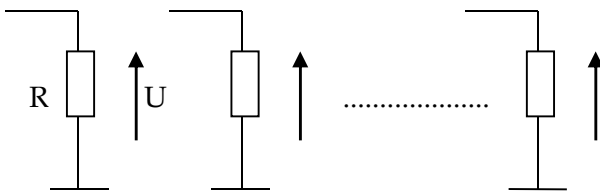


Chapitre II : Processus aléatoires

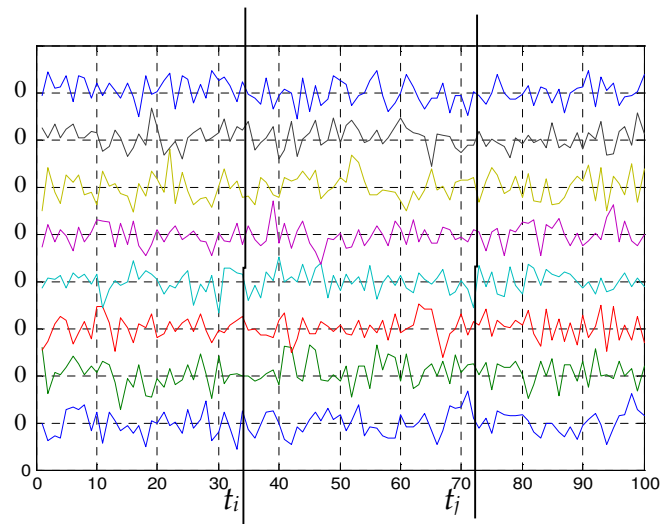
Les processus aléatoires (stochastiques) décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps (ou de l'espace). On peut définir un processus stochastique comme étant une famille de variables aléatoires indexées par le temps définies sur un même espace de probabilités Ω . Un processus aléatoire ne possède pas de représentations temporelles analytiques. Chaque signal aléatoire observé représente une réalisation particulière de ce processus. Le signal de parole, le signal radar, l'électrocardiogramme, l'électro-encéphalogramme, les signaux sismiques en sont des exemples. Rappelons qu'un signal de réception - constitué d'un signal informatif (aléatoire ou déterministe), d'un signal aléatoire d'interférence et de bruit lié au canal de transmission- est aléatoire par nature.

Exemple 1 : Si l'on prend plusieurs résistances identiques (de même valeur) et que l'on mesure la tension. On trouvera une valeur non nulle due à l'agitation thermique des électrons libres dans la résistance. Les tensions mesurées au cours du temps sur l'ensemble des résistances fourniront plusieurs signaux aléatoires tous différents qui constituent le processus aléatoires.



Signaux susceptibles d'être produits en mesurant la tension aux bornes de plusieurs résistances.

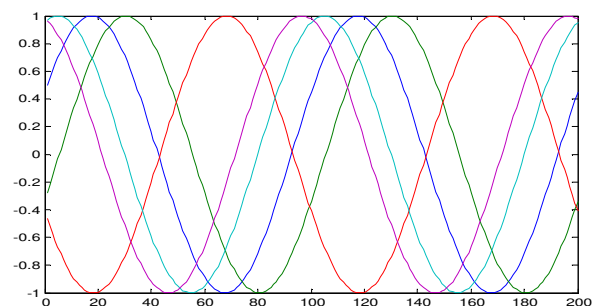
- Chaque tracé fournit un signal aléatoire
- à l'instant t_i , le processus se réduit à une v.a x_i dont la densité est $p(x; t_i) = p(x_i)$



- Deux instants t_i et t_j permettent de définir deux variables aléatoires x_i et x_j on peut définir des densités de probabilités conjointes par: $p(x; t_i, t_j) = p(x_i, x_j)$

Exemple 2 : Signal sinusoïdal à phase aléatoire $X(t, \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi)$ avec une phase φ uniformément répartie entre 0 et 2π

- φ est à valeur réelle continue
- $X(t, \varphi)$ est à valeur continue et réelle
- Un signal particulier $X(t, \varphi_i)$ est déterministe



En pratique, il n'est pas aisé d'obtenir la densité de probabilité $p(x; t_i) = p(x_i)$, on se contente alors des moments d'ordre 1 et 2

1. Espérances mathématiques

Statistiques de 1^{er} ordre: Elles permettent de décrire le signal à un instant donné. Le processus aléatoire devient une simple variable aléatoire que l'on peut décrire à l'aide de moments à condition que sa probabilité soit connue $\forall t_i$.

- moyenne statistique: $\mu_x(t_i) = E\{x(t_i)\} = E\{x_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_i) \cdot p(x, t_i) dx$

- variance: $\sigma_x^2(t_i) = E\{x(t_i) - \mu_x(t_i)\}^2 = E\{x_i^2\} - \mu_x(t_i)^2$

Où $E\{x_i^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_i)^2 \cdot p(x, t_i) dx$ est la valeur quadratique moyenne (on parle aussi de puissance) et $\sigma_x(t_i)$ dit écart-type

Exemple 1: Soit le processus stochastique $x(t)$ défini par $x(t) = a + b \cdot t$ où a et b sont des v.a. dont les probabilités sont connues, alors :

$$\mu_x(t) = E[a + b t_i] = \mu_a + \mu_b t$$

Reprenons l'exemple 2 : Pour un instant donné t_k , on peut calculer des moments statistiques de la variable aléatoire $X(t_k, u)$

- Moyenne :

$$\mu_x(t) = E[X(t)] = \int_0^{2\pi} f_\varphi(\varphi) a \cos(\omega t + \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} a \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) d\varphi = 0$$

-Variance :

$$\sigma_x^2(t) = E[X^2(t)] - \mu_x^2(t) = E[X^2(t)] = \int_0^{2\pi} f_\varphi(\varphi) a^2 \cos^2(\omega t + \varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2}$$

Supposons, maintenant, que φ est déterministe et que a est aléatoire de densité $p(a)$, de moyenne μ_a et variance σ_a^2 , alors :

$$\mu_x(t) = E[a \cos(\omega t + \varphi)] = \mu_a \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \sigma_x^2(t) = \sigma_a^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Statistiques de 2^{ème} ordre:

On dit que le processus est connu à 2 instants t_1 et t_2 , si $\forall t_1, t_2$, la probabilité conjointe est connue. Dans la mesure où l'espérance fait intervenir le produit de deux variables aléatoires (2 instants), on parlera de statistiques d'ordre 2. on peut estimer les statistiques suivantes:

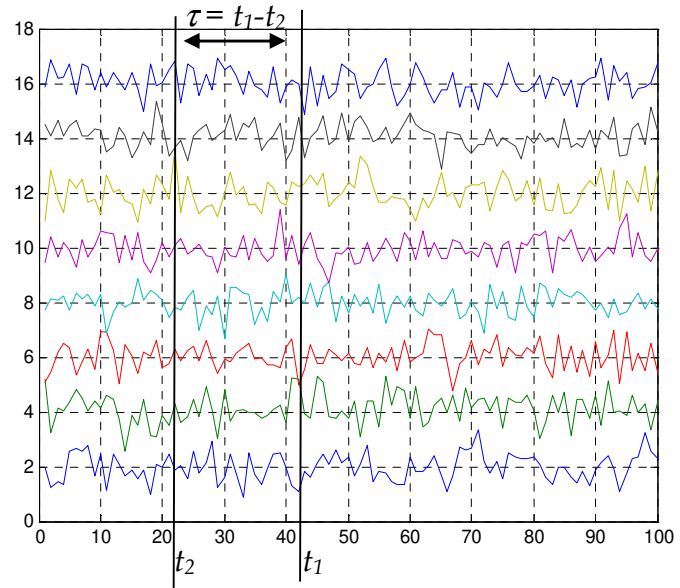
- Fonction d'autocorrélation statistique :

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1) \cdot x^*(t_2)\} = E\{x_1 \cdot x_2^*\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2^* \cdot p(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$$

- Fonction d'autocovariance statistique :

$$C_x(t_1, t_2) = E\{ [x(t_1) - \mu_x(t_1)] \cdot [x(t_2) - \mu_x(t_2)]^* \} = R_x(t_1, t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_x(t_2)^*$$

Elles illustrent la relation entre les statistiques prises à **deux** instants t_1 et t_2 différents. La fonction d'autocorrélation mesure la corrélation entre les signaux émis par un *même* processus à deux *instants différents*. Lorsqu'il y a corrélation on peut parler d'un "effet mémoire" du processus. On définit la mémoire du processus comme le temps t_c au delà duquel la corrélation est négligeable, t_c est aussi appelé temps de corrélation. Par contre, si elle est nulle, le signal est complètement aléatoire et le signal $x(t)$ à l'instant t est complètement décorrélé de ce même signal à l'instant passé $t - \tau$.



Notons que pour des processus *centrés*

$$(\mu_x(t)=0): C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$$

On peut étendre ces notions pour mesurer ce lien entre deux processus aléatoires par :

- Fonction d'intercorrélation statistique: $R_{xy}(t_1, t_2) = E\{ x(t_1) \cdot y^*(t_2) \} = E\{ x_1 \cdot y_2^* \}$

- Fonction d'intercovariance statistique : $C_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_y^*(t_2)$

- Le coefficient de corrélation est définie par : $\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{C_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)} \quad -1 \leq \rho_{xy}(t_1, t_2) \leq 1$

Reprenons l'exemple 2 et calculons l'auto-corrélation statistique :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[a \cos(\omega t_1 + \phi) a \cos(\omega t_2 + \phi)] = E[\frac{a^2}{2} (\cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\phi) + \cos(\omega(t_1 - t_2)))] = \frac{a^2}{2} \cos(\omega(t_1 - t_2))$$

On remarque que c'est une fonction périodique, ne dépendant que de l'écart $t_1 - t_2$. Pour $t_1 = t_2$, on retrouve la variance du processus aléatoire soit $a^2/2$.

3. Processus stationnaires

Beaucoup de processus aléatoires observés en pratique ont des propriétés statistiques qui ne dépendent pas du temps ou l'observation est faite. On dit que ce sont des processus stationnaires.

On désigne par *stationnaire* les processus dont les *caractéristiques statistiques* sont *indépendantes de l'origine du temps*. Un processus aléatoire est dit stationnaire au *sens strict* lorsque toutes ces caractéristiques statistiques c'est à dire tous ses moments à *tout ordre* sont indépendants de l'origine du temps.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow p(x, t_i) &= p(x); \\ \mu_x(t_i) &= \mu_x \\ R_{xy}(t_1, t_2) &= R_{xy}(\tau) \text{ avec } \tau = t_2 - t_1 \end{aligned}$$

La stationnarité ne signifie pas pour autant que le processus est indépendant du temps mais plutôt que ses propriétés statistiques ne dépendent pas du moment auquel on commence à les estimer. Ainsi, la température est un processus non stationnaire alors que le lancer de dé est un processus stationnaire.

On peut considérer que de nombreux phénomènes sont approximativement stationnaires sur des durées d'observation finies. Comme nous n'avons pas toujours accès à $p(x, t_i)$, on se contentera de la *stationnarité au sens large* (SSL) lorsque seul μ_x et R_x sont indépendants de t .

Ainsi :

- Un processus stationnaire est dit stationnaire d'ordre 1 si sa moyenne et sa variance sont constantes et donc indépendantes de tout décalage temporelle :

$$\text{et} \quad \mu_x(t) = \mu_x = \text{cste} \quad \sigma_x^2(t_i) = \sigma_x^2$$

- Un processus stationnaire est dit stationnaire d'ordre 2 si ses statistiques d'ordre 2 ne dépendent que de l'écart temporel entre les deux instants t_1 et t_2 :

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) \text{ avec } \tau = t_2 - t_1$$

Reprenons l'exemple précédent $X(t, u) = a \cos(\omega t + u)$ étudions sa stationnarité au sens large lorsque u est uniforme sur $[0, 2\pi]$: la moyenne, la variance sont indépendantes de t et l'auto-corrélation statistique ne dépend que de $t_1 - t_2$. Le processus est donc stationnaire au sens large.

Exemple d'application:

Montrer que le processus $x(t) = a \cos(2\pi t) + b \sin(2\pi t)$ où a, b sont des v.a décorréliées de moyenne nulle et de variance unité est stationnaire au sens large.

Propriétés de la fonction d'autocorrélation pour x aléatoire réel SSL

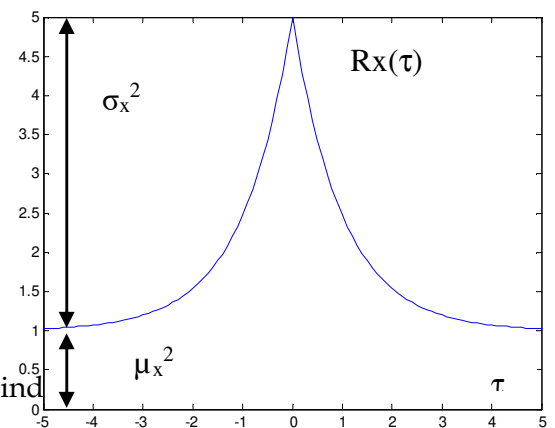
- La fonction de corrélation est paire : $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ avec $\tau = t_2 - t_1$

- La fonction est maximum à l'origine $R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$

- Valeurs à l'origine et à l'infini : $R_x(0) = E(x(t)^2) = \mu_x^2 + \sigma_x^2$

$$\text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E\{x(t)x(t-\tau)\} = \mu_x^2$$

En effet, si $x(t)$ ne contient ni composante périodique ni composante ind les variables $x(t)$ et $x(t - \tau)$ deviennent statistiquement décorréliées.



Cas discret :

On remplacera t par $n \rightarrow \mu_x(n) = \mu_x = E\{x(n)\}$

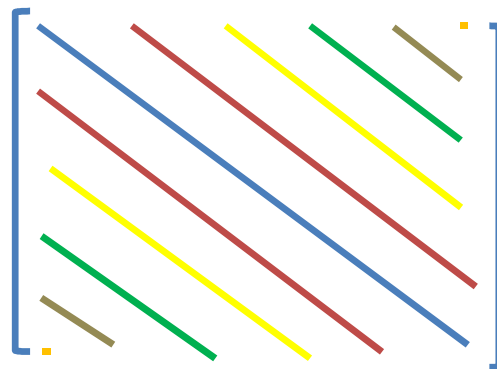
$$R_x(n_1, n_2) = E\{x(n_1)x^*(n_2)\}$$

Un processus aléatoire X discret SSL possèdera une moyenne constante et une autocorrélation statistique ne dépendant que de $k=n_1-n_2$ soient :

$$\mu_x(n) = \mu_x = cste \quad et \quad R_x(n_1, n_2) = R_x(k) \quad avec \quad k = n_1 - n_2$$

$$R_x(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & R_x(2) & \dots & R_x(N-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(N-2) \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(N-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & R_x(N-3) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix}$$

$$SSL \quad \Rightarrow \quad R_x(n_1, n_2) = R_x(n_1 - n_2) = \begin{bmatrix} R_x(1,1) & R_x(1,2) & R_x(1,3) & \dots & R_x(1,N) \\ R_x(2,1) & R_x(2,2) & R_x(2,3) & \dots & R_x(2,N) \\ R_x(3,1) & R_x(3,2) & R_x(3,3) & \dots & R_x(3,N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(N,1) & R_x(N,2) & R_x(N,3) & \dots & R_x(N,N) \end{bmatrix}$$



$$R_x(n_1 - n_2) = R_x(k)$$

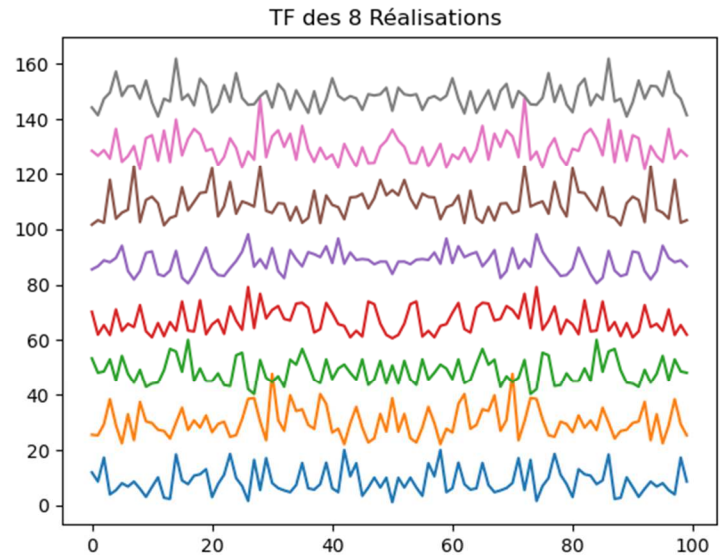
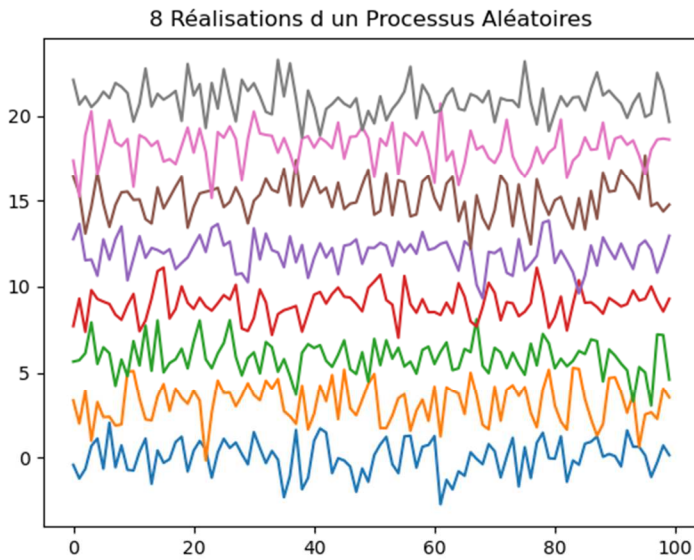
Ainsi, la matrice de corrélation d'un processus stationnaire discret est une matrice Toeplitz carrée. Une matrice carrée est dite Toeplitz si tous les éléments d'une même diagonale ou sous-diagonale sont égaux. On voit directement que c'est le cas ici. Cette propriété est directement liée à la propriété de stationnarité (au sens large) du processus.

Puissance et DSP : Les personnes qui conversent (dans un café ou en cours) génèrent un signal aléatoire qui selon son volume global possèdera une puissance. Si $X(t)$ est SSL, on peut calculer l'espérance de la puissance instantanée par:

$$P_X = E(x(t)^2) = R_x(0) = \mu_x^2 + \sigma_x^2$$

$$\text{L'énergie est alors donnée par : } E_X = \int P_X dt = \int E(x(t)^2) dt$$

Quant au spectre pour un signal aléatoire, il faut noter que chaque réalisation fournira un spectre différent (Voir exemple ci-dessous)



Or, nous avons déjà un outil statistique qui contient une information unique lorsque le processus est considéré SSL: c'est la fonction de corrélation statistique dont la TF fournira une information sur la distribution fréquentielle de la puissance moyenne du signal.

On définit, alors, la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire $X(t)$ stationnaire au sens large comme la fonction de la fréquence f donnée par la TF de la fonction de corrélation statistique du signal:

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$\text{La puissance moyenne totale du processus est : } P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = R_x(0)$$

Comme le spectre représente une moyenne sur l'ensemble des réalisations possibles du processus, une réalisation particulière peut toujours avoir un spectre de puissance différent de $S_x(f)$.

Bruit blanc : Un bruit blanc est un signal aléatoire stationnaire au second ordre dont la densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences.

Il est défini par : $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau)$ ce qui implique que sa moyenne sera nulle ($\mu_x=0$) et qu'il est décorrélé.

La TF de la corrélation statistique est, alors, donnée par $S_x(f) = \sigma_x^2$

Dans le cas discret, on aura $\Rightarrow R_x(k) = \sigma_x^2 \delta(k)$ et $R_x(k) = 0$ pour $k \neq 0$ $\mu_x(k) = 0$

On dit alors que le bruit est décorrélé.

Par analogie avec la lumière blanche, on dénomme un tel signal bruit blanc. Il existe donc différents type de bruit blanc en fonction de la variable aléatoire décrivant le bruit. Les plus répandus sont le bruit blanc gaussien où la variable aléatoire suit une loi gaussienne et le bruit blanc uniforme où la variable aléatoire suit une loi uniforme.

4. Processus ergodiques

Il n'est pas toujours possible de réaliser un nombre suffisant de mesures pour établir les propriétés statistiques d'un processus aléatoire. Il est plus facile de lancer un dé 1000 fois que de réquisitionner 1000 personnes pour lancer 1000 dés. Tout comme pour caractériser le bruit thermique, on réaliserait plusieurs mesures en usant de la même résistance au lieu d'en employer 1000. Cela signifie que l'on assimilera les résultats obtenus sur une réalisation à ceux obtenus pour un instant donné t_i pour différentes réalisations.

Un processus aléatoire stationnaire est dit *ergodique* lorsque les valeurs moyennes statistiques et temporelles sont **identiques**.

$$\mu_x = \overline{\mu_x}; \quad R_x(\tau) = \overline{R_x(\tau)} \dots$$

$$\text{où } \bar{x} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot dt \quad \text{et} \quad \overline{R_{xy}(\tau)} = \overline{x(t) \cdot y^*(t - \tau)}$$

D'un point de vue pratique lorsqu'un phénomène aléatoire est ergodique et stationnaire, on peut mesurer avec un seul appareil fiable à partir de n'importe quel instant.

$$\overline{\mu_x} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot dt \Rightarrow \mu_x = \overline{\mu_x} \quad \overline{R_x(\tau)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t - \tau) \cdot dt \Rightarrow R_x(\tau) = \overline{R_x(\tau)}$$

Reprenons, une énième fois l'exemple 2 et calculons les moyennes temporelles :

$$E[X(t, u_i)] = \overline{X}(u_i) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} a \cos(\omega t + u_i) dt = 0 \quad E[X^2(t, u_i)] = \overline{X^2}(u_i) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} a^2 \cos^2(\omega t + u_i) dt = \frac{a^2}{2}$$

Il est donc ergodique d'ordre 1

Si le processus est ergodique $S_x(f)$ représente le spectre de puissance de n'importe quelle réalisation $x_i(t)$:

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)^2 dt \quad \text{Où } x_i(t) \text{ est une réalisation de } x(t).$$

Dans le cas où le signal $x(t)$ est ergodique, stationnaire, on détermine $S_x(f)$ par le calcul de la DSP temporel sur T :

$$S_x(f) = TF\{R_x(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \quad \text{Où } X_T(f) \text{ est la TF de } x(t) \text{ limité à l'intervalle } [0, T]$$

5. Exemples de Processus

Il existe de nombreuses classes de processus particuliers : les processus de Markov (et notamment les chaînes de Markov quand t est discret), les martingales, les processus Gaussiens, les processus de Poisson.

- **Poisson**

La distribution de Poisson est destinée à modéliser la fréquence des événements au cours d'un intervalle de temps fixe. Étant donné un intervalle de temps de longueur, t , et le taux d'arrivée des événements, λ , le nombre attendu d'événements au cours de cet intervalle de temps est :

$$\mu = \lambda \cdot t$$

Pour que le processus de Poisson soit réalisable, les hypothèses suivantes doivent être remplies :

1. La probabilité de succès sur une très courte période de temps est le paramètre λ multiplié par cette période de temps.
2. La probabilité que plus d'un événement de succès se produise dans l'intervalle de temps défini n'est pas significative. En d'autres termes, la probabilité que plus d'une expérience réussisse dans un intervalle de temps fixe est très faible, et donc non importante ou non significative.
3. La probabilité qu'un événement réussisse se produise pendant un intervalle de temps défini ne dépend pas de ce qui s'est passé précédemment. Autrement dit, chaque expérience réussie est indépendante de l'expérience précédente.

Le processus de Poisson est connu en statistique comme un processus stochastique qui essaie d'enregistrer des événements très improbables en temps continu.

Exemples: panne, accident nucléaire, défaut de fabrication dans une chaîne. Il est également utilisé en Télécommunications pour estimer le nombre d'appels dans un laps de temps donné.

- **Markovien**

L'axiome de Markov traduit que la probabilité de n'importe quel comportement futur, le présent étant connu, n'est pas modifié par toute connaissance supplémentaire du passé.

Un processus est markovien, si pour tout instant u , pour toute valeur donnée $X_u = x$, la probabilité pour que le processus prenne la valeur y à un instant quelconque t ultérieur ($t > u$), ne dépend pas des valeurs prises par le processus avant l'instant u . Le processus est dit sans mémoire.

Les chaînes de Markov sont des processus markoviens qui évoluent dans le temps discret selon des transitions probabilistes. Elles vont donc décrire un ensemble de phénomènes aléatoires selon le principe des processus stochastiques.

Exemples : la hauteur du niveau d'un barrage à un instant t , le cours du pétrole à la fin de la journée

- **Gaussien**

Les processus gaussiens jouent un rôle crucial dans la théorie des processus stochastiques du fait que :

- Certains processus stochastiques peuvent être approchés par des processus gaussiens,
- Les calculs sont facilités dans le cadre des processus gaussiens.

- Théorème central limite et approximations : Chaque fois qu'un phénomène peut être considéré comme la résultante d'un grand nombre de causes aléatoires indépendantes (ex: notes obtenues à l'examen, poids d'un enfant), on peut résumer que ce phénomène suit une loi de distribution normale: c'est le théorème central limite. Ainsi, la distribution statistique de la somme de n V.A. indépendantes et de même loi tend vers la loi Normale quand n tend vers l'infini.

Un processus (X_t) réel est gaussien si : $\forall n \forall, t_1, \dots, t_n$, le vecteur $(X_{t_1}=x_1 ; \dots ; X_{t_n}=x_n)$ est gaussien.

$$Y = \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k = \alpha^T \underline{X}$$

Rappelons que toutes les probabilités marginales d'un processus gaussien sont gaussiennes et que toute combinaison linéaire de marginales d'un processus gaussien est gaussienne.

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_X)}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{X}-\underline{\mu_X})^T C_X^{-1}(\underline{X}-\underline{\mu_X})}$$

Où

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\mu_X} = \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \vdots \\ \mu_{X_n} \end{bmatrix}, \quad \underline{C_X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \vdots \\ \mu_{X_n} \end{bmatrix}$$

Exemple : Un mouvement brownien (standard) réel est un processus gaussien centré à trajectoires continues. C'est un processus à accroissements indépendants stationnaires et gaussiens.

6. Estimation de la densité spectrale

Les quantités $E\{x\}$, $E\{x^2\}$, $S_{xx}(f)$,... sont impossibles à calculer sur un ordinateur car elles nécessiteraient un nombre de points infini. Sur calculateur, on ne dispose que d'une séquence discrète et finie de N points. En réalité, on calcule des estimées de ces grandeurs en supposant généralement le signal stationnaire et ergodique. On remplace alors le calcul des moyennes statistiques par des moyennes temporelles.

Nous calculerons la DSP sur un nombre de point finis. Ainsi, la transformée de Fourier calculée sur la séquence finie sera donc convoluée avec le spectre de la fenêtre rectangulaire c'est-à-dire un sinus cardinal. Rappelons que les propriétés spectrales du sinus cardinal ne sont pas bien adaptées à l'analyse spectrale du signal (lobes secondaires importants). Pour y remédier, on emploie des fenêtres de pondérations (Hamming, Hanning, Kaiser, etc.)

La méthode du périodogramme à prendre la TF d'une réalisation : $\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{N} |Y(f)|^2$ avec $Y(f) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi j f k}$

D'où

$$\begin{aligned} \hat{S}_{xx}(f) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y_l e^{-2\pi j f l} \sum_{m=0}^{N-1} y_m e^{2\pi j f m} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} y_l y_m e^{-2\pi j f (l-m)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=k}^{N-1} y_l y_{l-k} e^{-2\pi j f k} = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}_{yy}(k) e^{-2\pi j f k} = TF(\hat{R}_{yy}(k)) \end{aligned}$$

Le calcul de l'espérance de $\hat{S}_{xx}(f)$ donne :

$$E\{\hat{S}_{xx}(f)\} = E\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}_{yy}(k) e^{-2\pi jfk}\right\} = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=k}^{N-1} y_l y_{l-k} e^{-2\pi jfk}\right\}$$

$$E\{\hat{S}_{xx}(f)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=k}^{N-1} E\{y_l y_{l-k}\} e^{-2\pi jfk} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N-k}{N} R_{yy}(k) e^{-2\pi jfk} = S_{yy}(f) * N \text{sinc}(fN)^2$$

Le périodogramme est un estimateur biaisé. Le périodogramme est donc en moyenne la convolution du véritable spectre avec la transformée de Fourier de la fenêtre triangulaire. Néanmoins, lorsque $N \rightarrow \infty$, le biais devient nul. La variance est pratiquement indépendante de N et proportionnelle au spectre $\propto S_x(f)^2$. Remarquons que la qualité de l'estimation par périodogramme sera d'autant meilleure que le signal est observé sur une longue plage de stationnarité.

Afin de diminuer la variance de cet estimateur, on peut utiliser un périodogramme moyenné. Cela consiste à séparer le signal en K tranches (de longueur N/K), à calculer le périodogramme sur chaque tranche et à faire la moyenne. Du fait des K moyennages, la variance est presque divisée par K : néanmoins, les tranches étant plus courtes, la résolution diminue ($\Delta f = f_e/N \rightarrow f_e/K$). En pratique, un taux de recouvrement de 40% donne de bons résultats. Au delà, l'indépendance entre les tranches n'est plus respectée.

b. La méthode du corrélogramme consiste à calculer d'abord l'estimée de $R_{xx}(k)$ de la fonction d'autocorrélation puis à prendre pour estimée de la densité spectrale la TF de cette estimée.

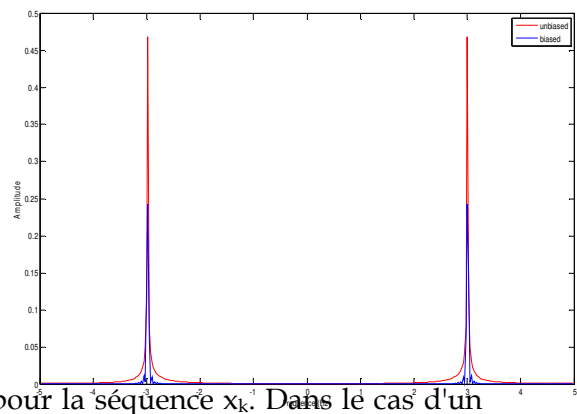
$$\hat{S}_{xx}(f) = TF[\hat{R}_{xx}(k)]$$

A partir d'un échantillon $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ indépendants et identiquement distribués, plusieurs estimateurs sont alors possible:

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} x(n) x^*(n-k) \quad \hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} x(n) x^*(n-k)$$

Le premier estimateur est biaisé car on ne tient pas compte du nombre d'échantillons disponibles qui varie avec le pas k . Le deuxième en tient compte, il est non biaisé.

Les corrélogrammes présentent chacun un extrema pour la fréquence normalisée 3 qui est bien la fréquence de la sinusoïde étudiée. Il ressort également de ces courbes que le corrélogramme non-biaisé permet de mieux faire ressortir la fréquence de la sinusoïde mais au dépend d'une plus grande variance sur les bords.



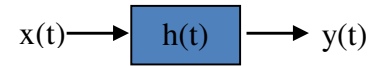
c) Dans cette méthode, on recherche un modèle AR, MA ou ARMA pour la séquence x_k . Dans le cas d'un modèle auto-régressif $x_k = a_1 x_{k-1} + \dots + a_r x_{k-r} + u_k$

$$\hat{S}_{xx}(f) = \left| \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^r a_k e^{-i2\pi f k}} \right|^2 u_0$$

7. Filtrage des Processus aléatoires

Un signal aléatoire est amené à être transmis, analysé, transformé, etc. Conserve-t-il son caractère aléatoire? sa stationnarité? Que deviennent sa moyenne et son auto-corrélation statistiques lors d'un filtrage linéaire. On examinera la transformation des caractéristiques du signal dans le domaine fréquentiel qui permettra d'aborder la notion de filtre formeur. Ces connaissances nous permettront d'envisager une application directe qui est le filtrage optimal et adapté.

Soit un système linéaire et invariant dans le temps (SLIT) défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa fonction de transfert $H(f)$:



Rappelons que la réponse du système linéaire et invariant à un signal quelconque déterministe est donnée par :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Cette expression implique que si $x(t)$ est un signal aléatoire, le signal en sortie $y(t)$ est forcément un signal aléatoire puisque la sortie est une somme pondérée de l'entrée. Il faudra donc caractériser $y(t)$ de manière statistique, de même que pour $x(t)$, en étudiant les grandeurs statistiques déjà vues au chapitre précédent.

Moyenne et autocorrélation statistiques de $y(t)$

Supposons que $x(t)$ est un processus aléatoire, la moyenne $\mu_y(t)$ du signal de sortie (aléatoire aussi) peut se calculer par :

$$\begin{aligned}\mu_y(t) &= E\{y(t)\} = E\{x(t) * h(t)\} = E\left\{\int h(\tau)x(t - \tau)d\tau\right\} \\ &= \int h(\tau)E\{x(t - \tau)\}d\tau = \int h(\tau)\mu_x(t - \tau)d\tau = h(t) * \mu_x(t)\end{aligned}$$

De la même façon, on peut calculer l'auto-corrélation statistique de $y(t)$ soit $R_y(t_1, t_2)$:

$$\begin{aligned}R_y(t_1, t_2) &= E\{y(t_1)y^*(t_2)\} = E\{x(t_1) * h(t_1) \cdot x^*(t_2) * h^*(t_2)\} = E\left\{\int h(\tau_1)x(t_1 - \tau_1)d\tau_1 \int h^*(\tau_2)x^*(t_2 - \tau_2)d\tau_2\right\} \\ &= \int \int h(\tau_1)h^*(\tau_2)E\{x(t_1 - \tau_1)x^*(t_2 - \tau_2)\}d\tau_1d\tau_2\end{aligned}$$

Si $x(t)$ est stationnaire au sens large (SSL) alors:

- La moyenne statistique de $y(t)$ devient :

$$\mu_y(t) = \int h(\tau)\mu_x(t - \tau)d\tau = \int h(\tau)\mu_x d\tau = \mu_x \int h(\tau)d\tau = \mu_x H(0) \quad (f = 0)$$

- La corrélation statistique de y devient :

$$\begin{aligned}R_y(t_1, t_2) &= \int \int h(\tau_1)h^*(\tau_2)E\{x(t_1 - \tau_1)x^*(t_2 - \tau_2)\}d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int \int h(\tau_1)h^*(\tau_2)R_x(\tau - \tau_1 + \tau_2)d\tau_1d\tau_2 = fct(\tau) = R_y(\tau)\end{aligned}$$

Ainsi, si le signal d'entrée est stationnaire au sens large (SSL) alors le signal de sortie sera aussi SSL

$$\text{Sachant que } f(\tau) * h(-\tau) = \int f(\tau_2)h(\tau_2 + \tau)d\tau_2 = \int f(\tau + \tau_2)h(\tau_2)d\tau_2$$

$$\text{Alors } f(\tau) * h(\tau) = \int f(\tau_2)h(\tau - \tau_2)d\tau_2 = \int f(\tau - \tau_2)h(\tau_2)d\tau_2$$

$$\text{C'est ainsi que } R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

Densité spectrale

En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres de l'équation précédente, la densité spectrale de puissance est obtenue :

$$S_y(f) = TF(R_y(\tau)) = TF(R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)) = S_x(f) \cdot H(f) \cdot H^*(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

Ainsi, la densité spectrale de puissance du signal de sortie est égale à la densité spectrale de puissance du signal d'entrée multipliée par le carré du module de la réponse en fréquences du système (la phase de $H(f)$ n'intervient pas). C'est une propriété très importante à la base de nombreuses applications dont notamment la notion de filtre formeur et le filtrage optimal.

Par ailleurs, si l'on souhaite calculer la corrélation du signal de sortie en éludant la lourdeur de calcul inhérente au produit de convolution, on calculera la densité spectrale de puissance du signal de sortie et on prendra la transformée de Fourier inverse.

$$R_y(\tau) = TF^{-1}(|H(f)|^2 S_x(f)) = \int |H(f)|^2 S_x(f) e^{2\pi j f \tau} df$$

La puissance moyenne du signal de sortie est alors obtenue par : $E\{y(t)^2\} = R_y(0) = \int |H(f)|^2 S_x(f) df$

Formule des interférences

Soient $y_1(t)$ la sortie d'un système $h_1(t)$ dont l'entrée est un signal aléatoire $x_1(t)$ et $y_2(t)$ la sortie d'un système $h_2(t)$ dont l'entrée est un signal aléatoire $x_2(t)$. La formule de l'interférence permet de relier l'intercorrélation entre les sorties de deux filtres à celles des entrées de ces filtres:

$$S_{y_1 y_2}(f) = H_1(f) S_{x_1 x_2}(f) H_2^*(f)$$

$$\text{On a aussi : } R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h^*(-\tau) \Rightarrow S_{xy}(f) = S_x(f) H^*(f)$$

$$\text{et } R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) \Rightarrow S_{yx}(f) = H(f) S_x(f)$$

Exemple 1 : Soit le processus stochastique $x(t)$ SSL de corrélation statistique: $R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\frac{|\tau|}{\theta}}$ et le système linéaire et invariant de réponse impulsionnelle $h(t) = 5e^{-2t}U(t)$. On obtient alors:

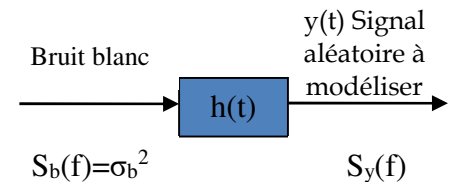
$$-\mu_y(t) = \mu_x H(0) = 0 \times \frac{5}{2 + 2\pi j f} \Big|_{f=0} = 0 \times 5/2 = 0$$

$$- S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = \left| \frac{5}{2 + 2\pi j f} \right|^2 \cdot TF \left(\sigma^2 e^{\frac{-|f|}{\theta}} \right) = \frac{25}{4 + (4\pi^2 f^2)} \cdot \frac{2\sigma^2 \theta}{1 + 4\pi^2 f^2 \theta^2}$$

Exemple 2 : Considérons par exemple le cas où le signal en entrée est un bruit blanc $b(t)$. Sa DSP est donc une fonction constante. Alors, en sortie, on aura un signal tel que : $S_y(f) = \text{constante} |H(f)|^2$

Notion de filtre formeur

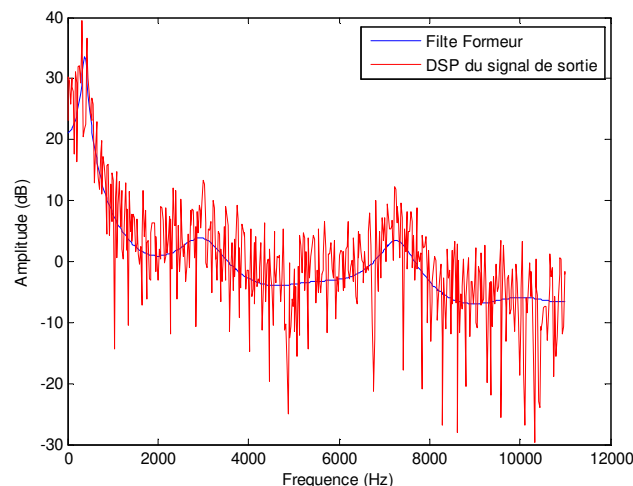
Supposons donné un signal aléatoire $y(t)$: On appelle filtre formeur de $y(t)$; le filtre de fonction de transfert $H(f)$; tel que $y(t)$ est généré par passage d'un bruit blanc $b(t)$ dans $H(f)$.



La détermination du filtre formeur s'effectue en inversant la formule précédente:

$$|H(f)|^2 = S_y(f) / \sigma_b^2$$

On pourra donc décrire le signal aléatoire par les paramètres du filtre et la variance du bruit blanc. En effet, si on fait passer le bruit blanc dans un filtre linéaire et stationnaire à paramètres ajustables et si on obtient le signal désiré (à modéliser) à la sortie du filtre, alors on peut dire que toute l'information spectrale est contenue dans le filtre représenté par ses coefficients (Voir exo 1 du TP n°3)



Remarque: Ainsi le bruit blanc joue pour l'aléatoire l'équivalent de la distribution de Dirac pour le déterministe.

Rappelons que le bruit blanc n'a pas d'existence physique car il serait de puissance infinie. Une approximation du bruit blanc à bande limitée appelé aussi bruit blanc coloré est défini par :

$$S_b(f) = \begin{cases} \sigma_b^2 & |f| < B \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

• Application 1: Filtrage adapté et filtrage optimal

La transmission d'un signal s'accompagne de distorsions (dues aux milieux de transmission) qu'il serait souhaitable d'éliminer ou au moins d'atténuer avant tout traitement ultérieur. Si l'on connaît le signal

(déterministe) d'origine, on parlera de détection. Dans le cas contraire ou si le signal est aléatoire on emploiera le terme estimation. Il existe de nombreuses approches de détection, on peut, entre autres procéder par filtrage qui permettra de rehausser le signal noyé dans le bruit.

Considérons un signal déterministe $x(t)$ supposé connu, dont on souhaite tester la présence possible dans une observation $s(t)$. Le bruit d'observation est supposé quant à lui stationnaire SSL de densité spectrale $S_b(f)$. On cherche un filtre $H(f)$ qui maximise le SNR à un instant précis T_0 .

On suppose donc que le signal utile $x(t)$ est noyé dans un bruit $b(t)$ stationnaire SSL additif, d'où :

$$s(t) = x(t) + b(t)$$

On filtre le signal par un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle est $h(t)$. A la sortie du filtre, on obtient un signal :

$$y(t) = s(t) * h(t) = x(t) * h(t) + b(t) * h(t) = x_2(t) + b_2(t)$$

A la sortie du filtre et à l'instant T_0 , le SNR s'écrit : $SNR(T_0) = \frac{Puis(x_2(T_0))}{Puis(b_2(T_0))}$

Le but étant de trouver $h(t)$, on va alors exprimer le SNR en fonction de $h(t)$ (ou $H(f)$), ainsi :

- Le signal au numérateur $x_2(t)$ est déterministe donc sa puissance s'exprime comme suit:

$$Puis(x_2(T_0)) = |x_2(T_0)|^2 = |TF^{-1}(X_2(f))|^2 = \left| \int X(f) H(f) e^{2\pi j f T_0} df \right|^2$$

- Le signal $b_2(t)$ est issu du filtrage d'un signal aléatoire $b(t)$ SSL donc il est aussi SSL, c'est ainsi que sa puissance pourra se formuler comme suit:

$$Puis(b_2(T_0)) = E\{|b_2(T_0)|^2\} = R_{b_2}(\tau=0) = TF^{-1}(S_{b_2}(f))\Big|_{\tau=0} = \int S_b(f) |H(f)|^2 df$$

Ainsi, on arrive à exprimer le SNR comme suit :

$$SNR(T_0) = \frac{Puis(x_2(T_0))}{Puis(b_2(T_0))} = \frac{\left| \int X(f) H(f) e^{2\pi j f T_0} df \right|^2}{\int S_b(f) |H(f)|^2 df} \quad SNR(T_0) = \frac{\left| \int a(f) b^*(f) df \right|^2}{\int a(f) a^*(f) df}$$

Que l'on peut écrire aussi, comme étant :

$$\text{Avec } a(f) = \sqrt{S_b(f)} H(f) \quad \text{et } b(f) = X^*(f) e^{-2\pi j f T_0} / \sqrt{S_b(f)}$$

Pour trouver $H(f)$ qui maximise ce rapport, on fait appel à l'inégalité de cauchy-schwartz:

$$\left| \int a(f) b^*(f) df \right|^2 \leq \int a(f) a^*(f) df \quad \int b(f) b^*(f) df$$

$$\text{Ce qui nous donne : } SNR(T_0) = \frac{\left| \int a(f)b^*(f)df \right|^2}{\int a(f)a^*(f)df} \leq \int b(f)b^*(f)df$$

avec égalité (soit le maximum) lorsque $a(f)=kb(f) \Rightarrow$ Cette dernière nous fournit l'expression suivante du filtre optimal $H(f)$:

$$H(f)_{optimal} = k.X^*(f)e^{-2\pi jfT_0} / S_b(f)$$

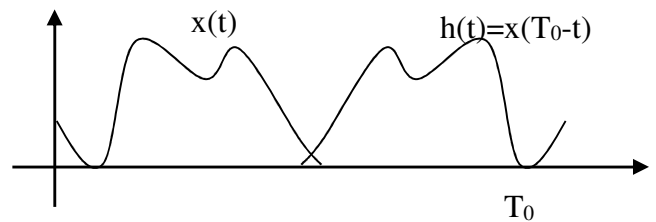
$$\text{L'expression du SNR devient : } SNR(T_0)_{max} = \int \frac{|X(f)|^2}{S_b(f)} df \quad (\text{Ce maximum est indépendant de } T_0)$$

Cas particulier : Par ailleurs, si le bruit $b(n)$ est blanc, on parle de filtre adapté:

$$H(f)_{adapté} = k / \sigma_b^2 X^*(f)e^{-2\pi jfT_0} \text{ donnant } h(t)_{adapté} = k / \sigma_b^2 x^*(T_0 - t)$$

$$SNR(T_0)_{max} = \frac{E_x}{\sigma_b^2}$$

La réponse impulsionnelle du filtre représente le signal utile $x(t)$ renversé et décalé de T_0 . Le filtrage adapté revient à effectuer l'inter-corrélation entre l'observation et le signal à détecter.



Cette réponse n'est pas causale ce qui ne permet pas de l'appliquer en temps réel. Cependant, ce filtre peut-être appliqué à un signal sauvegardé.

Exemple1 : Détection d'une impulsion

Considérons un système émettant une impulsion $x(t)$ rectangulaire de durée T_0 et d'amplitude A . Le bruit additif est blanc. Le filtre aura la même expression, soit $h(t)=x(t)$.

Exemple 2 : En sonar ou en radar, on cherche à localiser une « cible ». Cette cible peut être par exemple un bateau ou un avion. Pour cela, on procède de la façon suivante : on émet un signal $x(t)$, qui parcourt la distance d jusqu'à la cible, sur laquelle il sera réfléchi en direction d'un récepteur. Le récepteur reçoit alors le signal $y(t)$ bruité, atténué (de a) et retardé de T_{AR} (voir TP n°4)

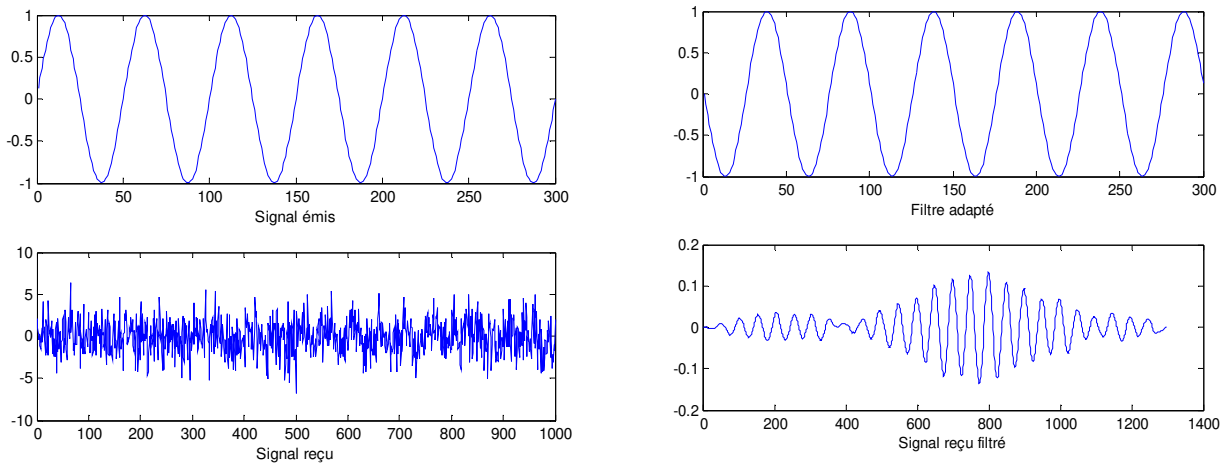
$$y(t) = a.x(t - T_{AR}) + b(t). \text{ où } T_{AR} \text{ correspondant au temps d'aller-retour } (T_{AR} = 2d/v)$$

On utilisera alors comme filtre adapté le filtre adapté à $x(t)$, soit $h(t) = x^*(T_0 - t)$

La sortie de ce filtre sera l'intercorrélation des signaux $y(t)$ et $x(t)$. On obtient alors :

$$R_{yx}(t-T_0) = a.R_{xx}(t-T_0-T_{AR})+R_{bx}(t-T_0).$$

Sachant que l'autocorrélation est maximale en 0, l'intercorrrelation sera maximale pour $t = T_0+T_{AR}$ ce qui nous permettra de déterminer T_{AR} .



Remarques

- Le choix du signal 'x' est important : Il est souhaitable que le max de sa fonction d'autocorrélation R_{xx} soit facile à identifier (pic bien visible comme pour la fonction triangle)

- Dans le cas où le signal est sinusoïdal, le filtre adapté est un passe bande idéal centré sur la fréquence du signal (détection synchrone).

Exercice d'Application (Examen 2014/2015)

Soit $x(t) = 1-t/T$ avec $t \in [0, T]$

On utilise ce signal pour déterminer la distance d'un objet. Le signal reçu par le récepteur après réflexion sur l'objet est : $y(t) = \alpha x(t-T_D) + b(t)$ où α est une constante réelle positive et $b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance σ^2 . On veut maximiser le rapport signal sur bruit

1. Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre $h(t)$ telle que $\int h(t)^2 dt = 1$ (prendre $T_0 = T$).
2. Donner le rapport signal sur bruit après filtrage.
3. Exprimer l'inter-corrélation temporelle $R_{yx}(t-T_0)$ en fonction de l'auto-corrélation de $x(t)$ et de l'inter-corrélation des signaux $b(t)$ et $x(t)$
4. Comment déterminer le temps T_D ?
5. Pourquoi ne peut-on pas utiliser le filtrage optimal pour un signal déterministe dont on ignore l'expression?

• Application 2: Filtrage de Wiener

Il fait partie de la famille des estimateurs linéaires à variance minimale qui consistent à chercher une estimée

$\hat{y}$ de y qui soit une fonction linéaire des observations, c'est-à-dire: $\hat{y} = \sum_{i=1}^n h_i x_i = h^T x$

Dans le cas de l'estimation en moyenne quadratique, le filtre h doit alors être déterminé de telle sorte que la variance de l'erreur d'estimation $E\{(y-\hat{y})^2\}$ soit minimale :

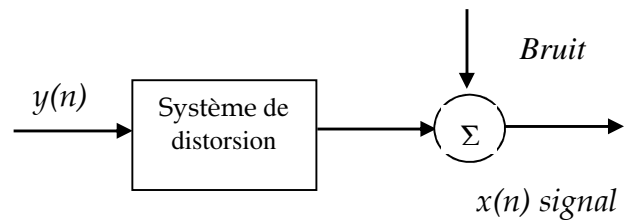
$$E\{(y-\hat{y})^2\} = E\{(y-h^T x)^T (y-h^T x)\} = E\{y y^T\} - E\{y^T h^T x\} - E\{h x^T y\} + E\{h x^T h^T x\}$$

On commence par dériver par rapport à h puis on annule la dérivée, ce qui nous donne

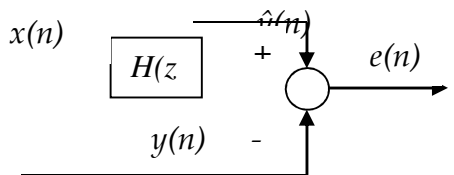
$$-E\{y^T x\} - E\{x^T y\} + 2h^T E\{x^T x\} = 0 \Rightarrow h = E\{y^T x\} / E\{x^T x\} = R_{yx} / R_{xx}$$

Dans de nombreuses applications, les signaux temporels sont entachés d'un bruit que l'on souhaite supprimer ou du moins réduire. Comme le signal utile aléatoire occupe les mêmes bandes de fréquences que le signal parasite, on ne peut recourir au filtrage classique. Le filtre de Wiener apporte une solution à ce problème lorsque le processus est stationnaire. Les filtres de Wiener sont dits optimum au sens du critère de l'erreur quadratique moyenne entre leur sortie et une sortie désirée. .

La figure suivante illustre un problème courant d'estimation linéaire. $y(n)$ correspond au signal aléatoire stationnaire qui nous intéresse mais n'est pas directement accessible. Seul $x(n)$ l'est, il est obtenu après passage de $y(n)$ dans un système linéaire suivi de l'addition d'un bruit aléatoire stationnaire $bb(n)$.



Le problème qui se pose est comment retrouver $y(n)$ à partir de $x(n)$. Une solution consiste à filtrer $x(n)$ de telle sorte que la sortie $\hat{y}(n)$ soit la plus proche possible de $y(n)$. On peut mesurer la qualité de l'estimation par $e(n)$ défini par : $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$



On cherche donc un filtre qui minimisera l'erreur. Il est pratique de chercher à minimiser $e^2(n)$ car c'est une fonction quadratique facilement dérivable. Par ailleurs, étant donné que les signaux sont aléatoires, la fonction coût à minimiser est l'erreur quadratique moyenne (MSE) définie par : $\xi(n) = E(e^2(n))$

Si on suppose que le filtre recherché H est un filtre RIF de longueur N , on peut en calculer les coefficients par résolution d'un système linéaire d'équations. $h = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{N-1}]^T$

Le signal estimé $\hat{y}(n)$ peut alors s'écrire : $\hat{y}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)$

Rappelons que l'on cherche à minimiser $\xi(n) = E\{e^2(n)\} = E\left\{\left(y(n) - \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)\right)^2\right\}$

Pour en obtenir le minimum, il suffit de chercher de dériver et d'annuler la fonction coût par rapport aux variables b_j de la réponse impulsionnelle du filtre. La dérivée de la fonction coût par rapport au $j^{\text{ème}}$ point de la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$\frac{\partial \xi}{\partial b_j} = E \left\{ \frac{\partial}{\partial b_j} \{e^2(n)\} \right\} = E \left\{ 2e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial b_j} \right\} = E \left\{ 2e(n) \frac{\partial}{\partial b_j} \{-b_j x(n-j)\} \right\}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial b_j} = -E \{ 2e(n) x(n-j) \} = -E \left\{ 2 \left(y(n) - \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) \right) x(n-j) \right\}$$

En faisant l'hypothèse que les signaux $x(n)$ et $y(n)$ sont stationnaires, et en annulant la dérivée, on trouve :

$$R_{yx}(j) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i R_{xx}(j-i)$$

Ce qui pour les différentes valeurs de j , nous donne le système d'équations suivantes à résoudre :

$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \dots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(N-2) \\ & & \dots & \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \dots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{yx}(0) \\ R_{yx}(1) \\ \vdots \\ R_{yx}(N-1) \end{bmatrix}$$

Il faut noter que l'obtention des coefficients du filtre repose sur la connaissance de la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée et de l'intercorrrelation entre les signaux d'entrée et de sortie désirée.

Exemple 1 : On suppose que l'observation $x(n)=y(n)+bb(n)$ et que le bruit additif $bb(n)$ est centré et non corrélé au signal. Simplifions les équations de Wiener-Hopf en conséquences:

$$R_{yx}(k)=E\{y(n) [y(n-k)+bb(n-k)] \}= R_{yy}(k)$$

$$R_{xx}(k)=E\{(y(n)+bb(n))(y(n-k)+bb(n-k))\}= R_{yy}(k)+R_{bb}(k)$$

Soit le système à résoudre suivant :

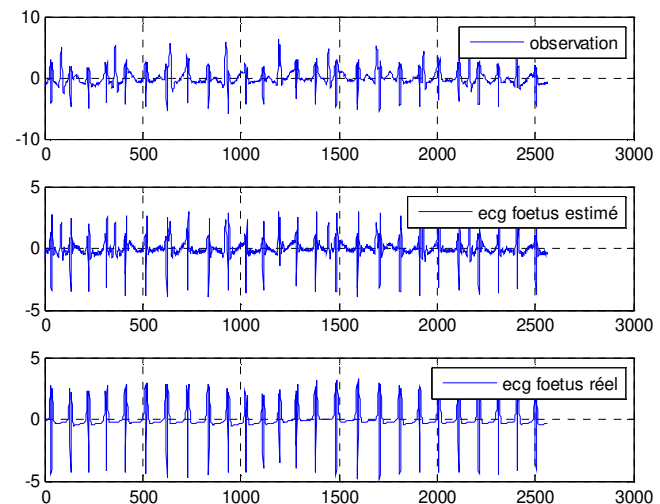
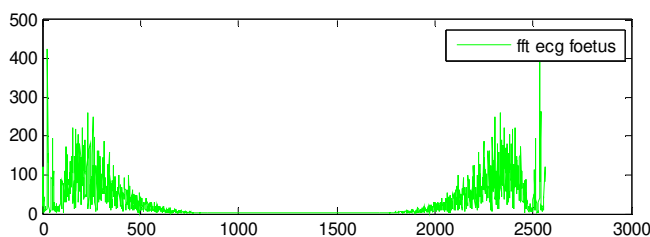
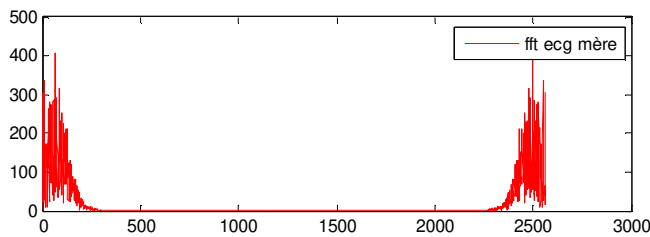
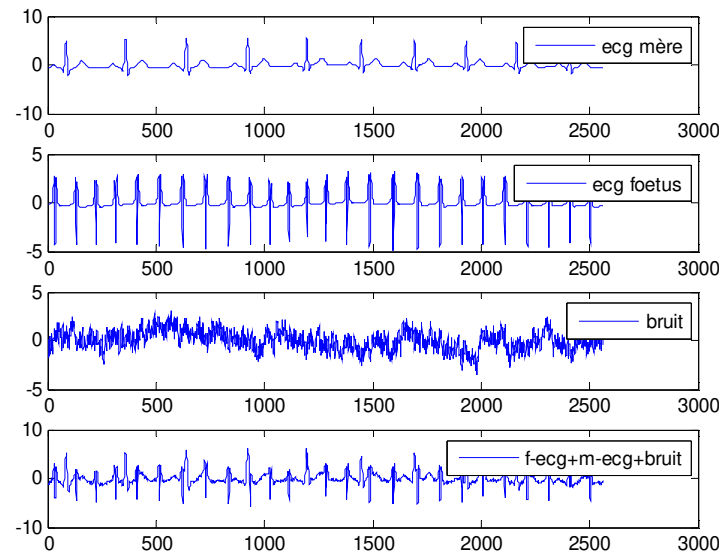
$$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \dots & R_{xx}(N-1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(N-2) \\ & & \dots & \\ R_{xx}(N-1) & R_{xx}(N-2) & \dots & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) - R_{bb}(0) \\ R_{xx}(1) - R_{bb}(1) \\ \vdots \\ R_{xx}(N-1) - R_{bb}(N-1) \end{bmatrix}$$

Exemple 2: On suppose que l'observation $x(n) = y(n) + bb(n)$

Le signal à estimer $y(n)$ a pour la fonction d'autocorrélation $R_y(k)=\alpha^{|k|}$ $0 < \alpha < 1$. Il est décorrélé du bruit blanc $bb(n)$ de variance σ_b^2 . Cherchons $h(n)$ tel que $H(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} 1+\sigma_b^2 & \alpha \\ \alpha & 1+\sigma_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad H(z) = \frac{1}{(1+\sigma_b^2)^2 - \alpha^2} [(1+\sigma_b^2 - \alpha^2) + \alpha \sigma_b^2 z^{-1}]$$

Exemple 3: Comme illustration du filtrage de Wiener, on prend la mesure de l'activité cardiaque d'un fœtus à l'aide d'un électrocardiogramme (ECG) pris au niveau de l'abdomen de la mère (le signal $x(n)$) et qui va naturellement être perturbé par l'ECG de celle-ci auquel se rajoute le bruit thermique des électrodes et des équipements électroniques. Pour retrouver l'ecg du fœtus, on réalise une deuxième mesure fournissant l'ECG de la mère (le signal bb). On peut employer alors le filtre de Wiener pour estimer le signal $y(n)$ représentant l'ECG du fœtus.



On peut observer que les TF des deux signaux ecg (mère et fœtus) occupent la même plage de fréquences. A partir des auto-corrélations de l'ECG mesuré sur l'abdomen $x(n)$ et celui de la mère $bb(n)$, on retrouve les paramètres b_i du filtre qu'on appliquera à $x(n)$ pour obtenir une estimée de $y(n)$ soit l'ECG foetal.

Remarque

Quand les fonctions d'auto et d'intercorrélation ne sont pas connues (cas le plus courant), alors on va approcher le filtre optimal de Wiener en utilisant une boucle de retour et un algorithme de minimisation: c'est ce que l'on appelle **le filtrage adaptatif**. Dans ce cas, on remplacera la connaissance des fonctions de corrélation par une phase d'apprentissage permettant de modifier itérativement la réponse impulsionnelle du filtre.

TD n°2 : Processus aléatoires

1. Soient $X(t)$ et $Y(t)$ deux signaux aléatoires indépendants et stationnaires au sens large (SSL) tels que $R_X(\tau) = 9e^{-a|\tau|}$ et $R_Y(\tau) = b\delta(\tau) + c$. On considère $Z(t) = X(t) + Y(t)$,

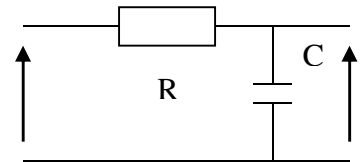
- Quelles conditions doit-on imposer sur les constantes a , b et sur c (Justifier)
- Calculer les statistiques de premier ordre de $Z(t)$
- Calculer $R_Z(t, \tau)$. $Z(t)$ est-il SSL?
- Peut-on calculer sa DSP $S_Z(f)$? si oui calculer la.

2. Soit le processus aléatoire $Z(t) = X \cos(2\pi f_0 t) - Y \sin(2\pi f_0 t)$, où X, Y sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes à moyennes nulles et de variances $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$; f_0 est une constante.

- Calculer la valeur moyenne $E\{Z(t)\}$ et la variance σ_Z^2 .
- Calculer la fonction d'autocorrélation $R_Z(t_1, t_2)$ et examiner si le processus est SSL.

3. L'entrée $x(t)$ du circuit est un bruit blanc de fonction d'autocorrélation $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau)$

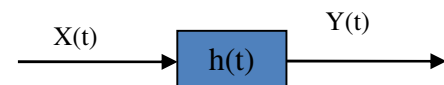
- Déterminer la densité spectrale de la sortie $y(t)$, notée $S_y(f)$
- Déterminer la fonction d'autocorrélation de la sortie $y(t)$, notée $R_y(\tau)$ ainsi que sa puissance
- Remplacer R par une self L et C par une résistance et reprendre les questions



4. Soit $X(t) = A + b(t)$ un signal réel aléatoire, où A est une constante réelle et $b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale de puissance σ_b^2 , et soit un filtre moyennneur de réponse impulsionnelle:

$$h(t) = \frac{1}{T} \Pi(t - T/2)$$

- Exprimer l'autocorrélation statistique du signal d'entrée $R_{xx}(t, \tau)$. $X(t)$ est-il SSL ?
- Déterminer la moyenne statistique de $y(t)$.
- Montrer que $R_{yy}(\tau) = \frac{\sigma^2}{T} \Lambda_T(\tau) + A^2$ et en déduire σ_y et μ_y .
- Prendre $A=2$ et tracer $X(t)$ et $Y(t)$.

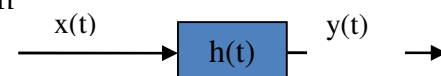


5. On considère le schéma ci-contre où $x(t) = s(t) + b(t)$ avec $s(t) = \Pi_1(t)$ et $b(t)$ est un bruit blanc Gaussien centré de variance 1

- Déterminer la densité de probabilité de $x(t)$. $x(t)$ est-il SSL ?

On veut maximiser le rapport signal sur bruit (SNR)

- Déterminer et tracer $h(t)$ pour $k=2$ et $T_0=2$. Calculer alors le SNR.
- Quelle loi de probabilité suit $y(t)$ (justifier).
- Donner un exemple concret de l'utilisation de ce type de filtre
- Si $s(t)$ est déterministe et inconnu, quel filtre utilise-t-on ?



6. On considère la transmission de deux symboles :

$$s_0(t) = A \quad t \in [0, T] \quad , \quad s_1(t) = -A \quad t \in [0, T]$$

à travers un canal à bruit blanc additif Gaussien. Le signal reçu s'écrit : $x(t) = s_i(t) + b(t)$ où $b(t)$ est un bruit blanc centré de DSP σ_b^2

- Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre adapté $h(t)$ correspondant à $s_0(t)$ telle que $\int h(t)^2 dt = 1$
- Même question pour $s_1(t)$. Puis, donner le rapport signal sur bruit, dans chaque cas.

On note $y_{si}(t)$, la sortie du filtre correspondant à $s_i(t)$,

- Montrer que pour $b(t)$ elle s'écrit : $y_b(T) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T b(t) dt$

- Déterminer la moyenne et la variance de $y_b(T)$

- Dans l'hypothèse où le bruit blanc est Gaussien, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = y_{si}(t) + y_b(t)$

7. On considère un processus de la forme $X(n) = b(n) + \alpha b(n-1) + W(n)$ où $W(n)$ est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 tel que $W(n)$ et $W(j)$ sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que $b(n)$ est une variable aléatoire uniforme à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendante de $W(n)$ $n \in \mathbb{Z}$ et que de même, $b(n)$ et $b(j)$ sont indépendants si $n \neq j$ ($P(b(n) = 1) = P(b(n) = -1) = 1/2$).

- Construire un filtre qui estime $b(n)$.

8. On désire dé-bruiter un signal de parole $z(n)$ corrompu par du bruit additif $b(n)$ indépendant du signal sonore et ce, par filtrage de Wiener. On suppose connues quelques valeurs d'autocorrélation pour les deux signaux telles que :

$$R_{ZZ}[0] = 1.5; R_{ZZ}[1] = 0.5; R_{ZZ}[2] = 0.25; R_{ZZ}[3] = 0.125; R_{ZZ}[4] = 0.0625$$

$$R_{bb}[0] = 1; R_{bb}[1] = 0.25; R_{bb}[2] = 0.0625; R_{bb}[3] = 0.015625$$

- Pourquoi ne peut-on pas employer un filtre adapté ou un filtre moyennneur ?

- Donner les équations de Wiener-Hopf permettant d'estimer $z(n)$.

- Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{z}(n)$ puis exprimer $H(z)$.

9. On considère un problème d'estimation de bruit $b(n)$.

Le signal observé est $x(n) = s(n) + b(n) - b(n-1)$.

On suppose que le signal $s(n)$ est centré avec $R_{ss}(n) = 0.8^{|n|}$ et qu'il est décorrélé du bruit dont l'autocorrélation est $R_{bb}(n) = 0.8\delta(n)$.

- Déterminer les moyennes statistiques de $s(n)$ et $b(n)$.
- Quand à-t-on recours au filtre de Wiener?
- Donner les équations de Wiener-Hopf permettant d'estimer $b(n)$
- Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{b}(n)$.
- Exprimer $\hat{b}(n)$

Solutions

1. Voir interro 1 2016/2017

$$2. \mu_z(t) = 0 \quad \sigma_z^2(t) = \sigma^2 \quad R_z(\tau) = \sigma^2 \cos(2\pi f_0 \tau) \text{ SSL}$$

$$3. R_{xx}(t, \tau) = A^2 + \sigma_b^2 \delta(\tau) = fct(\tau) \quad \mu_x(t) = A \Rightarrow \text{SSL} \quad H(f) = \text{sinc}(fT) e^{-j\pi f T} \quad \mu_y(t) = A \quad \text{filtre moyennneur}$$

$$4. H(f) = 1/(1 + 2j\pi f RC), \quad S_y(f) = \sigma_x^2 / (1 + 4(\pi f RC)^2) \quad R_y(\tau) = \sigma_x^2 / 2RC e^{-|\tau|/RC}, \quad P = R_y(0) = \sigma_x^2 / 2RC, \text{ interro1 16/17}$$

$$5. x(t) \text{ Gaussien de moyenne } s(t) \text{ et de variance } 1. \quad x(t) \text{ non stationnaire} \quad S_b(f) = |H(f)|^2 \quad S_s(f) = |H(f)|^2 \text{sinc}^2(f) \quad h(t) = 2\Pi(2 - t) \quad \text{SNR} = 1 \quad y(t) \text{ Gaussien} \quad \text{Radar ou Sonar} \quad \text{Passe-bas (moyennneur)}$$

$$6. \text{Interro1 14/15} \quad 7. R_{xx}(1:3) = (1 + \alpha^2 + \sigma^2, \alpha, 0) \quad R_{bx}(1:3) = (1, 0, 0) \quad 8. \mu_z = 0, \mu_b = 0, \text{ signal (parole) aléatoire,}$$

$$9. \mu_s = 0, \mu_b = 0, S_b(f) = 0.8. \text{ Quand signal utile et bruit occupent même plage de fréquences.}$$

$$b_0 = 0.8/2.6 \text{ et } b_1 = 0.$$

Exercices supplémentaires

1. Soit le signal aléatoire défini par $x(t) = A_1 e^{j2\pi f_1 t} + A_2 e^{j2\pi f_2 t}$ où A_1 et A_2 sont deux v.a gaussiennes, décorrelées, centrées et de variance σ^2

- Donner la d.d.p conjointe $f_{A_1, A_2}(A_1, A_2)$
- Déterminer la moyenne statistique du signal $x(t)$ ainsi que sa fonction d'autocorrélation et la D.S.P
- Déterminer la d.d.p de $x(t)$
- Le processus $x(t)$ est-il stationnaire au 2^{ème} ordre ?

2. Le signal aléatoire $x(t)$ possède une fonction d'autocorrélation de la forme $R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\beta|\tau|}$. Un autre signal est lié à $x(t)$ par l'équation déterministe suivante : $y(t) = ax(t) + b$, où a et b sont des constantes données.

- Quelle est la fonction d'autocorrélation de $y(t)$? En déduire μ_y et σ_y^2
- Quelle est la fonction d'intercorrélation et de covariance de $x(t)$ et $y(t)$?
- Calculer le coefficient de corrélation. Ce résultat était-il prévisible, pourquoi ?

3. Parmi les fonctions d'auto-corrélation statistiques suivantes lesquelles peuvent être celles d'un processus aléatoire réel?

$R_{x1}(\tau) = \Lambda_2(\tau) - 2$	$R_{x2}(\tau) = -\Lambda_2(\tau) + 2$	$R_{x3}(\tau) = e^{-2 \tau }$	$R_{x4}(\tau) = e^{-2\tau} U(\tau)$	$R_{x5}(\tau) = \delta(\tau-1) + \delta(\tau+1)$
--------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------------	-------------------------------------	--

4. On considère le signal $x(n) = g(n)\cos(2\pi k_0 n/N + \phi)$ défini pour $n \in [0, N-1]$, et où $g(n)$ est une fonction aléatoire SSL, indépendante de ϕ v.a uniforme entre 0 et 2π .

- Calculez l'autocorrélation de $x(n)$
- Déduisez en sa densité spectrale de puissance, en fonction de la DSP de g , $S_g(f)$.

5. Soit le signal aléatoire $x(t)$ SSL dont la DSP est donnée par $S_x(f) = \sigma^2 B \Pi_B(f)$

- Déterminer l'autocorrélation statistique de $x(t)$
- En déduire la moyenne et la variance statistique de $x(t)$.

Ce signal est transmis à travers un SLIT dont la fonction de transfert $H(f) = \Pi_A(f)$ avec $A < B$

- Le signal de sortie est-il aléatoire? (Justifier) SSL? (Justifier)
- Déterminer $S_y(f)$ et en déduire $R_y(\tau)$ puis les moments statistiques d'ordre 1 de $y(t)$.

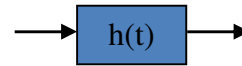
6. On dispose d'un signal reçu qui est la version bruitée, retardée et atténuée d'un signal d'intérêt $s(n)$. Le bruit $b(n)$ est supposé blanc gaussien de variance σ^2 . Le problème est de déterminer l'amplitude A et le retard n_0 dans le signal reçu $x(n) = A.s(n - n_0) + b(n)$. Sachant que le rapport signal-à-bruit est maximum en sortie du filtre adapté de réponse $h(n) = s(-n)$.

- Vérifier que la sortie $y(n)$ de ce filtre s'exprime comme la somme de deux fonctions de corrélation.
- Calculer la variance σ_b^2 du bruit de sortie.
- On prend pour $s(n)$ une impulsion rectangulaire de largeur L , tracer alors un exemple de signal reçu et de sortie du filtre adapté.

7. Soit $x(t) = t$ avec $0 \leq t \leq T$

On utilise ce signal pour déterminer la distance d'un objet. Sachant que le signal reçu $y(t)$ par le récepteur est retardé de T' et bruité par un bruit blanc Gaussien de densité spectrale de puissance σ^2 :

1. Tracer approximativement $y(t)$.
2. Déterminer l'expression générale de la réponse impulsionnelle du filtre $h(t)$ (dont l'énergie vaut 1) permettant de maximiser le rapport signal sur bruit.
3. Tracer $h(t)$ en fonction de $T_0 = 2T$ et $k = \sigma^2$, puis $z(t)$ la sortie du filtre (prendre $T'=10$).
4. Donner le rapport signal sur bruit après filtrage.
5. Pourquoi ce filtrage est dit, en général, optimal et, en particulier, adapté?



8. On considère un processus de la forme $X(n) = \theta + W(n)$ où $W(n)$ est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance 1 tel que $W(n)$ et $W(j)$ sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que θ suit une loi $N(0, \sigma^2)$ indépendante de $W(n) \forall n \in \mathbb{Z}$.

- Caractériser le filtre de Wiener permettant d'estimer θ à partir de $X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-p+1}$.
- Calculer les coefficients du filtre.

9. On considère un problème d'estimation d'un signal $s(n)$ bruité..

Le signal observé est $x(n) = \alpha s(n) + b(n)$.

On suppose que $s(n)$ et $b(n)$ sont SSL et décorréles et que le bruit possède une DSP $S_{bb}(f) = 0.25$.

- Rappeler les conditions d'applications du filtrage de Wiener
- Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{s}(n)$. On supposera que $R_{ss}(k) = 2 \cdot 0.5^{|k|}$
- Exprimer $H(z)$ puis $\hat{s}(n)$

10. On considère un problème d'estimation d'un signal $s(n)$ bruité et ayant subi un écho.

Le signal observé est $x(n) = s(n) + 0.5s(n-1) + b(n)$.

On suppose connue l'autocorrélation du signal utile et qu'elle a pour expression $0.5^{|k|}$ et l'on suppose que le signal utile est décorrélé du bruit dont l'autocorrélation est $R_{bb}(k) = 0.25^{|k|}$.

1. Déterminer les moyennes statistiques de $x(n)$ et $b(n)$
2. Donner les équations de Wiener-Hopf permettant d'estimer $s(n)$
3. Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{s}(n)$.
4. Exprimer $\hat{s}(n)$ et commenter

Solutions

1. Voir interro 1 2014/2015 2. $R_y(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\beta|\tau|} + b^2$ $S_y(f) = 2\beta\sigma_x^2 / (\beta^2 + 4(\pi f)^2) + b^2\delta(f)$ $R_{xy}(\tau) = a R_x(\tau)$

3. Voir interro 1 2015/2016 4. $R_x(m) = R_g(m) \cos(2\pi k_0 m / N) / 2$ $S_x(f) = [S_g(f - k_0) + S_g(f + k_0)] / 4$

5. $R_x(\tau) = \sigma^2 B^2 \text{sinc}(B\tau)$, $\mu_x = 0$, $\sigma_x^2 = \sigma^2 B^2$, $x(t)$ SSL + $h(t)$ SLIT $\Rightarrow y(t)$ SSL, $S_y(f) = \sigma^2 B \Pi_A(f)$, $R_x(\tau) = \sigma^2 A B \text{sinc}(A\tau)$

6. $y(n) = A R_s(n - n_0) + R_{bs}(n)$ $\sigma_b^2 = R_b(0)$ $S_b(f) = \sigma_b^2 |H(f)|^2 \Rightarrow R_b(0) = \sigma_b^2 \int_{-1/2}^{1/2} |H(f)|^2 df$

7. Examen 15/16 8. $R_{xx}(0) = 1 + \sigma^2$ $R_{xx}(k > 0) = \sigma^2$ $R_{\theta x}(k) = \sigma^2$ $b_i = \sigma^2 / (N\sigma^2 + 1)$

9. Signaux : utile et observation stationnaires et conjointement stationnaires connus

$R_{xx}(k) = \alpha^2 R_{ss}(k) + R_{bb}(k)$ $R_{sx}(k) = \alpha R_{ss}(k)$