étant rétroactif, les erreurs de précision numérique deviennent une question d'importance, car elles peuvent s'amplifier et devenir dehors contrôle, d'abord dans la forme de bruit, mais éventuellement dans la forme d'instabilité. A noter que les filtres RII peuvent être conçus par des méthodes semblables à ceux utilisés pour les filtres analogiques.

Gabarit d'un filtre

Le gabarit d'un filtre n'est autre que l'ensemble des caractéristiques du filtre, à savoir :

- Le gain du filtre dans la bande passante.
- L'atténuation du filtre en bande coupée f_a .
- La fréquence de coupure f_c , on l'exprime souvent sous forme normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage.
- La largeur de bande de transition Δf souhaitée qui doit être la plus petite possible.
- Les éventuelles oscillations en bande passante et/ou atténuée.

- La détermination des coefficients d'un filtre RIF par la méthode de la fenêtre est réalisée par la fonction Python `firwin` de la bibliothèque `scipy.signal`.



2. Démo

-*- coding: utf-8 -*-

```
import numpy as np; import scipy.signal as sp; import matplotlib.pyplot as plt
from plot_zplane import zplane
#Conception d'un filtre RIF passe-bas fc=200, fe =1000, Deltaf = 100, Aa>20
plt.figure(1)
fc=200;fe=1000; Deltaf=100
fcn=2*fc/fe ; Deltafn=Deltaf/(fe/2)
Ncoef = int(np.ceil(1.8/Deltafn))
n = np.arange(-(Ncoef//2),Ncoef//2+1)
b = fcn*np.sinc(n*fcn);
#Visualisation de la réponse impulsionnelle et de la réponse fréquentielle
```

```

L=256
f,Hf= sp.freqz(b,1,L,fs=fe);
plt.subplot(211); plt.stem(b);
plt.subplot(212); plt.plot(f, np.abs(Hf))
plt.title('Module du Filtre'); plt.xlabel('Fréquence (Hz)');plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend()

# Détermination et tracé des pôles et zéros
plt.figure(2)
a=np.array([1])
z,p = zplane(b,a)

# Effet de l'augmentation du nombre de coefficients
fc=0.2;fe=1; fcn=2*fc/fe
A=np.array([21, 61, 101]);i=1;
a = np.array([1]);
L = 256;
plt.figure(3)
for N in A:
    n = np.arange(-(N//2),N//2+1)
    b = fcn*np.sinc(n*fcn);
    f,Hf= sp.freqz(b,a,L,fs=fe);
    plt.subplot(2,3,i); plt.stem(b);
    plt.subplot(212); plt.plot(f, np.abs(Hf),label='N=%d'%N)
    plt.title('Module du Filtre'); plt.grid(True); plt.xlabel('Fréquence (Hz)');plt.ylabel('Amplitude')
    plt.legend()
    i+=1

#Effet du fenêtrage
from scipy.signal import windows
plt.figure(4)
N=41;
A=np.array([np.ones(N), windows.hann(N),windows.hamming(N) ]);
i=1;
for Fen in A:
    n1 = np.arange(-(N//2),N//2+1)
    b1 = fcn*np.sinc(n1*fcn)*Fen;
    f,Hf1= sp.freqz(b1,a,L,fs=fe);
    plt.subplot(2,3,i); plt.stem(b1); plt.title('Filtre * Fen %d'%i);
    plt.subplot(212); plt.plot(f, np.abs(Hf1),label='Fen %d'%i)
    plt.title('Module du Filtre'); plt.grid(True); plt.xlabel('Fréquence (Hz)');plt.ylabel('Amplitude')
    plt.legend()
    i+=1

#Effet du fenêtrage (affichage en db)
plt.figure(5)
fc=0.2;fe=2; fcn=2*fc/fe; N=41;

```

```
a = np.array([1]);
L = 256;
A=np.array([np.ones(N), windows.hann(N),windows.hamming(N) ]);i=1;
for Fen in A:
    n2 = np.arange(-(N//2),N//2+1)
    b2= fcn*np.sinc(n2*fcn)*Fen;
    f,Hf1= sp.freqz(b2,a,L,fs=fe);
    plt.subplot(2,3,i); plt.stem(b2); plt.title('Filtre * Fen %d'%i);
    plt.subplot(212); plt.plot(f, 20*np.log10(np.abs(Hf1)),label='Fen %d'%i)
    plt.title('Module du Filtre'); plt.grid(True); plt.xlabel('Fréquence (Hz)');plt.ylabel('Amplitude')
    plt.legend()
    i+=1
```

Transformation bilinéaire

```
fp=195;fa= 205; fe=1000;
att_p=1; att_a=40;
wpn = fp*2*np.pi;
wan = fa*2*np.pi;
wpa = 2*fe*np.tan(np.pi*fp/fe) #Compensation de pulsation
```

```
N, WA = sp.buttord(wpn,wan, att_p,att_a, fs=fe)
z,p,k = sp.buttap(N); """"Filtre analogique hn(p) sous forme de poles, zéros et gain""""
# # sp.cheb2ap(N,att_a); sp.buttap(N); sp.ellipap(N,att_p,att_a)
Bpn,Apn = sp.zpk2tf(z,p,k); """"Filtre analogique hn(p) sous forme num, den """"
Bp, Ap = sp.lp2lp (Bpn,Apn,wpa); """"Denormalisation """"
# # sp.lp2hp sp.lp2bp sp.lp2bs
poles_anal = np.roots(Ap);
Bz1, Az1 = sp.bilinear(Bp,Ap,fe); """"Passage de H(p) vers H(z) par Transformation Bilineaire""""
```

Comparaison filtres analogique Ha(f) et numérique Hz(f)

```
L = 256;
fz,Hf= sp.freqz(Bz1,Az1,L,fs=fe);
wa,Ha = sp.freqs(Bp,Ap, worN=np.arange(1,np.pi*fe)); fa=wa*0.5/np.pi;
plt.figure(6);
plt.plot(fz, np.abs(Hf),label='H(f) du filtre Numérique');
plt.plot(fa, np.abs(Ha), label='H(f) du filtre Analogique'); plt.grid(); plt.legend()
```

```
plt.figure(7);
z,p=zplane(Bz1,Az1);
```

3. A faire en TP

```
# import numpy as np; import scipy.signal as sp; import matplotlib.pyplot as plt
# from plot_zplane import zplane
# import sounddevice as snd
# import scipy.io.wavfile as wav
```

FGE, USTHB [assiakourgli@gmail.com / <http://perso.usthb.dz/~akourgli/>

```
# fe,x = wav.read('vousavezducourrierenattente.wav')
# snd.play(x, fe)

# Te=1/fe; N=len(x); t = np.arange(0,N)*Te;
# plt.figure(1);plt.subplot(211); plt.plot(t,x); plt.grid(True);
# plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Phrase');

# # t = np.arange(0,N)*Te;
# # f0 = 1500; b = 20*np.cos(2*np.pi*f0*t);
# # Xb =x +b ;
# # snd.play(np.int8(Xb), fe)
```

"""

-----A faire-----

Calculer et Visualiser sa TFD en db dans la figure (1)

Rajouter du bruit (3 sinusoides avec une fréquence de 1500, 2000 et 3000)

Ecouter le signal bruité

Visualiser la TFD du signal bruité en db

Concevoir un filtre par la méthode des fenêtres avec $A_a > 50$ et $\Delta f < f_c/10$, f_c à déterminer en utilisant firwin

Visualiser la réponse impulsionnelle et la fonction de Transfert du filtre

Filtrer le signal bruité X_b ($y = \text{sp.lfilter}(b,a,x)$) avec le filtre créé (b,a)

Ecouter et visualiser la TFD du signal filtré et comparer avec l'originale'

Concevoir Filtre par la méthode de la transformation bilinéaire avec $A_a > 50$ $A_p = 2$ avec N à déterminer,

il faut essayer plusieurs filtres analogiques (Butterworth, Cheby 1, Cheby 2), lequel vous semble adéquat?

Visualiser la réponse impulsionnelle et la fonction de Transfert du filtre pour chaque méthode

Filtrer le signal bruité X_b avec le filtre créé

Ecouter et visualiser la TFD du signal filtré

Commenter

Comparer entre les 2 méthodes de synthèse des filtres. Pour cet exemple, laquelle vous semble préférable?

"""

TP n°2 (Sous Python)

1. Interpolation et Décimation : Démo

```
# -*- coding: utf-8 -*-
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt; import scipy.signal as sp;

N = 30; f0=100; f1=300; fe=2000; Te=1/fe; NF=1024;
t = np.arange(0.0, N*Te, Te); x = np.sin(2.0*np.pi*f0*t) + np.sin(2.0*np.pi*f1*t) ;
TFx = np.fft.fft(x,NF); TFx = np.fft.fftshift(TFx); freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*fe/NF;
plt.figure(1)
plt.subplot(321); plt.stem(t, x); plt.subplot(322); plt.plot(freq, np.abs(TFx));
x1 = np.zeros(2*N); x1[::2]=x[::] ; t1 = np.arange(0.0, N*Te, Te/2); TFx1 =
np.fft.fft(x1,NF);
TFx1 = np.fft.fftshift(TFx1); freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*2*fe/NF;
plt.subplot(323); plt.stem(t1, x1); plt.subplot(324); plt.plot(freq, np.abs(TFx1));
x2 = np.zeros(4*N); x2[::4]=x[::] ; t2 = np.arange(0.0, N*Te, Te/4); TFx2 =
np.fft.fft(x2,NF);
TFx2 = np.fft.fftshift(TFx2); freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*4*fe/NF;
plt.subplot(325); plt.stem(t2, x2); plt.subplot(326); plt.plot(freq, np.abs(TFx2));

plt.figure(2)
freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*fe/NF;
plt.subplot(321); plt.stem(t, x); plt.subplot(322); plt.plot(freq, np.abs(TFx));
x1 = sp.resample(x,2*N); t1 = np.arange(0.0, N*Te, Te/2); TFx1 = np.fft.fft(x1,NF);
TFx1 = np.fft.fftshift(TFx1); freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*2*fe/NF;
plt.subplot(323); plt.stem(t1, x1); plt.subplot(324); plt.plot(freq, np.abs(TFx1));
x2 = sp.resample(x,4*N); t2 = np.arange(0.0, N*Te, Te/4); TFx2 = np.fft.fft(x2,NF);
TFx2 = np.fft.fftshift(TFx2); freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*4*fe/NF;
plt.subplot(325); plt.stem(t2, x2); plt.subplot(326); plt.plot(freq, np.abs(TFx2));

N = 100; f0=100; f1=300; fe=2000; Te=1/fe; NF=1024;
t = np.arange(0.0, N*Te, Te); x = np.sin(2.0*np.pi*f0*t) + np.sin(2.0*np.pi*f1*t) ;
TFx = np.fft.fft(x,NF); TFx = np.fft.fftshift(TFx); freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*fe/NF;
plt.figure(3)
plt.subplot(321); plt.stem(t, x); plt.subplot(322); plt.plot(freq, np.abs(TFx));
x1 = x[::2]; t1 = t[::2]; TFx1 = np.fft.fft(x1,NF); TFx1 = np.fft.fftshift(TFx1);
freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*fe/(2*Nf);
plt.subplot(323); plt.stem(t1, x1); plt.subplot(324); plt.plot(freq, np.abs(TFx1));
x2 = x[::6]; t2 = t[::6]; TFx2 = np.fft.fft(x2,NF); TFx2 = np.fft.fftshift(TFx2);
freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*fe/(6*Nf);
plt.subplot(325); plt.stem(t2, x2); plt.subplot(326); plt.plot(freq, np.abs(TFx2));

plt.figure(4)
freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*fe/NF;
plt.subplot(321); plt.stem(t, x); plt.subplot(322); plt.plot(freq, np.abs(TFx));
x1 = sp.decimate(x,2); t1 = t[::2]; TFx1 = np.fft.fft(x1,NF); TFx1 =
np.fft.fftshift(TFx1);
freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*fe/(2*Nf);
plt.subplot(323); plt.stem(t1, x1); plt.subplot(324); plt.plot(freq, np.abs(TFx1));
x2 = sp.decimate(x,6); t2 = t[::6]; TFx2 = np.fft.fft(x2,NF); TFx2 =
np.fft.fftshift(TFx2);
freq = np.arange(-NF/2,NF/2)*fe/(6*Nf);
plt.subplot(325); plt.stem(t2, x2); plt.subplot(326); plt.plot(freq, np.abs(TFx2));
```

2. Interpolation et Décimation : A faire

-*- coding: utf-8 -*-

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt
#from zp_plot import zplane
import scipy.signal as sp;

from scipy.io import wavfile as wf; import winsound ;
fname = 'vousavezducourrierenattente.wav';
winsound.PlaySound(fname, winsound.SND_FILENAME)
fe, x = wf.read(fname);
Te=1/fe; N=len(x); t = np.arange(0,N)*Te;

# plt.figure(1);plt.subplot(211); plt.plot(t,x); plt.grid(True);
# plt.xlabel('temps'); plt.ylabel('Amp'); plt.title('Phrase');
# #Ecrire dans un fichier audio
# fnameb='Copie du signal.wav';
# Xb=X
# Xb=np.int8(Xb) ; wf.write(fnameb, fe, Xb);
# winsound.PlaySound(fnameb,winsound.SND_FILENAME) ;

#-----A faire-----
# 1
# Tester le sous échantillonnage avec et sans filtrage passe-bas
# Afficher le signal et sa TFD dans chaque cas et zoomer sur une meme zone d'une durée de 50 ms et
commenter
# Ecouter le signa obtenu à chaque fois
# Perçoit-on une déformation du son ? A quoi est-elle due ?
# Jusqu'à quel facteur de décimation peut-on aller sans déformation
# Que se passet-il si on garde la même fe (originale) à l'écoute?

# 2
# Tester le sur échantillonnage avec et sans filtrage passe-bas
# Afficher le signal et sa TFD dans chaque cas et zoomer sur une meme zone d'une durée de 50 ms ou
20ms et commenter
# Ecouter le signa obtenu à chaque fois (wf.wite avec la nouvelle fe en multipliant par facteur d'Interp)
# Perçoit-on une déformation du son ? pourquoi?
# Que se passet-il si vous garde la même fe à l'écoute?

# 3
# On veut passer à un signal dont la fréquence d'échantillonnage est 1.5*fe
# Proposer 2 solutions
# Laquelle vous permet de conserver le plus les valeurs originelles ?
```