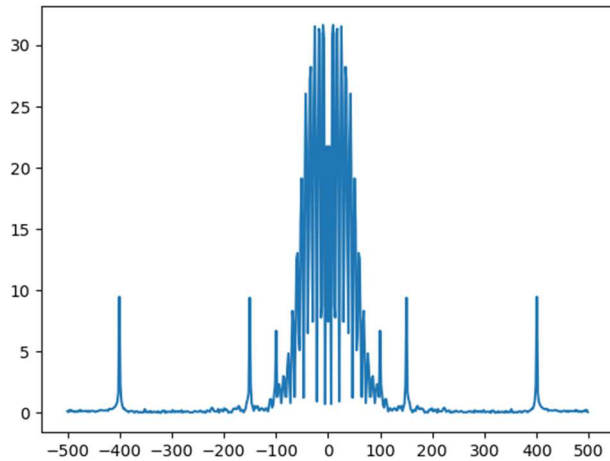


20

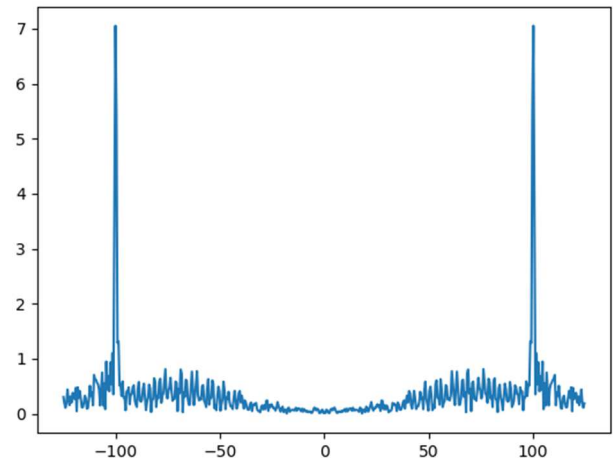
Exercice 1 7 pts

Un signal utile a été affecté par un bruit composé par la somme de plusieurs sinusôides. Afin de le débruiter, il a été décomposé en ondelettes à un niveau N. Sa représentation fréquentielle ainsi que celles des détails et approximation sont données ci-dessous

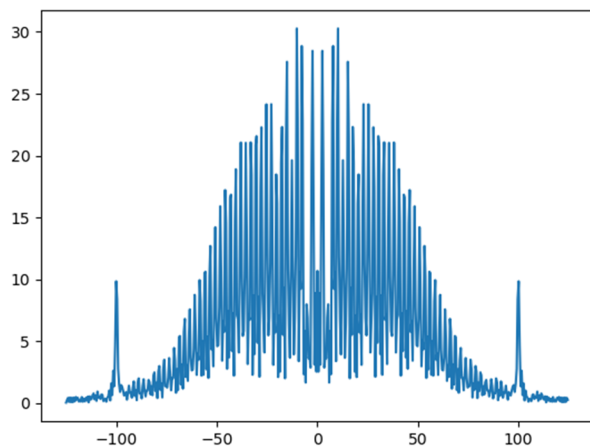
1. Identifier la représentation fréquentielle du signal ainsi que celles des décomposition (Détail ou approximation) en précisant la bande de fréquence occupée par chaque signal (2 pts)



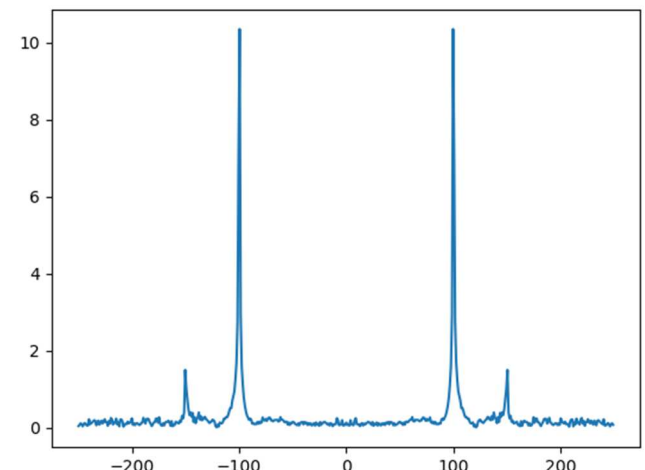
.....Signal [-500, 500] Hz



..... D2 [-250, -125] U [125, 250] Hz ...



..... A2 [-125, 125] Hz



..... D1 [-500, -250] U [250, 500] Hz ...

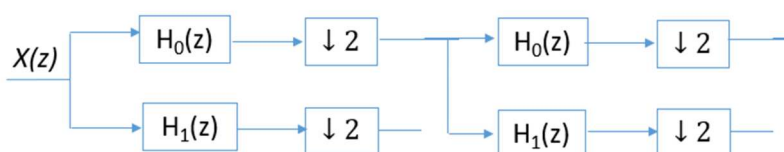
2. Exprimer le bruit

(1 pt)

$$b(n) = 20 \cos(2\pi f_0 n) + 20 \cos(2\pi f_1 n) + 14 \cos(2\pi f_2 n) \text{ avec } f_0 = 400, f_1 = 150 \text{ et } f_2 = 100,$$

3. Donner le schéma de Décomposition

(0.5 pt)



4. Ce niveau de décomposition est-il suffisant pur supprimer tout le bruit ? (Justifier)

(1 pt)

Non. Celle de 100 Hz ne sera pas éliminée

On considère que les premières valeurs du signal sont : $\{17; 21; 25; 14; 1; -8; -4; 1\}$

5. Donner le signal décomposé par l'ondelette de Haar telle que $h_0: \{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ (1.5 pt)

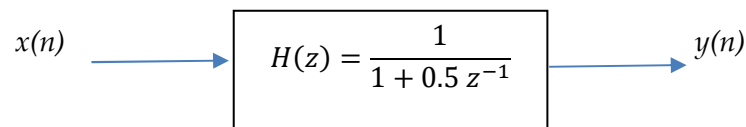
Niveau	Approximation	Détails
0	17 21 25 14 1 -8 -4 1	
1	$\frac{38}{\sqrt{2}}$ $\frac{39}{\sqrt{2}}$ $\frac{-7}{\sqrt{2}}$ $\frac{-3}{\sqrt{2}}$	$\frac{-4}{\sqrt{2}}$ $\frac{11}{\sqrt{2}}$ $\frac{9}{\sqrt{2}}$ $\frac{-5}{\sqrt{2}}$
2	38.5 -5	-0.5 -2

5. On décide de rajouter un niveau de décomposition. Commenter (1 pt)

N=3. Celle de 100 Hz sera éliminée mais on perdra aussi l'information utile

Exercice 2 4.5 pts

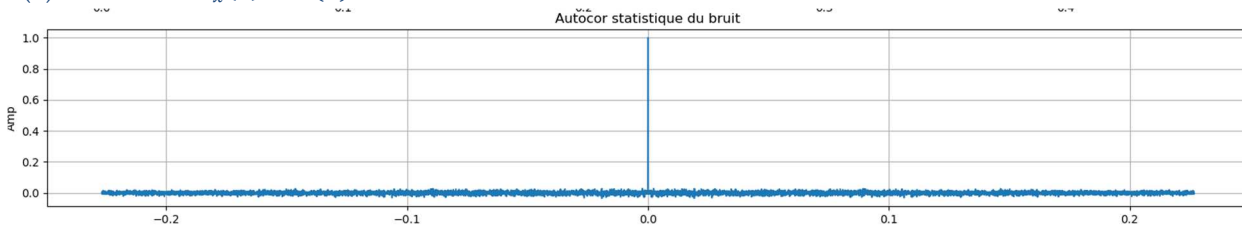
On considère les système linéaire et invariant discret suivant



tel que $x(n)$ est un signal aléatoire centré décorréle et de variance 1

1. Calculer et tracer l'autocorrélation statistique de $x(n)$ (1 pt)

$x(n)$ bruit blanc $R_x(k) = \delta(k)$

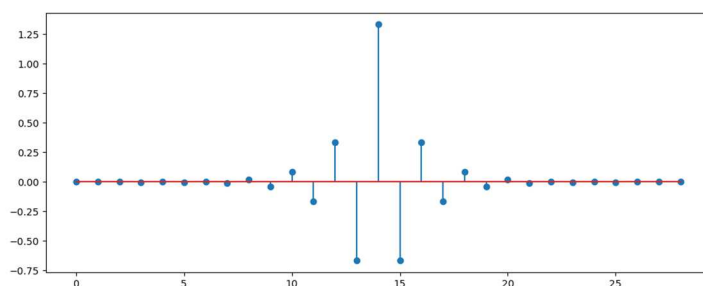


2. Calculer les 3 premières valeurs de l'autocorrélation statistique de $y(n)$ (2 pt)

Modèle AR d'ordre 1 $\rightarrow \begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ avec $a_1 = 0.5$ et $\sigma^2 = 1$

$\Rightarrow R_{yy}(0) = \sigma^2 / (1 - a_1^2) = 1 / 0.75 = 4/3$ $R_{yy}(1) = -a_1 R_{yy}(0) = -4/6$ $R_{yy}(k) = (-a_1)^k R_{yy}(0) \rightarrow R_{yy}(2) = 4/12$

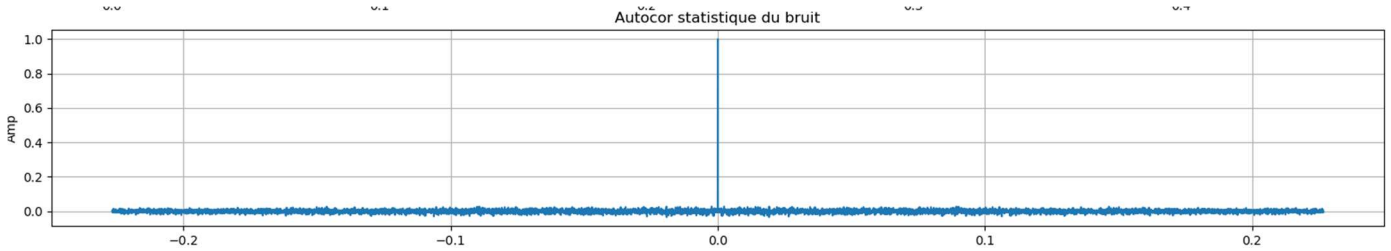
3. Tracer la et en déduire les moments statistiques d'ordre 1 de $y(n)$ (1.5 pt)



$\Rightarrow \mu_y = 0$ et $\sigma_y^2 = 4/3$

Exercice 3 3.5 pts

A transmission d'un signal aléatoire discret SSL il a été affecté d'un bruit additif $b(n)$ dont l'autocorrélation statistique est donnée ci-dessous



1. Déterminer les moments statistiques du bruit. (0.5 pt)

→ $x(n)$ bruit blanc $R_x(k) = \delta(k) \rightarrow \mu_x = 0$ et $\sigma_x^2 = 1$

On veut filtrer ce signal avec un filtre optimal.

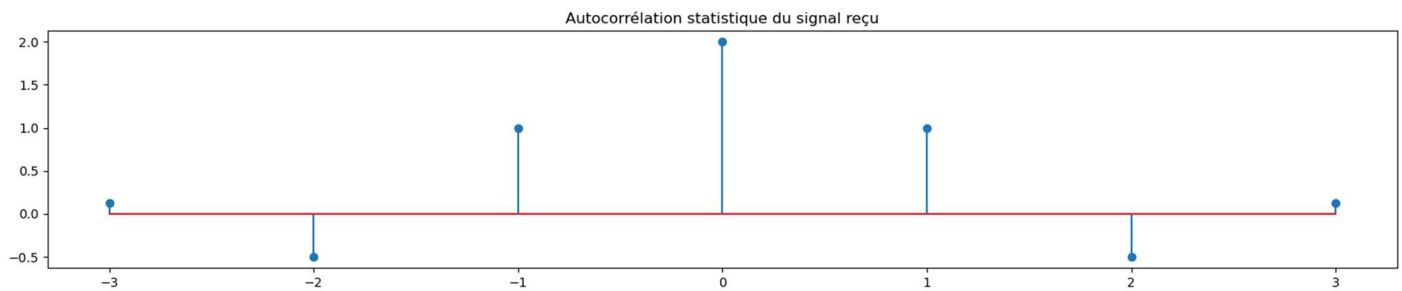
2. Citer 2 filtres optimaux. (0.5 pt)

Filtre adapté, Filtre de Wiener

3. Lequel doit-on utiliser dans notre cas ?(justifier) (0.5 pt)

Filtre de Wiener car le signal à débruiter n'est pas connu. Il est aléatoire SSL ainsi que le bruit

On suppose connues quelques valeurs de l'autocorrélation statistique du signal reçu données ci-dessous



4. Le bruit est supposé décorrélé du signal, déterminer le filtre optimal d'ordre 1 (2 coefficients) permettant de débruiter le signal (2 pts)

Bruit additif $\rightarrow y(n) = x(n) + b(n)$ Filtre optimal de Wiener pour estimer $x(n)$

$$\begin{bmatrix} R_{yy}(0) & R_{yy}(1) \\ R_{yy}(1) & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xy}(0) \\ R_{xy}(1) \end{bmatrix}$$

$$R_{yy}(k) = E\{(x(n) + b(n))(x(n-k) + b(n-k))\} = R_{xx}(k) + R_{bb}(k)$$

$$R_{xy}(k) = E\{x(n)[x(n-k) + b(n-k)]\} = R_{xx}(k) = R_{yy}(k) - R_{bb}(k)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow b_0 = 1/3 \quad b_1 = 1/3$$

Exercice 4 **5 pts**

Dans le but de localiser une cible, on envoie le signal suivant : $x(t) = \frac{1}{T}t$ pour $0 \leq t \leq T$

On suppose que le signal reçu est affecté d'un bruit additif blanc de puissance 0.09 que l'on veut filtrer par un filtre optimal.

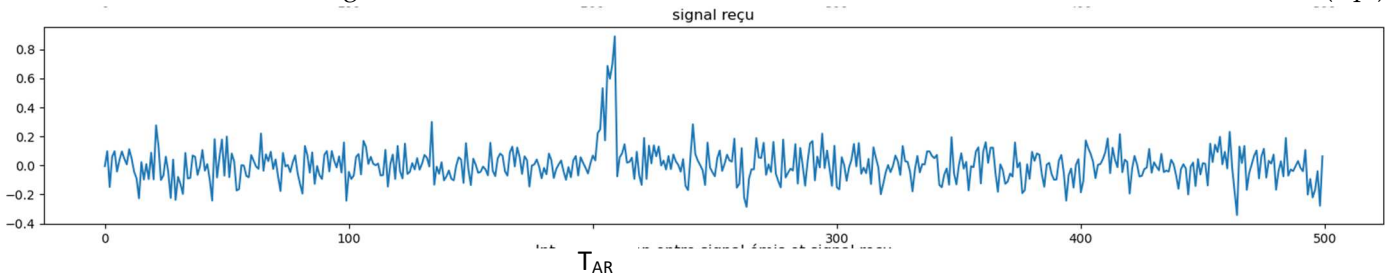
1. Déterminer le filtre optimal $h(t)$ tel que $\int h(t)dt = 1$ et tracer le. (1 pt)

$$h(t) = \frac{2}{T^2}(T-t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T$$

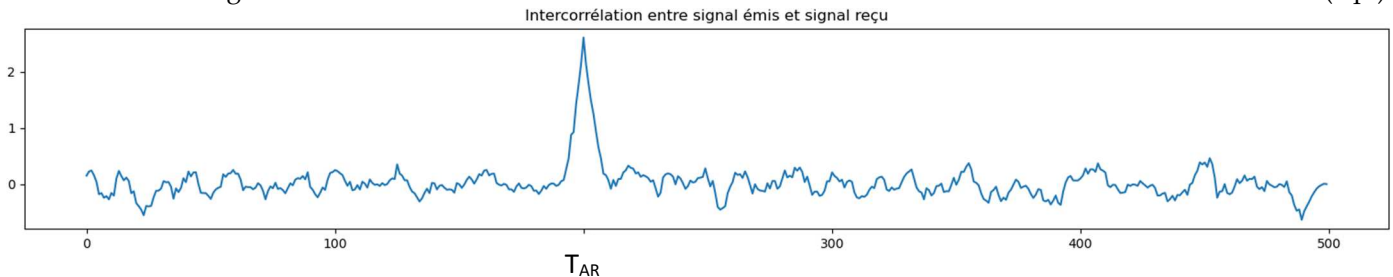
2. Calculer le rapport signal sur bruit (1 pt)

$$SNR(T_0) = \frac{E_x}{\sigma_b^2} = \frac{1}{1.8} = \frac{T}{0.27}$$

3. Donner le tracé du signal reçu. (1 pt)



4. Tracer le signal filtré (1 pt)



5. Expliquer pourquoi ce filtre est optimal (1 pt)

Dans le développement ; on prend la valeur maximum du rapport signal sur bruit.

$$\mu_y = \mu_x H(f=0) \quad S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) \quad H(f) = k / \sigma_b^2 X^*(f) e^{-2\pi j f T_0} \quad SNR(T_0)_{\max} = \frac{E_x}{\sigma_b^2}$$

- Si $k=0$, $R_{yy}(0) = R_{xx}(0) \cdot h(0) - \sum_{i=1}^N a_i R_{yy}(-i) = \sigma^2 \cdot 1 - \sum_{i=1}^N a_i R_{yy}(i) \quad R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k} \cdot b_j$

- Pour $k=1$ à N , $R_{yy}(k) = 0 - \sum_{i=1}^N a_i R_{yy}(k-i) = -\sum_{i=1}^N a_i R_{yy}(k-i) \quad R_{yx}(j) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i R_{xx}(j-i)$

$$h_1(n) = -(-1)^n h_0(L-1-n) \quad f_0(n) = h_0(L-1-n) \quad f_1(n) = (-1)^n h_0(n)$$

$$a_{j+1}[n] = \sum_k h_0[2n-k] a_j[k] \quad d_{j+1}[n] = \sum_k h_1[2n-k] a_j[k]$$