Exercice 1

On considère le processus aléatoire $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t) + C$

où A, B et C sont des variables aléatoires centrées décorrélées telles que A et B possèdent la mème variance σ^2 et C a une variance de σ_C^2 ; f_0 est une constante.

1. Calculer les moments statistiques d'ordre 1 de x(t) 1pt
2. Calculer et tracer l'autocorrélation statistique de x(t) 1.5pt
3. x(t) est -il stationnaire au sens large ? Si oui calculer et tracer sa DSP. 1.5pt

On transmet ce signal à travers un système linéaire et invariant dans le temps $h(t) = A'f_1 sinc(f_1 t)$

4. Le signal de sortie y(t) est-il SSL? 0.5pt
5. Déterminer la moyenne statistique de y(t) 0.5pt
6. Déterminer la densité spectrale de y(t) et tracer la $(f_1 < 2f_0)$ 1.5pt
7. Calculer l'autocorrélation statistique de y(t) 1pt

1. **A, B et C centrées $\mu_A = \mu_B = \mu_C = 0$**

$$\mu_x(t) = E\{x(t)\} = E\{A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t) + C\} = \mu_A \cos(2\pi f_0 t) + \mu_B \sin(2\pi f_0 t) + \mu_C = 0$$

A, B et C centrées et décorrélées → $E\{AB\} - \mu_A\mu_B = 0 \rightarrow E\{AB\} = \mu_A\mu_B = 0, E\{AC\} = 0, E\{BC\} = 0$

$$\sigma_x^2(t) = E\{x(t)^2\} - \mu_x^2(t) = E\left\{\left(A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t) + C\right)^2\right\}$$

$$\sigma_x^2(t) = \cos(2\pi f_0 t)^2 E\left\{A^2\right\} + \sin(2\pi f_0 t)^2 E\left\{B^2\right\} + E\left\{C^2\right\} + 2E\{AB\}.. + 2E\{AC\}.. + 2E\{BC\}..$$

$$\sigma_x^2(t) = \sigma^2\cos(2\pi f_0 t)^2 + \sigma^2 \sin(2\pi f_0 t)^2 E\left\{B^2\right\} + \sigma_c^2 = \sigma^2 + \sigma_c^2$$

2. $R_x(t,\tau) = E\{x(t)x^*(t-\tau)\}$

$$R_x(t,\tau) = E\{(A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t) + C)(A\cos(2\pi f_0(t-\tau)) + B\sin(2\pi f_0(t-\tau)) + C)\}$$

$$R_x(t,\tau) = E\left\{A^2\right\}\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0(t-\tau)) + E\left\{B^2\right\}\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0(t-\tau)) + E\left\{C^2\right\} + E\{AB\}.. + E\{AC\}.. + E\{BC\}.. + E\{AB\}.. + E\{AC\}.. + E\{BC\}.$$

$$R_x(t,\tau) = \sigma^2\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0(t-\tau)) + \sigma^2\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0(t-\tau)) + \sigma_c^2$$

$$R_x(t,\tau) = \sigma^2\cos(2\pi f_0\tau) + \sigma_c^2$$

3. On a $\mu_x(t) = 0$ et $R_x(t,\tau) = \sigma^2\cos(2\pi f_0 \tau) + \sigma_c^2 = fct(\tau) \rightarrow x(t)$ SSL

$$\rightarrow S_x(f) = \frac{\sigma^2}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right) + \sigma_c^2\delta(f)$$

4. Entrée SSL + h(t) SLIT → Sortie SLL

5. $\mu_y = \mu_x . H(f=0) = 0 . H(f=0) = 0$

6. $S_y(f) = S_x(f)|H(f)^2| = \left[\frac{\sigma^2}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right) + \sigma_c^2\delta(f)\right] A' \prod_{f_1}(f) = A'\sigma_c^2\delta(f)$

7. $R_y(\tau) = A'\sigma_c^2$

Rappels

$$TF\{\delta(t-t_0)\} = e^{-2\pi j f t_0} \quad TF\{A\prod_\theta(t)\} = A\theta \sin c(f\theta) \quad TF\{A\Lambda_\theta(t)\} = A\theta\sin c^2(f\theta)$$

$$TF\{e^{-at}U(t)\} = \frac{a}{a + 2\pi j f} \quad TF\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad R_{yy}(k) = \sigma^2\sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k}.b_j$$

$$\mu_y(t) = \mu_x H(f=0) \quad S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Exercice 2

Soient les signaux $y_1(n) = x(n) - x(n-2)$ et $y_2(n) = x(n) + x(n-1)$ où $S_x(f) = 4$

1. Expliquer pourquoi $y_1(n)$ et $y_2(n)$ sont stationnaires au sens large 1pt
2. Calculer et tracer pour chaque signal son autocorrélation statistique 3pt
3. En déduire les moyennes statistiques d'ordre 1 de $y_1(n)$ puis celle de $y_2(n)$ 1pt
4. Calculer et tracer l'intercorrélation statistique de $y_1(n)$ et $y_2(n)$ puis celle de $y_2(n)$ et $y_1(n)$ 2pt
5. Si x(n) sui une loi Gaussienne, $y_1(n)$ suivra aussi une loi Gaussienne ; Pourquoi ? 0.5pt

1. $y_1(n)$ est une combinaison linéaire des entrées $x(n)$ de même pour $y_2(n)$ → SLIT + entrée bb (SSL)

2. $S_x(f) = 4$ → $R_x(k) = 4\delta(k)$→ $\sigma_x^2 = 4$

$$y_1(k) = \sigma_x^2 \sum_{j=0}^{N-k} b_j b_{j+k} \rightarrow y_1(0) = 4(1+0+1) = 8;\ y_2(1) = 4(0+0); y_1(2) = -4;\quad y_1(|k| \geq 3) = 0$$

$$y_2(k) = \sigma_x^2 \sum_{j=0}^{N-k} b_j b_{j+k} \rightarrow y_1(0) = 4(1+1) = 8;\ y_2(1) = 4(1);\quad y_2(|k| \geq 2) = 0$$

3. $R_{y_1}(\infty) = \mu_{y_1}^2 = 0$→ $\mu_{y_1} = 0$ et $R_{y_1}(0) = \mu_{y_1}^2 + \sigma_{y_1}^2 = 8$→$\sigma_{y_1}^2 = 8$

$R_{y_2}(\infty) = \mu_{y_2}^2 = 0$→ $\mu_{y_2} = 0$ et $R_{y_2}(0) = \mu_{y_2}^2 + \sigma_{y_2}^2 = 8$→$\sigma_{y_2}^2 = 8$

4. $R_{y_1y_2}(k) = E\{y_1(n)y_2(n-k)\} = E\{[x(n) - x(n-2)][x(n-k) + x(n-k-1)]\}$

$R_{y_1y_2}(k) = R_x(k) + R_x(k+1) - R_x(k-2) - R_x(k-1)$

$R_{y_1y_2}(0) = 4;\ R_{y_1y_2}(-1) = 4;\ R_{y_1y_2}(2) = -4;\ R_{y_1y_2}(1) = -4;\ Reste = 0$

$R_{y_2y_1}(k) = E\{y_2(n)y_1(n-k)\} = E\{[x(n) + x(n-1)][x(n-k) - x(n-k-2)]\}$

$R_{y_2y_1}(k) = R_x(k) - R_x(k+2) + R_x(k-1) - R_x(k+1)$

$R_{y_2y_1}(0) = 4;\ R_{y_2y_1}(-2) = -4;\ R_{y_2y_1}(1) = 4;\ R_{y_2y_1}(-1) = -4;\ Reste = 0$

5. Ce sont des équations aux différences finies de SLIT → combinaison linéaire de v.a. Gaussiennes donne une v.a. qui suit une loi Gaussienne.