20

Exercice 1 **/ 6 pts**

The G.722.1 speech compression standard uses the Discrete Wavelet Transform (DWT) to encode wideband speech (50–7000 Hz).
Consider a speech signal sampled at 16 kHz, decomposed over 5 levels using the Daubechies wavelet of order 4 (db4).
The pole–zero plot of the low-pass decomposition filter is given.

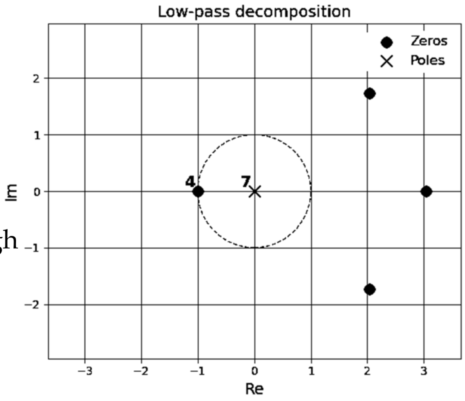
1. Draw the subband decomposition tree and indicate the frequency ranges corresponding to each subband.

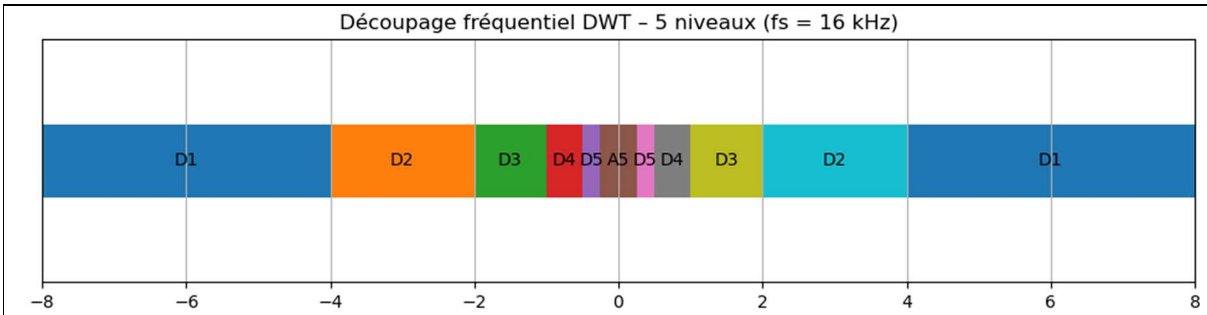
After the DWT, 1024 coefficients are obtained.

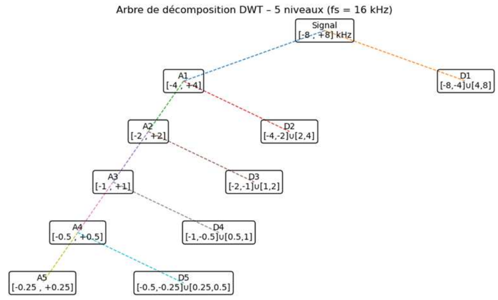
2. Give the distribution (number) of coefficients per level.

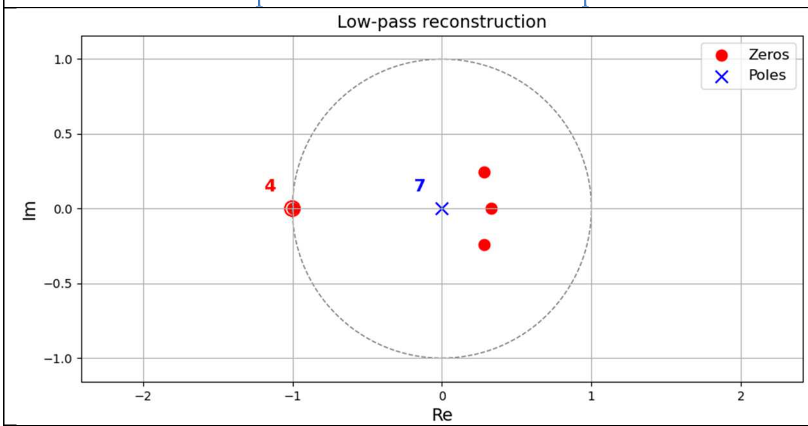
A thresholding operation is applied, keeping only the 256 coefficients with the largest amplitudes.

3. Calculate the resulting compression ratio.
4. Which signals (subbands) are retained?
5. Explain why this method preserves the perceived speech quality despite a high compression ratio.
6. Draw the pole–zero plot of the low-pass reconstruction filter.



<table>
<tr><td>



Ou</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>A5 : 32 - D5 : 32 - D4 : 64 - D3 : 128 - D2 : 256 - D1 : 512 coefficients</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Taux de compression $= \frac{1024}{256} = 4$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>A5, D5, D4, %>>D3 → Les hautes fréquences (D1, D2) sont majoritairement supprimées.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>L'énergie de la parole est concentrée aux basses fréquences
L'oreille est peu sensible aux hautes fréquences et au bruit de faible amplitude</td><td>1</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1</td></tr>
</table>

Exercice 2 / 4.5 pts

Internet traffic on a backbone link exhibits long-range dependence. The throughput $x(n)$(in Mbps) is modeled by an autoregressive (AR) model:: $x(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + b(n)$ où $b(n) \leadsto N(0, \sigma_b^2)$

Measurements on a link give: $\sigma_x^2 = 100$, $R_x(1) = 60$ $R_x(2) = 36$

1. Determine μ_x and deduce $R_x(0)$
2. Compute a_1 et a_2 and deduce σ_b^2

At time n, we observe $x(n) = 95\ Mbps$ and $x(n-1) = 90\ Mbps$

3. Compute the prediction $x(n+1)$ and $x(n+2)$

Pour un processus AR, l'entrée est un bb centré centré → $\mu_x = 0 \rightarrow R_x(0) = E[x(n)^2] = \mu_x^2 + \sigma_x^2 = \sigma_x^2 = 100.$	1
$\begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & R_{xx}(2) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ → $a_2 = 0,\ a_1 = 0.6$ → $\rightarrow \sigma_b^2 = 64.$	2.5
$\hat{x}(n+1) = a_1 x(n) + a_2 x(n-1) = 0.6 \times 95 + 0 \times 90 = 57$ Mbps. $\hat{x}(n+2) = a_1 \hat{x}(n+1) + a_2 x(n) = 0.6 \times 57 + 0 \times 95 = 34.2$ Mbps.	1

Exercice 3 / 5 pts

In a simplified GSM communication system, the radio propagation channel exhibits multipath echoes.

The transmitted signal $e(n)$ and the received signal $r(n)$are given for the first four samples.

n	0	1	2	3
$e(n)$	1	-1	1	-1
$r(n)$	1.2	0.3	1.5	-0.4

1. Give the 1st order Wiener filter (2 coefficients) used to estimate $e(n)$.
2. Give the estimated values of $\hat{e}(n)$ for $n = 0,1,2,3$.
3. Determine the mean square error (MSE).
4. What would be the impact of adding a fifth sample?
5. Why does the LMS algorithm converge to the Wiener solution?

$R_{rr}(0) = \frac{1}{4}(1.2^2 + 0.3^2 + 1.5^2 + (-0.4)^2) = \frac{3.94}{4} = 0.985$ $R_{rr}(1) = \frac{1}{4}(1.2 \times 0.3 + 0.3 \times 1.5 + 1.5 \times (-0.4)) = \frac{0.21}{4} = 0.0525$ $R_{er}(0) = \frac{1}{4}(1 \times 1.2 + (-1) \times 0.3 + 1 \times 1.5 + (-1) \times (-0.4)) = \frac{2.8}{4} = 0.7$ $R_{er}(1) = \frac{1}{4}((-1) \times 1.2 + 1 \times 0.3 + (-1) \times 1.5) = \frac{-2.4}{4} = -0.6$ $\begin{bmatrix} R_{rr}(0) & R_{rr}(1) \\ R_{rr}(1) & R_{rr}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{er}(0) \\ R_{er}(1) \end{bmatrix}$ → $\hat{e}(n) = 0.745\, r(n) - 0.649\, r(n-1).$	**1** **1.5**
$n = 0$ → $\hat{e}(0) = 0.745 \times 1.2 = 0.894$ (on suppose $r(-1) = 0$) $n = 1$ → $\hat{e}(1) = 0.745 \times 0.3 - 0.649 \times 1.2 = -0.5553$ $n = 2$ → $\hat{e}(2) = 0.745 \times 1.5 - 0.649 \times 0.3 = 0.9228$ $n = 3$ → $\hat{e}(3) = 0.745 \times (-0.4) - 0.649 \times 1.5 = -1.2715$ MSE = $\frac{[(1-0.894)^2 + (-1+0.5553)^2 + (1-0.9228)^2 + (-1+1.2715)^2]}{4} = 0.289174/4 = 0.0723.$	**1**
Amélioration de l'estimation des corrélations → Meilleure estimation des coefficients de Wiener → Réduction de l'erreur quadratique moyenne	**1**
L'algorithme LMS utilise les mêmes matrices de corrélation et intercorrélation. Il ajuste les coefficients dans la direction opposée du gradient instantané de l'erreur quadratique de façon itérative pour atteindre le minimum.	**0.5**

Exercice 4 **/ 4.5 pts**

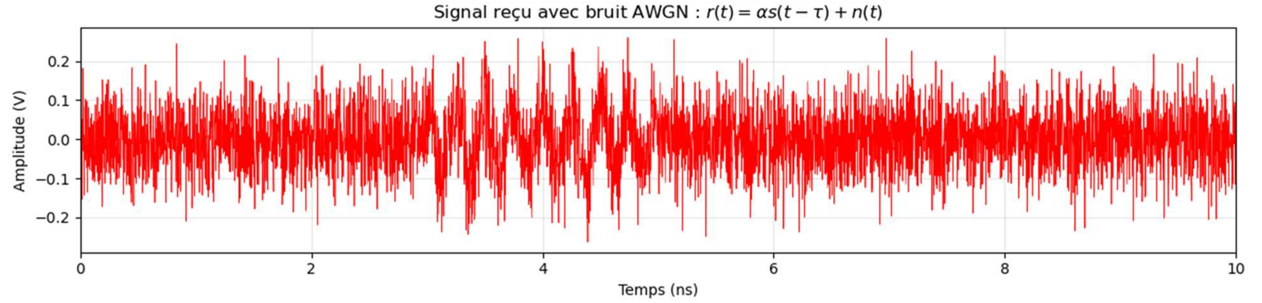
In an Ultra-Wideband (UWB) communication system using IR-UWB (Impulse Radio) technology, bits are transmitted using very short pulses of duration $T_b = 2$ ns. The received signal for a bit "1" is modeled as: :

$$s(t) = A \cdot \prod_{T_b}\left(t - \frac{T_b}{2}\right) \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad \text{avec } A = 0.1 \text{ V et } f_c = 4 \text{ GHz}$$

The channel introduces a delay of $\tau = 3$ ns and an attenuation $\alpha = 0.8$.

The received signal is $r(t) = \alpha s(t-\tau) + n(t)$ where $n(t)$ is an additive white Gaussian noise (AWGN) with power spectral density $N_0/2 = 10^{-12}$ W/Hz.

1. Sketch approximately the received signal $r(t)$.
2. Give the expression of the impulse response $h(t)$ of the optimal matched filter used to detect the signal.
3. Calculate the maximum output signal-to-noise ratio (SNR) obtained at the matched-filter output.
4. What are the advantages of matched filtering in this context?

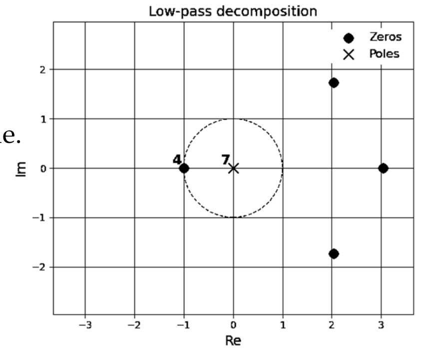
<table>
<tr><td>


</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$h(t) = \frac{2kA}{N_0}\, \Pi_{T_b}\left(\frac{T_b}{2} - t\right) \cos(2\pi f_c T_b - 2\pi f_c t)$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\text{SNR} = \frac{2E_r}{N_0} = \frac{\alpha^2 A^2 T_b}{N_0} = 6.4$</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>Maximise le SNR à l'instant de décision, optimisant la détection dans le bruit.
Détection efficace malgré impulsion UWB courte.</td><td>1</td></tr>
</table>

Exercice 1

La norme de compression vocale G.722.1 utilise la DWT pour coder la parole à large bande (50-7000 Hz). On considère un signal de parole échantillonné à 16 kHz que l'on décompose sur 5 niveaux avec l'ondelette Daubechies d'ordre 4 (db4). On donne le tracé des pôles et zéros du filtre passe-bas de décomposition.

1. Représenter l'arbre de décomposition en sous-bandes et indiquer les plages de fréquences correspondant à chaque sous-bande.



Après DWT, on obtient 1024 coefficients

2. Donner la répartition (nombre) de ces coefficients par niveau.

On applique un seuillage qui ne conserve que les 256 coefficients de plus grande amplitude.

3. Calculer le taux de compression obtenu.
4. Quels sont les signaux conservés ?
5. Expliquer pourquoi cette méthode préserve la qualité perçue de la parole malgré un fort taux de compression.
6. Donner le tracé des pôles et zéros du filtre passe-bas de reconstruction.

Exercice 2

Le trafic Internet sur un lien backbone présente des corrélations à long terme. On modélise le débit $x(n)$ (en Mbps) par un modèle AR tel que : $x(n) = a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + b(n)$ où $b(n) \sim N(0, \sigma_b^2)$

Des mesures sur un lien donnent : $\sigma_x^2 = 100$, $R_x(1) = 60$ $R_x(2) = 36$

1. Calculer μ_x et en déduire $R_x(0)$
2. Déterminer a_1 et a_2 et en déduire σ_b^2

À l'instant n, on observe $x(n) = 95\ Mbps$ et $x(n-1) = 90\ Mbps$

3. Calculer la prédiction $x(n+1)$ et $x(n+2)$

Exercice 3

Dans un système GSM simplifié pour l'étude, le canal de propagation radio présente des échos multiples. Le signal émis $e(n)$ et le signal reçu $r(n)$ sont donnés pour les 4 premières valeurs.

n	0	1	2	3
$e(n)$	1	-1	1	-1
$r(n)$	1.2	0.3	1.5	-0.4

1. Donner le filtre de Wiener d'ordre 1 (2 coef) permettant d'estimer $e(n)$
2. Donner les valeurs estimés de $\hat{e}(n)$ pour n=0, 1, 2, 3.
3. Déterminer l'erreur quadratique moyenne.
4. Quel serait l'impact d'ajouter un 5ème échantillon?
5. Pourquoi l'algorithme LMS converge-t-il vers la solution de Wiener?

Exercice 4

Dans un système de communication UWB (Ultra Wide Band) utilisant la technologie IR-UWB (Impulse Radio), les bits sont transmis par des impulsions très courtes de durée $T_b = 2$ ns. Le signal reçu pour un bit "1" est modélisé par :

$$s(t) = A \cdot \prod_{T_b}\left(t - \frac{T_b}{2}\right) \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad \text{avec } A = 0.1 \text{ V et } f_c = 4 \text{ GHz}$$

Le canal introduit un retard $\tau = 3$ ns et un atténuation $\alpha = 0.8$. Le signal reçu est $r(t) = \alpha s(t-\tau) + b(t)$ où $b(t)$ est un bruit blanc gaussien de densité spectrale $N_0/2 = 10^{-12}$ W/Hz.

1. Tracer approximativement le signal $r(t)$.
2. Donner l'expression de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre adapté optimal pour détecter le signal $s(t)$.
3. Calculer le gain en rapport signal à bruit maximal obtenu à la sortie du filtre adapté.
4. Quelles sont les avantages du filtrage adapté dans ce contexte.

Remainders

$\mu_y = \mu_x H(f=0)$ $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$ $H(f) = k/\sigma_b^2 X^*(f)e^{-2\pi jfT0}$ $SNR(T_0)_{\max} = \dfrac{E_x}{\sigma_b^2}$

- Si k=0, $R_{yy}(0) = R_{xx}(0).h(0) - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(-i) = \sigma^2.1 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(i)$ $R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$

- Pour k=1 à N, $R_{yy}(k) = 0 - \sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i) = -\sum_{i=1}^{N} a_i R_{yy}(k-i)$ $R_{yx}(j) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i R_{xx}(j-i)$

$h_1(n) = -(-1)^n h_0(L-1-n)$ $f_0(n) = h_0(L-1-n)$ $f_1(n) = (-1)^n h_0(n)$

$a_{j+1}[n] = \sum_k h_0[2n-k]a_j[k]$ $d_{j+1}[n] = \sum_k h_1[2n-k]a_j[k]$ $\overline{R_{yx}(k)} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)x(n-k)$