

Exercise 1 : / 10 points

We consider the real WSS random process $s_1(t)$ whose statistical correlation function is:

$$R_{s_1}(\tau) = \cos(2\pi f_0 \tau) + 4.$$

We define the signal $s_2(t) = -2s_1(t)$.

1. Compute the first-order statistical moment of $s_1(t)$ 1pt
2. Compute the first-order statistical moment of $s_2(t)$ 1pt
3. Is $s_2(t)$ WSS (wide-sense stationary)? If yes, compute and plot its PSD. 1.5pt
4. Compute the cross-correlation $R_{s_1, s_2}(t, \tau)$ 1pt
5. Study the independence of the signals and the correlation between $s_1(t)$ and $s_2(t)$ 1pt
6. Compute the correlation coefficient. Was this result predictable? 1pt

We transmit the signal $s_1(t)$ through a linear time-invariant system such that $h(t) = e^{-|t|}U(t)$

7. Determine the statistical mean of $y(t)$. 1pt
8. Determine the power spectral density (PSD) of $y(t)$ and plot it. 1.5pt
9. Compute and plot the statistical autocorrelation of $y(t)$ 1pt

$$1. \quad \mu_{s_1} = E[s_1(t)] = 2 \quad \quad \quad 0.5 \quad \quad \quad \sigma_{s_1}^2 = R_{s_1}(0) - \mu_{s_1}^2 = 1 \quad \quad \quad 0.5$$

$$2. \quad \mu_{s_2} = E[s_2(t)] = E[-2s_1(t)] = -2\mu_{s_1} = -4 \quad \quad \quad 0.5 \quad \quad \quad \sigma_{s_1}^2 = 4R_{s_1}(0) - \mu_{s_2}^2 = 4 \quad \quad \quad 0.5$$

$$3. \quad R_{s_2}(\tau) = E[s_2(t)s_2^*(t-\tau)] = 4R_{s_1}(\tau) = fct(\tau). \quad 0.5$$

$$R_{s_2}(\tau) = fct(\tau) \quad \text{et} \quad \mu_{s_2} = -4 = cst \Rightarrow s_2(t) \text{ WSS} \quad \quad \quad 0.5$$

$$\Rightarrow S_{s_2}(f) = 2(\delta(f-f_0) + 2\delta(f+f_0)) + 16\delta(f) \quad \quad \quad 0.5$$

$$4. \quad R_{s_1 s_2}(\tau) = E[s_1(t)s_2^*(t-\tau)] = -2(\cos(2\pi f_0 \tau) + 8) \quad \quad \quad 1$$

$$5. \quad s_2(t) = -2s_1(t) \Rightarrow \text{dépendants linéairement} \Rightarrow \text{corrélés} \quad \quad \quad 1$$

$$6. \quad \rho = \frac{-2}{\sqrt{1 \cdot 4}} = -1. \quad \quad \quad 0.5$$

corrélation linéaire négative — c'était prévisible parce que $X_2 = -2X_1$ 0.5

$$7. \quad h(t) = e^{-t} \text{ pour } t \geq 0 \text{ (cas causal)} \Rightarrow H(f) = \int_0^\infty e^{-t} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{1+j2\pi f}. \quad \mu_Y = \mu_{s_1} \cdot H(f=0) = \mu_{s_1} \cdot 1 = 2 \quad \quad \quad 1$$

$$8. \quad S_Y(f) = |H(f)|^2 S_{s_1}(f) \quad \quad \quad |H(f)|^2 = \frac{1}{1+(2\pi f)^2}. \quad S_{s_1}(f) = \frac{1}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] + 4\delta(f)$$

$$\Rightarrow S_Y(f) = \frac{1}{1+(2\pi f)^2} \left(\frac{1}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] + 4\delta(f) \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+(2\pi f_0)^2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] + 4\delta(f) \quad \quad \quad 1 + 0.5 \text{ Tracé}$$

$$9. R_Y(\tau) = \frac{1}{1+(2\pi f_0)^2} \cos(2\pi f_0 \tau) + 4 \quad \quad \quad 0.5 + 0.5 \text{ Tracé}$$

Exercise 2 : / 5 points

Given a sample $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ independent and identically distributed $\rightarrow$ same mean μ_x and variance σ_x^2 , the following estimators are under consideration :

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} x_i \quad \hat{R}_x^{(1)}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} x(n)x * (n-k) \quad \hat{R}_x^{(2)}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} x(n)x * (n-k)$$

1. Identify these estimators. 1pt
2. Calculate the bias for each one. The bias of an estimator of a variable A is defined as $b_{\hat{A}} = E\{\hat{A}\} - A$ 1.5pt
3. Compare $\hat{R}_{x1}(k)$ and $\hat{R}_{x2}(k)$. Which one is more often used and Why? 1.5pt
4. Cite two PSD estimators and compare the pros and cons. 1pt

1. $\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} x_i \rightarrow$ Moyenne
- $\hat{R}_{x1}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} x(n)x * (n-k) \rightarrow$ Corrélation biaisée
- $\hat{R}_{x2}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} x(n)x * (n-k) \rightarrow$ Corrélation non biaisée 1

$$2. E[\hat{\mu}_x] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E[x_i] = \frac{1}{N} \cdot N\mu_x = \mu_x \rightarrow \text{Bias}(\hat{\mu}) = E[\hat{\mu}_x] - \mu_x = 0 \quad 0.5$$

$$\hat{R}_x^{(1)}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} x[n] x[n-k] \rightarrow E[\hat{R}_x^{(1)}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} R_x(k) = \frac{N-k}{N} R_x(k)$$

$$\rightarrow \text{Bias}(\hat{R}_x^{(1)}(k)) = E[\hat{R}_x^{(1)}(k)] - R_x(k) = \left(\frac{N-k}{N} - 1\right) R_x(k) = -\frac{k}{N} R_x(k) \quad 0.5$$

$$\hat{R}_x^{(2)}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} x[n] x[n-k] \rightarrow E[\hat{R}_x^{(2)}(k)] = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} R_x(k) = R_x(k) \rightarrow \text{Bias}(\hat{R}_x^{(2)}(k)) = 0 \quad 0.5$$

3. biaisé (sous-estime souvent la corrélation pour grands retards) mais petite variance aux extrémités $\rightarrow$ important pour modélisation AR, Wiener, PSD (corrélogramme = périodogramme) 1.5

4.

	Principe	Avantages	Inconvénients
Périodogramme	FFT sur tout le signal $ X(f) ^2/N$	Bonne résolution fréquentielle	Forte variance
Périodogramme Moyenné (Welch)	Découpage du signal $N=kN_f \times$ fenêtres + moyenne des k périodogrammes (sur N_f)	Variance réduite, moins de fuites spectrales (lobes secondaires)	- Moins bonne résolution fréquentielle. 1.5

Remainders

$$TF\{\delta(t-t_0)\} = e^{-2\pi j f t_0} \quad TF\{A \Pi(t)\} = A \theta \sin c(f\theta) \quad TF\{A \Lambda(t)\} = A \theta \sin c^2(f\theta)$$

$$TF\{e^{-at}U(t)\} = \frac{a}{a + 2\pi j f} \quad TF\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad R_{yy}(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{M-k} b_{j+k} \cdot b_j$$

$$\mu_y(t) = \mu_x H(f=0) \quad S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

Exercice 1

/ 10 pts

On considère le processus aléatoire $s_1(t)$ réel SSL dont la fonction de corrélation statistique est :

$$R_{s_1}(\tau) = \cos(2\pi f_0 \tau) + 4. \text{ On définit le signal } s_2(t) = -2 s_1(t)$$

1. Calculer les moments statistiques d'ordre 1 de $s_1(t)$ 1pt
2. Calculer les moments statistiques d'ordre 1 de $s_2(t)$ 1pt
3. $s_2(t)$ est-il stationnaire au sens large ? Si oui calculer et tracer sa DSP. 1.5pt
4. Calculer l'intercorrélation $R_{s_1 s_2}(t, \tau)$ 1pt
5. Etudier l'indépendance des signaux et la corrélation de $s_1(t)$ et $s_2(t)$ 1pt
6. Calculer le coefficient de corrélation. Ce résultat était-il prévisible ? 1pt

On transmet le signal $s_1(t)$ à travers un système linéaire et invariant dans le temps tel que $h(t) = e^{-t}U(t)$

7. Déterminer la moyenne statistique de $y(t)$ 0.5pt
8. Déterminer la densité spectrale de $y(t)$ et tracer la . 1.5pt
9. Calculer et tracer l'autocorrélation statistique de $y(t)$ 1.5pt

Exercice 2

Soit un échantillon $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ indépendant et identiquement distribué $\rightarrow$ même moyenne μ_x et variance σ_x^2 . On considère les estimateurs suivants :

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \quad \hat{R}_{x1}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{N-1} x(n) x^*(n-k) \quad \hat{R}_{x2}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} x(n) x^*(n-k)$$

1. Identifier ces estimateurs.
2. Calculer le biais de chacun. Le biais d'un estimateur d'une variable A est défini par : $b_{\hat{A}} = E\{\hat{A}\} - A$
3. Comparer $\hat{R}_{x1}(k)$ et $\hat{R}_{x2}(k)$. Lequel est le plus souvent utilisé et pourquoi ?
4. Citer deux estimateurs de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) et comparer leurs avantages et inconvénients.