

0. Rappels Divers

1. Rappels sur la Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une technique mathématique permettant de déterminer le spectre de fréquences d'un signal:

$$TF\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi j f t} dt \quad x(t) = TF^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{2\pi j f t} df$$

Espace temporel	Espace fréquentiel
	 Re{X(f)} est une fonction paire Im{X(f)} est une fonction impaire
$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$	$X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$
	 $e^{-j2\pi a f} X(f)$
$x(t - a)$	$e^{-j2\pi a f} X(f)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$	
	 $X(f) = T_0 \frac{\sin(\pi T_0 f)}{\pi T_0 f}$
$x(t) = T_0 \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT_0)$	$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(f - n f_0)$
$y(t) = \int_{u=-\infty}^{u=+\infty} h(u)x(t-u)du$ $= x(t) * h(t)$	$Y(f) = H(f)X(f)$
$y(t) = h(t)x(t)$	$Y(f) = H(f) * X(f)$

o Linéarité : $ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{TF} aX_1(f) + bX_2(f)$

o Décalage temporel : $x(t - t_0) \xrightarrow{TF} X(f)e^{-2\pi j f t_0}$

o Décalage fréquentiel : $x(t)e^{2\pi j f_0 t} \xrightarrow{TF} X(f - f_0)$ (MA)

o Dualité temps-fréq : $x(t) \xrightarrow{TF} X(f) \Rightarrow X(t) \xrightarrow{TF} x(-f)$

o Changement d'échelle : $x(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X(f/a)$

o Dérivation : $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (2\pi j f)^n X(f)$

o Inversion et conjugaison : $x(-t) \xrightarrow{TF} X(-f)$
 $x^*(t) \xrightarrow{TF} X^*(-f)$

o Convolution : $x(t) * h(t) \xrightarrow{TF} X(f).H(f)$

TF au sens des distributions

Pour les signaux à puissance moyenne finie (Dirac, Echelon, signaux périodiques, etc.),

o Dirac : $\delta(t - t_0) \xrightarrow{TF} e^{-2\pi j f t_0} \Rightarrow \delta(t) \xrightarrow{TF} 1$

o Echelon et signe: $U(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi j f} + \frac{1}{2} \delta(f)$ $Sgn(f) = \frac{1}{\pi j f}$

o Périodiques : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(2\pi j n f_0 t) \xrightarrow{TF} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - n f_0)$

o Peigne de Dirac : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{TF} X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_0)$

o $\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$

$\sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} \delta(f + f_0)$

Pour les signaux à énergie finie, la TF conserve l'énergie (relation de Parseval) : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$

La densité spectrale d'énergie (DSE) est la TF de l'autocorrélation (Théorème de Wiener-Kintchine)

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau$$

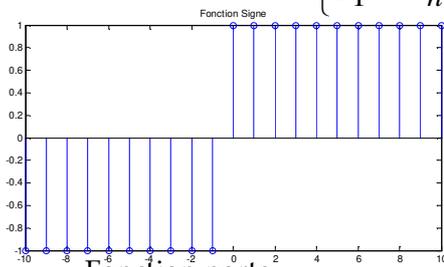
Pour les signaux à puissance moyenne finie, on définit alors une densité spectrale de puissance (DSP):

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(f)|^2}{T}$$

2. Signaux déterministes à temps discret usuels

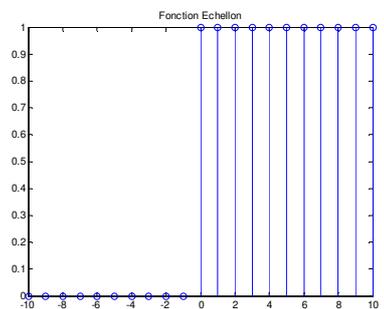
- Fonction signe

$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases}$$



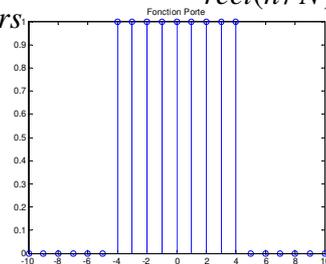
- Fonction échelon (unité)

$$U(n) = \Gamma(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



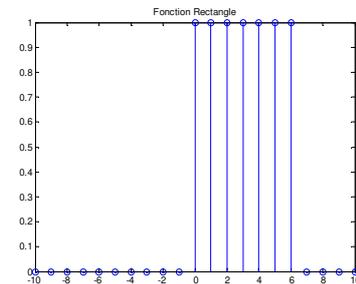
- Fonction porte

$$\Pi_{N+1}(n) = \begin{cases} 1 & -N/2 \leq n \leq N/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



- Fonction rectangle causal

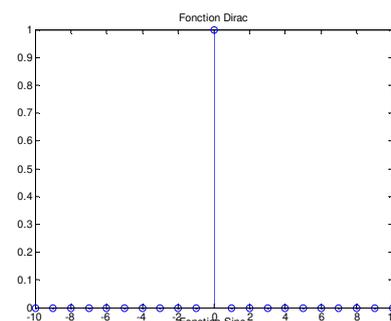
$$\text{rect}(n/N) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



- Fonction Dirac (impulsion unité)

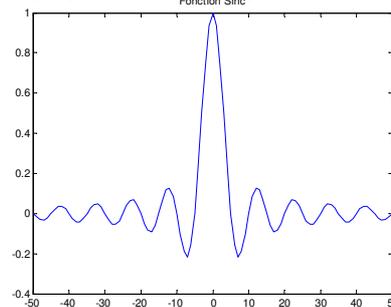
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} = U(n) - U(n-1)$$

○ $x(n) \cdot \delta(n-n_0) = x(n_0)$ • $x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0)$



- Fonction sinus cardinal

$$\text{sinc}(\theta n) = \frac{\sin(\pi \theta n)}{\pi \theta n}$$



2. Energie et puissance

Soit un signal $x(n)$ à temps discret, tel que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$ existe et converge. Alors le signal est dit à énergie finie et la valeur de cette somme est appelée énergie du signal : $E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$

Pour un signal périodique, on peut définir la puissance d'un signal $x(n)$ périodique de période N par :

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |x(n)|^2 \quad \text{ou} \quad P_x = \frac{1}{2.N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2$$

Dans le cas général, on parle de signaux à puissance moyenne finie définie par:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} |x(n)|^2 \quad \text{ou} \quad P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2.N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2$$

Remarques Signal à énergie finie \Rightarrow puissance nulle Signal à puissance finie \Rightarrow énergie infinie

3. Corrélation et auto-corrélation

La fonction de corrélation permet de mesurer le degré de ressemblance entre deux signaux en fonction d'un décalage. $R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-k)$

L'inter-corrélation entre $x(t)$ et $y(t)$ atteint un maximum pour un retard k si $x(n)=y(n-k)$

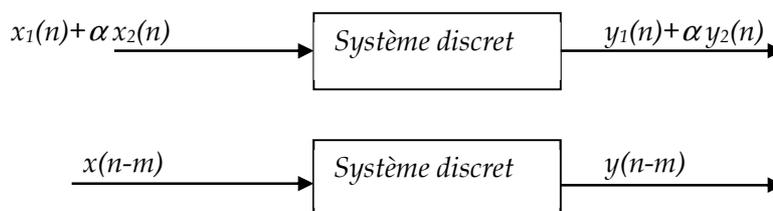
Pour des signaux à puissance moyenne finie : $R_{xy}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=k}^N x(n) y^*(n-k)$

Pour l'auto-corrélation $R_x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n-k)$

- Pour $k=0$, $R_{xx}(0) = E_x$ et $R_{xx}(k)$ est maximale en $k=0$
- Si $x(n)$ est réel, l'auto-corrélation est réelle et paire.
- L'auto-corrélation d'un signal de durée N aura une taille $2*N-1$
- L'auto-corrélation d'un signal périodique est périodique. $R_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-n} x(n) x^*(n-k)$

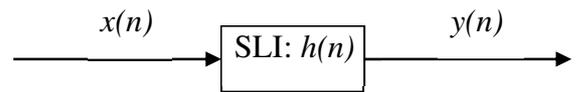
. Le rapport signal/bruit est défini par: $SNR_{db}=20 \text{ Log}(P_S/P_B)$

4. Théorie des systèmes linéaires et invariants discrets (SLID)



Si les hypothèses de linéarité et d'invariance temporelle sont vérifiées, on peut caractériser le système par sa réponse impulsionnelle $h(n)$.

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$



Un système linéaire invariant est un système dont le comportement dans le temps, peut-être décrit par une équation aux différences : $\sum_{i=0}^M a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i)$,

- Si les a_i sont \neq de 0, le système est dit récuratif (RII), il est non récuratif s'il ne dépend que des $x(n-i)$ (RIF)

- Si le système est à réponse impulsionnelle de durée finie (RIF), alors : $y(n) = \sum_{m=0}^K h(m)x(n-m)$

Dans ce cas, le système numérique est une fenêtre centrée sur les K plus récents échantillons.

- Si le système est à réponse impulsionnelle de durée infinie (RII) : $y(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)x(n-m)$

5. Stabilité et causalité d'un SLID

La causalité se traduit par le fait que pour: $h(n) = 0$ pour $n < 0$.

$$x(n) = 0, n < n_0 \text{ alors } y(n) = 0, n < n_0 \quad \Rightarrow \quad h(n) = 0, n < 0, y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m),$$

- si h et x sont causaux $y(n) = \sum_{m=0}^n h(n-m)x(m)$

On dit qu'un système est stable si, en lui appliquant une entrée bornée quelconque, la sortie reste bornée, ce qui implique dans le cas des SLIT: $\sum_n |h(n)| < \infty$



I. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

1. Quelques rappels sur l'échantillonnage

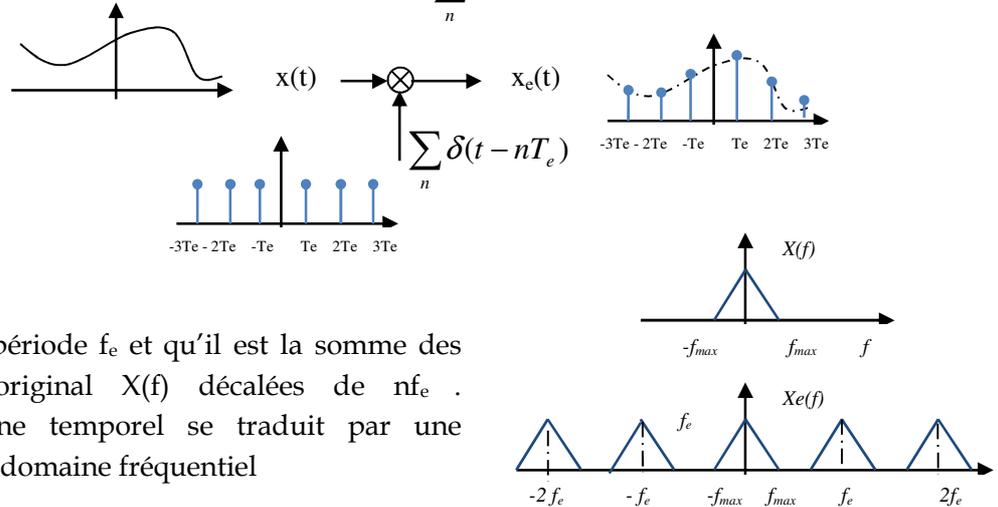
Soit $x(t)$ un signal analogique de transformée de Fourier $X(f)$. Echantillonner le signal $x(t)$ consiste à choisir une fréquence f_e et de construire un nouveau signal avec les $x(nT_e)$ avec n un entier et $T_e=1/f_e$.

On peut écrire le signal échantillonné $x_e(t)$ sous la forme : $x_e(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e)$

que l'on peut schématiser :

$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT_e),$$

$$\Rightarrow X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e)$$



Le spectre $X_e(f)$ est périodique de période f_e et qu'il est la somme des répliques (copies) du spectre original $X(f)$ décalées de nf_e . L'échantillonnage dans le domaine temporel se traduit par une "périodisation" de période f_e dans le domaine fréquentiel

Si $f_e > 2 f_{max}$, les motifs étant disjoints, on peut extraire $X(f)$ grâce à un filtre passe-bas idéal et donc reconstituer parfaitement le signal $x(t)$ à partir des $x_e(t)$ sinon il y aura recouvrement.

1. Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

Lorsque le signal à traiter n'est plus analogique mais numérique, la relation de la TF devient :

$$TF\{s(t)\} = S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2\pi j f t} dt \Rightarrow S_e(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_e(t)e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e)\delta(t - nT_e)e^{-2\pi j f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e)e^{-2\pi j f nT_e}$$

L'échantillonnage périodise le spectre du signal avec une période de répétition f_e ainsi $S_e(f) = S_e(f + f_e)$:

$$S_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-2\pi j n T_e f} \quad \text{Avec} \quad s(nT_e) = C_n = \frac{1}{f_e} \int_{f_e/2}^{f_e/2} S_e(f) e^{2\pi j n T_e f} df$$

2. Transformée de Fourier discrète (TFD) et propriétés

Cette transformée fait correspondre une suite de N valeurs à une autre de suite de N valeurs numériques également

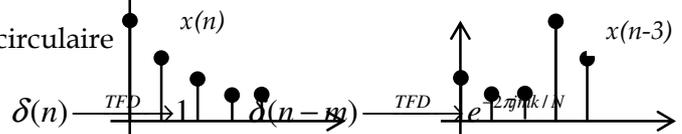
$$\begin{cases} S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-2\pi j n k / N} \\ s_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} S_k e^{2\pi j n k / N} \end{cases}$$

On confirme que la TFD n'est que l'échantillonnage de la TFTD. s_n et S_k sont périodiques de période N

Par ailleurs, comme l'énergie se conserve, on obtient : $\sum_0^{N-1} |s_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} |S_k|^2$.

La translation d'un signal se traduit par un décalage circulaire

o Linéarité : $ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{TFD} aX_1(k) + bX_2(k)$



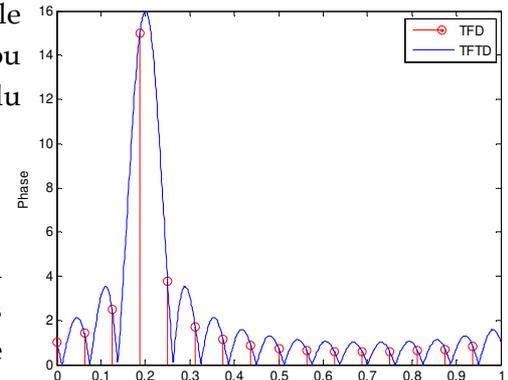
o Décalage temporel : $x(n-m) \xrightarrow{TFD} X(f)e^{-\frac{2\pi j k m}{N}}$ Décalage fréquentiel : $x(n)e^{\frac{2\pi j k_0 n}{N}} \xrightarrow{TFD} X(k-k_0)$

o Dualité temps-fréquence : $x(n) \xrightarrow{TFD} X(k) \Rightarrow X(n) \xrightarrow{TF} N.x(-k)$

o Changement d'échelle : $x(an) \xrightarrow{TFD} \frac{1}{|a|} X(k/a)$ Convolution périodique : $x(n) * h(n) \xrightarrow{TFD} X(k).H(k)$

o $\delta(n) \xrightarrow{TFD} 1$ $\delta(n-m) \xrightarrow{TFD} e^{-2\pi j m k / N}$

La précision fréquentielle dépend du nombre de points adoptés pour le calcul de la TFD (NF). Les points en fréquences, sont espacés de $1/NF$ (ou f_c/NF). Quant à la résolution en fréquence est liée au nombre de points du signal (N)



3. TFD des signaux de longueur illimitée

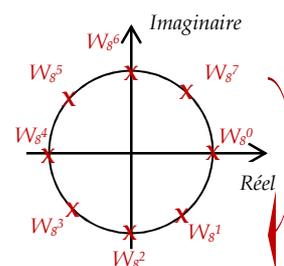
La troncation du signal échantillonné par une fenêtre de largeur T_0 a pour effet de convoluer le spectre avec un sinus cardinal qui s'annule tous les $1/T_0$ avec $T_0 = NT_e$ soit tous les f_c/N . L'importance de ses lobes peut être réduite par l'emploi d'autres fenêtres.

Fenêtres	Formulation	Largeur de Transition : Δf	Lobe Principale/Secondaire
Rectangle	$w_{Rect}(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$2 f_c / N$	-13 db
Triangulaire	$w_{Trian}(n) = \begin{cases} 1-2 n /(N-1) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4 f_c / N$	-25 db
Hanning	$w_{Han}(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4 f_c / N$	-31 db
Hamming	$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4 f_c / N$	-41 db
Blackman	$w_{Black}(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) + 0.08 \cos(\frac{4\pi n}{N-1}) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$6 f_c / N$	-57 db

Deux raies d'un spectre sont considérées comme séparables, si le maximum de l'une correspond au premier minimum nul de l'autre soit $|f_1-f_2| < \Delta f / 2$

4. Notation matricielle

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} & W_8^{24} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} & W_8^{24} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix}$$



II. Analyse des filtres numériques par la TZ

1. Transformée en Z

Soit un signal discret $x(n)$. Sa TZ est définie par:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} \quad \text{où } z \text{ est une variable complexe définie partout où cette série converge.}$$

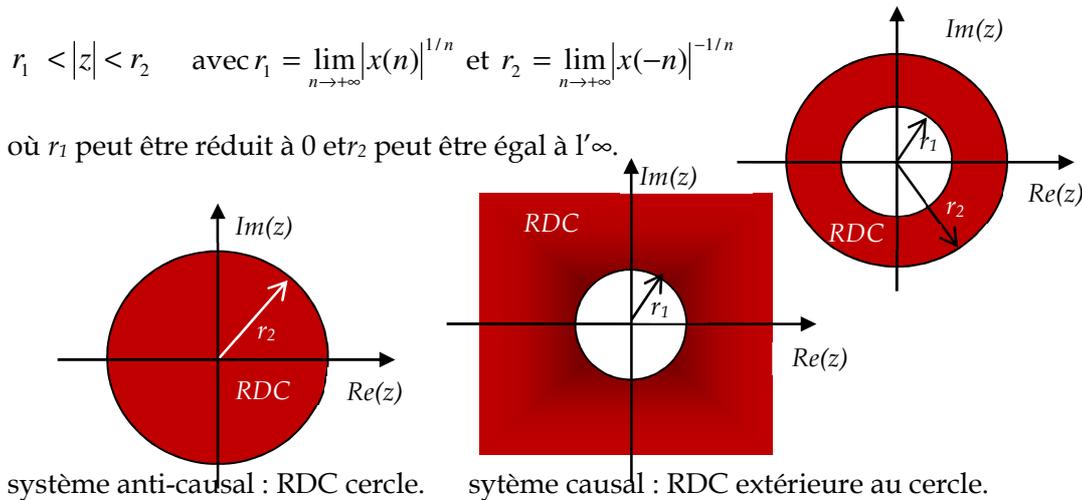
L'ensemble des valeurs de la variable complexe z pour lesquelles la série converge est appelée Région De Convergence (RDC):

$$RDC = \left\{ z \in \mathbb{C} / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n).z^{-n}| < +\infty \right\}$$

La RDC est un anneau de convergence centré sur l'origine défini par :

$$r_1 < |z| < r_2 \quad \text{avec } r_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x(n)|^{1/n} \text{ et } r_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x(-n)|^{-1/n}$$

où r_1 peut être réduit à 0 et r_2 peut être égal à $+\infty$.



Remarque : La TZ de a^n pour $n \in]-\infty, +\infty[$ n'existe pas.

2. Propriétés de la TZ

Si on définit : $x(n) \xrightarrow{TZ} X(z)$, $x_1(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z)$ et $x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_2(z)$

- Linéarité : $a.x_1(n) + b.x_2(n) \xrightarrow{TZ} a.X_1(z) + b.X_2(z)$ RDC intersection des deux RDC

- Théorème du retard : $x(n-k) \xrightarrow{TZ} z^{-k}.X(z)$ RDC : identique

- Théorème de l'avance : $x(n+k) \xrightarrow{TZ} z^k.X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{k-n}$ RDC : identique

- Multiplication par a^n : $a^n x(n) \xrightarrow{TZ} X\left(\frac{z}{a}\right)$ RDC : $a.r_1 < |z| < a.r_2$

- Retournement du temps : $x(-n) \xrightarrow{TZ} X(z^{-1})$ RDC : $1/r_2 < |z| < 1/r_1$

- Convolution : $x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z) \cdot X_2(z)$ et RDC : identique
- Théorème de dérivation : $n \cdot x(n) \xrightarrow{TZ} -z \cdot \frac{dX(z)}{dz}$ RDC : identique
- Théorème de la valeur initiale : si $x(n)=0$ pour $n < 0$ alors $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
- Théorème de la valeur finale : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$

Quelques TZ

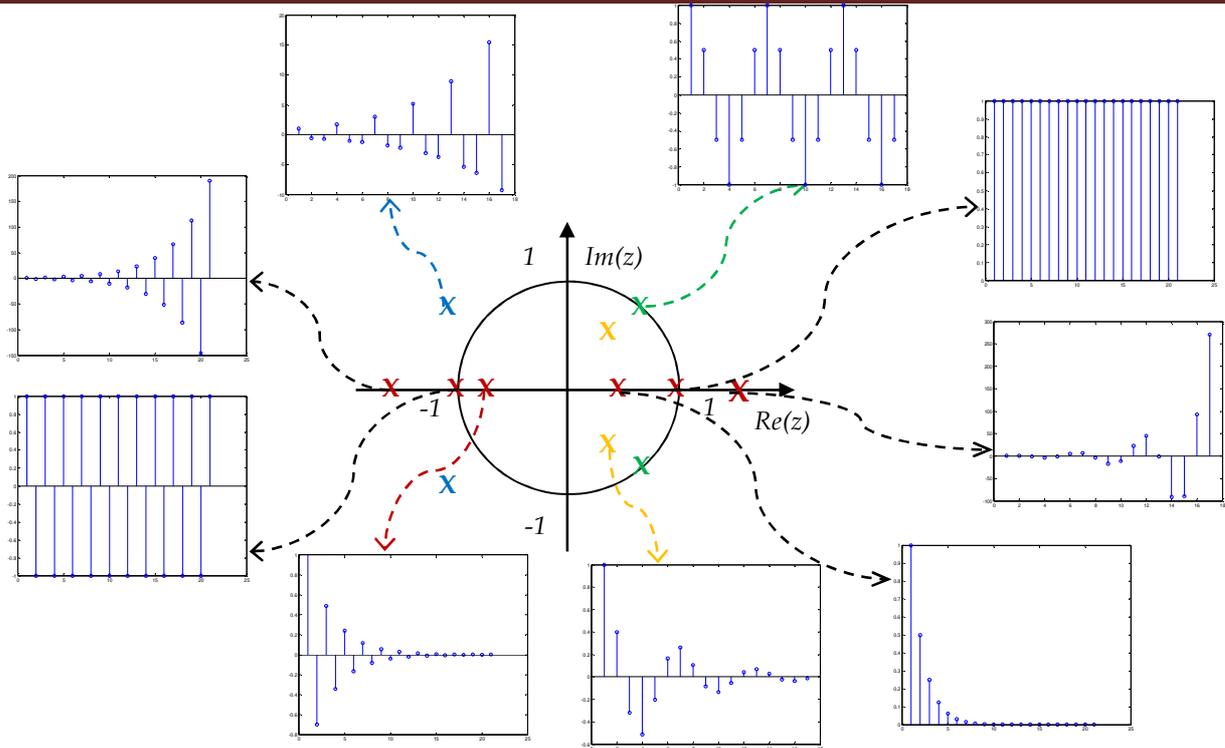
$x(n)$	$X(z)$	Région de convergence
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$U(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n U(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$n a^n U(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-a^n U(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$\cos(\omega_0 n) U(n)$	$\frac{1-z^{-1} \cos(\omega_0)}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n) U(n)$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n) U(n)$	$\frac{1-az^{-1} \cos(\omega_0)}{1-2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n \sin(\omega_0 n) U(n)$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1-2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

4. TZ rationnelles

$$\sum_{i=0}^M a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) \xrightarrow{TZ} \sum_{i=0}^M a_i \cdot z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i} X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^M a_i \cdot z^{-i}} = K z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^N (z-z_i)}{\prod_{i=1}^M (z-p_i)}$$

Les zéros sont les valeurs de z pour lesquelles H(z)=0 et les pôles les valeurs de z annulant le dénominateur. H(z) est complètement déterminée par la position de ses pôles et de ses zéros ainsi que par le facteur d'amplitude K. La région de convergence de H(z) exclut tous les pôles.

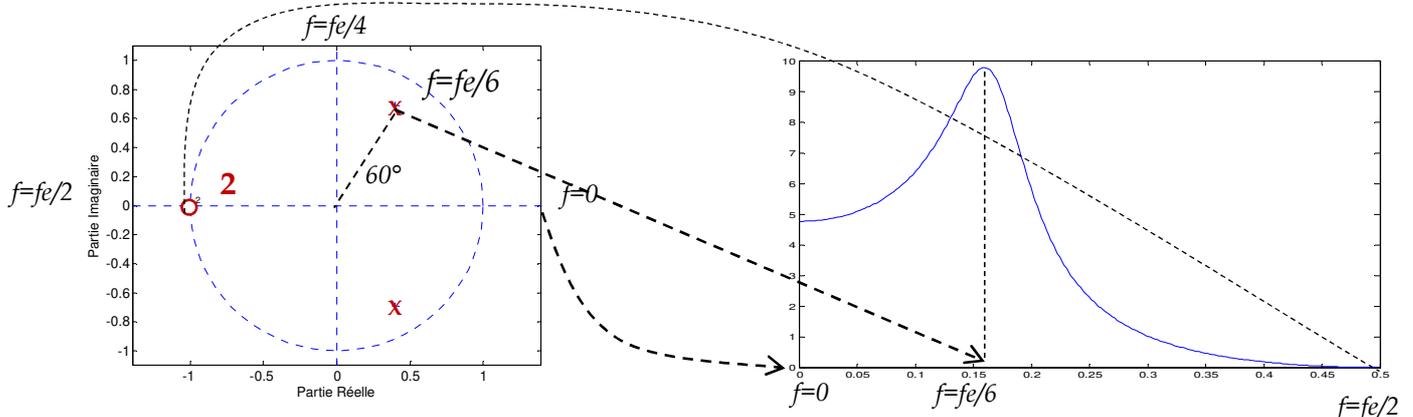
Dans la plupart des systèmes, les ai et le bi sont réels => les pôles et les zéros sont soit réels soit des paires de complexes conjuguées. A un pôle pi simple ou multiple va correspondre une réponse impulsionnelle qui converge si |pi| < 1. Elle divergera dans le cas contraire, soit si |pi| > 1. Sachant qu'à chaque pôle complexe est associé un pôle conjugué cela donnera une réponse impulsionnelle h(n) oscillante (cosinus ou sinus) amortie si |pi=1,2| < 1 ou divergente si |pi=1,2| > 1.



- Pour un système causal et stable, tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité ($|p_i| < 1, \forall i$). S'il est anti-causal, il sera stable si les pôles sont à l'extérieur du cercle unité. Un filtre RIF a tous ses pôles à l'origine et sera donc toujours stable.

4. Détermination de la réponse fréquentielle des filtres numériques

On suppose que le cercle unité ($|z|=1$) \in RDC de $X(z)$. On restreint le calcul de $X(z)$ au cercle unité en posant $z = e^{2\pi j f T_e}$. Lorsqu'un zéro est placé sur un point donné du plan en z , la réponse fréquentielle sera de 0 au point considéré. Un pôle quant à lui produira un pic au point correspondant. Plus les pôles ou les zéros sont proches du cercle unité, plus ils influencent la réponse en fréquence. Un zéro ou un pôle à l'origine n'influent pas sur le module de la réponse fréquentielle. Un zéro sur le cercle unité introduit une annulation du module pour la fréquence correspondant. Un zéro au voisinage du cercle unité introduit une atténuation dans le module de la réponse en fréquence. Atténuation d'autant plus importante que le zéro est proche du cercle unité. Un pôle au voisinage du cercle unité introduit une résonance d'autant plus importante dans le module de la réponse en fréquence que le pôle est proche du cercle unité.



5. TZ⁻¹

La transformée en Z présente l'avantage d'être plus facilement inversible que la transformée de Fourier. Le passage de la TZ vers h(n) peut se faire par le biais de la transformées en Z de signaux élémentaires connus à condition qu'il soit possible d'écrire H(z) comme la combinaison de transformées élémentaires. Dans le cas contraire, on peut employer l'intégration sur un contour fermé en utilisant le calcul des résidus, ou le développement en puissance de z et de z⁻¹, ou encore le développement en fractions élémentaires.

1. Le théorème des résidus: $x(n) = \sum_{p_i \text{ poles de } z^{n-1} X(z)} \text{Re } s [z^{n-1} X(z)]_{z=p_i}$

$$\text{Re } s [z^{n-1} X(z)]_{z=p_i} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p_i)^m z^{n-1} X(z)]_{z=p_i}$$

2. Transformée inverse par division polynômiale : Il est possible de calculer la transformée en Z inverse selon les puissances croissantes de z⁻¹ (système causal) ou selon les puissances décroissantes de z (système anti-causal).

Exemples $X(z) = \sum_n C_n z^{-n} \xrightarrow{TZ^{-1}} x(n) = C_n$

- y(n)=y(n-3)+x(n) ⇒ H(z) = $\frac{1}{1-z^{-3}} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-k})^3 = 1 + z^{-3} + z^{-6} + \dots \Rightarrow h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-3k)$

- X(z) = $\frac{1}{1-a.z^{-1}}$ pour |z| > a

Domaine de convergence extérieur à un cercle → signal causal → division pour avoir une série en z⁻¹.

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{-1+a.z^{-1}} & \frac{1-a.z^{-1}}{1+a.z^{-1}+a^2.z^{-2}+\dots} \\ \frac{0+a.z^{-1}}{-a.z^{-1}+a^2.z^{-2}} & \begin{array}{l} \swarrow x[0] \\ \swarrow x[1] \\ \swarrow x[2] \\ \dots \end{array} \\ \frac{0+a^2.z^{-2}}{0+a^2.z^{-2}} & \end{array}$$

On obtient : $\frac{1}{1-a.z^{-1}} = 1 + a.z^{-1} + a^2.z^{-2} \Rightarrow x(n) = a^n u(n)$

- X(z) = $\frac{1}{1-a.z^{-1}}$ pour |z| < a

Région de convergence intérieure à un cercle → signal anti-causal → division pour avoir une série en z.

$$\begin{array}{r|l} \frac{z}{-z+a^{-1}.z^2} & \frac{-a+z}{-a^{-1}.z-a^2.z^2-a^3.z^3-\dots} \\ \frac{0+a^{-1}.z^2}{-a^{-1}.z^2+a^2.z^3} & \begin{array}{l} \swarrow x[-1] \\ \swarrow x[-\infty] \end{array} \\ \frac{0+a^2.z^3}{\dots} & \end{array}$$

On obtient : $\frac{1}{1-a.z^{-1}} = -a^{-1}.z - a^{-2}.z^2 - \dots \Rightarrow x(n) = -a^n .u(-n-1)$

Notons que la division peut se réaliser sans faire apparaître une expression analytique générale.

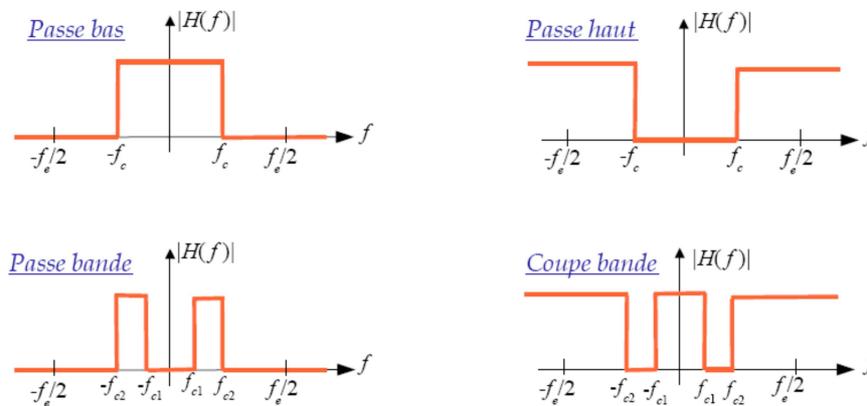
3. L'idée générale de cette approche consiste à trouver pour une fonction $X(z)$ complexe un développement en fonctions en Z plus simples et pour lesquelles une transformée inverse est connue:

$$X(z) = \sum_i X_i(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} x(n) = \sum_i x_i(n)$$

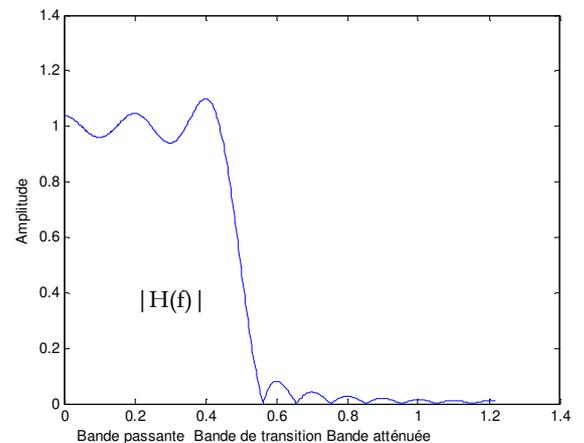
où les $X_i(z)$ sont des fonctions dont les TZ^{-1} sont connues (Voir page 38).

6. Caractéristiques des filtres numériques

Les filtres numériques dont il est question ici, sont des systèmes linéaires, discrets, invariants dans le temps et unidimensionnels. De plus, pour qu'ils soient physiquement réalisables, il faut qu'ils soient nécessairement causaux.



Les filtres représentés ci-dessus sont idéaux. Dans un cas réel il ne peut y avoir de discontinuités. Le passage entre zones passantes et zones atténuées se fait par des zones dites "de transition" dont la largeur va exprimer la sélectivité du filtre. Les bandes passantes et atténuées ne sont également pas idéales, elles contiennent des ondulations dont l'amplitude est exprimée par les paramètres d'ondulation en bande passante et d'atténuation. Pour toutes ces raisons, la spécification d'un filtre est habituellement réalisée à partir d'un gabarit fréquentiel.



Les filtres FIR peuvent générer des filtres à phase linéaire. Si un filtre est à phase linéaire, sa réponse fréquentielle est de la forme :

$$H(f) = R(f)e^{-j\phi(f)} \text{ avec } \phi(f) = \phi_0 + 2\pi f\tau$$

- Retard de groupe : C'est une caractéristique important des filtres est le retard de groupe qui est défini comme

$$\beta = -\frac{d\phi(f)}{df}$$

et qui correspond intuitivement au retard qui est souffert par l'enveloppe du signal après être passé par un filtre. Si la phase est linéaire (filtres RIF symétrique ou anti-symétrique), le retard est constante et le signal à la

sortie aura donc une distorsion minimale. Ce le phénomène de distorsion peut être très gênant, en particulier dans les systèmes audio. En effet, une phase linéaire implique un temps de propagation de groupe constant, et, par conséquent, l'effet de la phase sur le signal sera un simple décalage temporel.

RII ou RIF ?

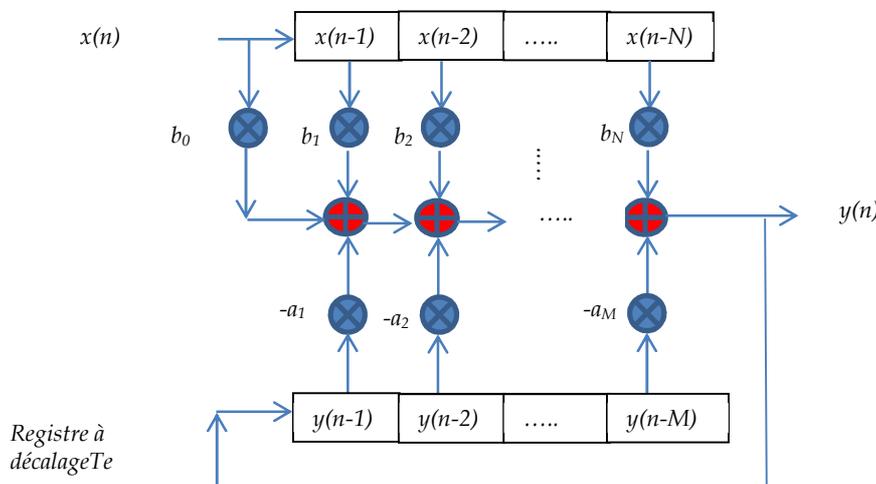
➤ Les filtres RII, on l'avantage qu'ils sont efficaces. Avec très peu de pôles et zéros on peut assurer la plupart des réponses fréquentielles dont on peut avoir besoin dans les applications audio. Cependant, le filtre étant rétro-activé, les erreurs de précision numérique deviennent une question d'importance, car ils peuvent s'amplifier et devenir dehors contrôle, d'abord dans la forme de bruit, mais éventuellement dans la forme d'instabilité.

➤ Par contre, les filtres RIF n'ont jamais des problèmes d'instabilité, car la sortie n'est qu'un somme finie échantillons de l'entrée. Cependant, quand la réponse impulsionnelle est longue, le numéro d'opérations peut devenir un facteur décisif quand il faut choisir entre RIF ou RII. Un autre avantage des RIF est le retard de group constant, qui permet d'avoir une distorsion de phase minimale sur le signal traité. La réponse impulsionnelle dans le cas RIF est parfaitement contrôlable.

7. Structure des filtres numériques

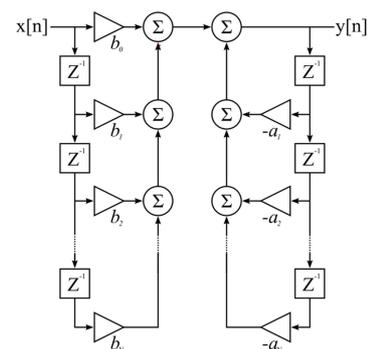
L'application d'un filtre numérique implique le calcul de la sortie $y(n)$ à l'instant $t=nT_e$ à partir des sorties et entrées précédentes plus la valeur courante de l'entrée.

$$\sum_{i=0}^M a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) \text{ En prenant } a_0=1, \text{ on obtient}$$



Cette structure peut être réalisée sous forme matérielle (registres, multiplicateurs, additionneurs) ou par logiciel. Ainsi, à chaque top d'horloge T_e , les valeurs des registres subissent un décalage permettant de calculer la nouvelle sortie.

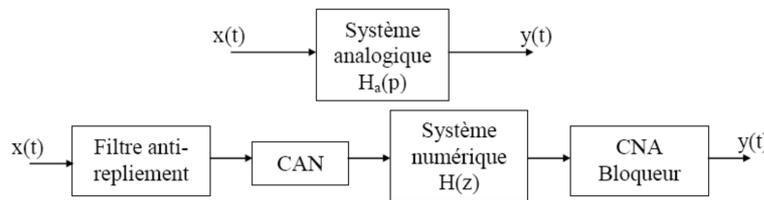
En employant la fonction de transfert $H(z)$, diverses structures peuvent être utilisées : structure directe (implémentation de l'équation aux différences), structure canonique (structure directe avec minimisation des composants) et structure en éléments simples.



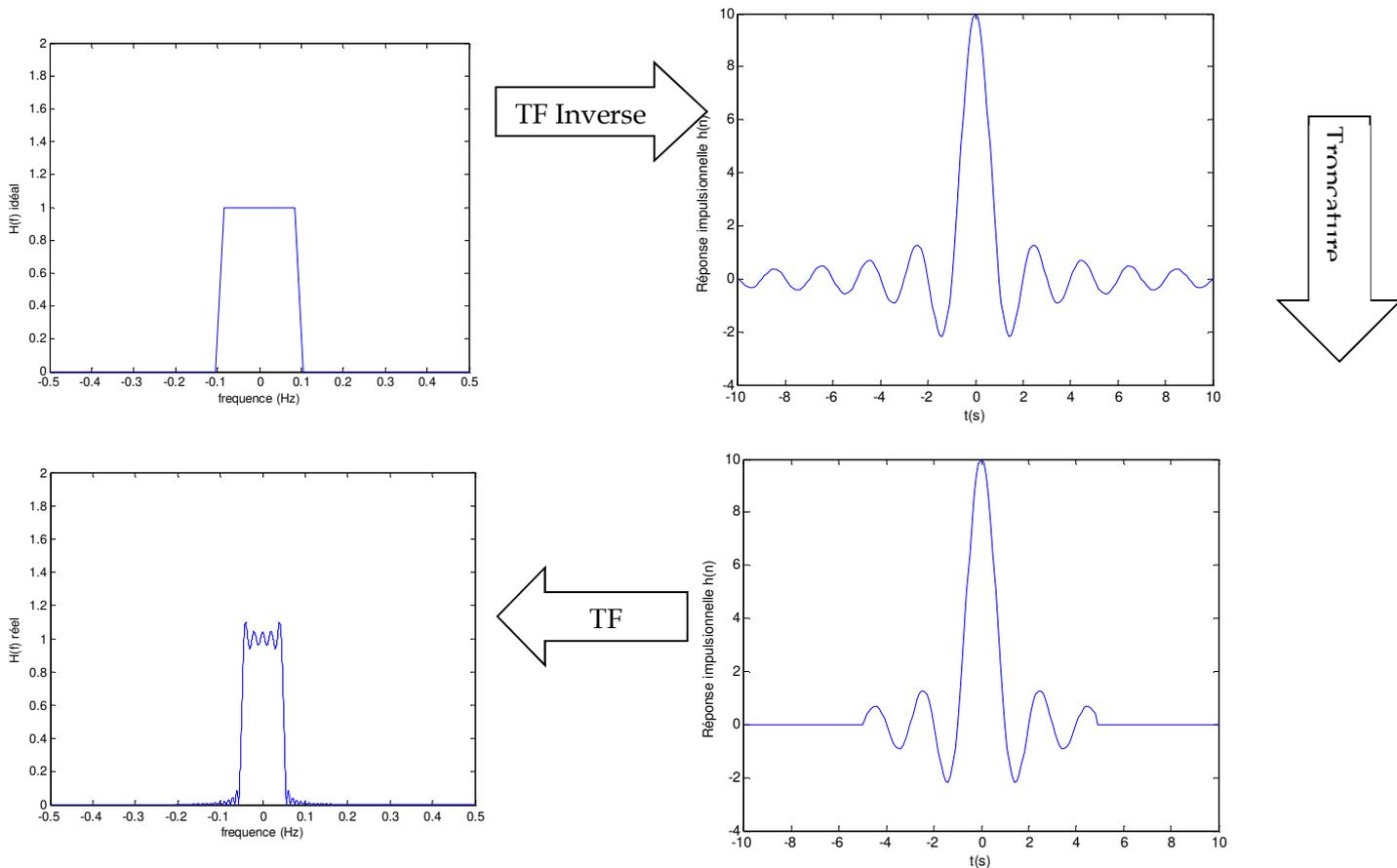
III Conception des Filtres Numériques RIF

1. Synthèse des Filtres numériques et Gabarit analogique

Comment synthétiser un filtre numérique ? La question est que nous connaissons le gabarit du filtre analogique et que nous cherchons un $H(z)$ à remplacer dans le circuit ci-dessus pour finalement satisfaire le gabarit analogique.

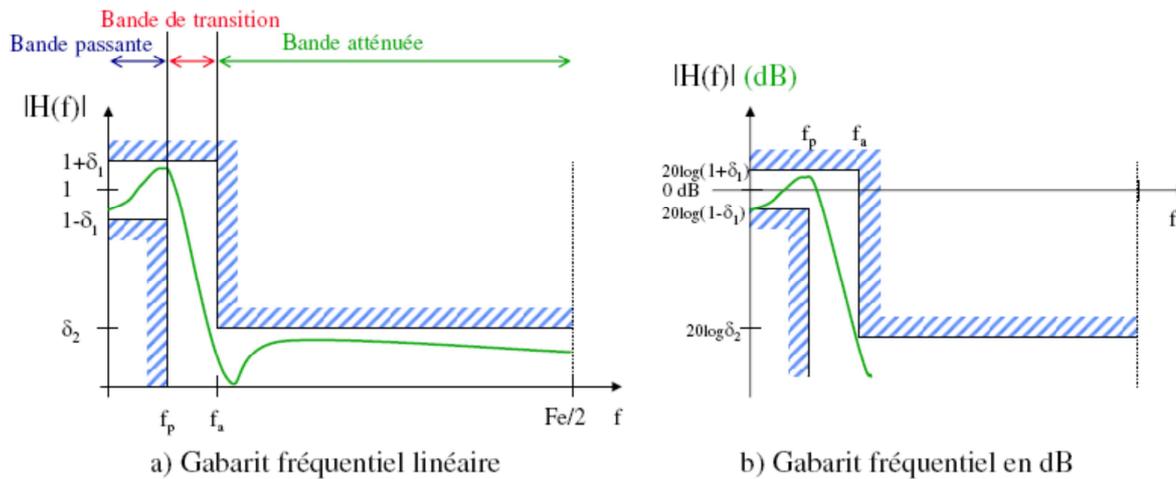


Les filtres idéaux présentent un déphasage linéaire et ne sont pas physiquement réalisables, car les réponses fréquentielles idéales correspondent à une réponse temporelle non-causale. En considérant le filtre passe-bas $H(f) = \Pi(f) e^{-2\pi j f T}$, on obtiendra un sinc décalé en T .



Les fonctions modèles utilisées pour la synthèse des filtres sont soit la réponse impulsionnelle soit la réponse en fréquence de filtres analogiques connus. En général, on privilégie la réponse en fréquence plutôt que la réponse impulsionnelle.

Les spécifications du filtre sont généralement définies par un gabarit fréquentiel linéaire ou en dB (décibels). Ce gabarit indique la largeur de la bande de transition, le maximum d'ondulation de la bande passante et de la bande atténuée, éventuellement l'ordre maximal permis, la fréquence d'échantillonnage.



Gabarit réel :

- la bande passante BP de 0 jusqu'à f_p
- la bande atténuée (ou coupée) f_a jusqu'à $f_c/2$
- la largeur $\Delta f = f_a - f_p$ de la zone de transition $\Rightarrow f_c = f_a + \Delta f / 2 = (f_a + f_p) / 2$
- l'amplitude des oscillations en bande passante δ_1
- l'amplitude des ondulations en bande atténuée δ_2

- l'ondulation permise en bande passante en décibels: A_p (dB),
 A_p (dB) = $20 \log(1 + \delta_p)$ d'où $\delta_p = 10^{0.05 A_p} - 1$
- l'ondulation permise en bande atténuée en décibels : A_a (dB),
 A_a (dB) = $-20 \log \delta_a$ d'où $\delta_a = 10^{-0.05 A_a}$

En pratique, plus les fréquences f_a et f_p sont proches, plus l'ordre du filtre devra être élevé. Pour un filtre idéal, ces valeurs seraient confondues.

2. Etude et synthèse des filtres RIF

La sortie est une combinaison linéaire d'un ensemble fini d'éléments d'entrées :

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) \quad \text{d'où} \quad h(n) = \sum_{i=0}^N b_i \delta(n-i) \quad H(z) = \sum_{n=0}^N b_n \cdot z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_{n=0}^N b_n \cdot e^{-2\pi j f n}$$

Ainsi, les coefficients de pondération ne sont rien d'autre que les valeurs de la réponse impulsionnelle du filtre.

$$H(z) = \sum_{n=0}^N b_n \cdot z^{-n} \Rightarrow H(f) = \sum_{n=0}^N b_n \cdot e^{-2\pi j f n}$$

Un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie ou filtre RIF possède une fonction de transfert polynomiale. Il ne peut pas être obtenu par transposition d'un filtre continu. Par rapport aux filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII), ils présentent l'inconvénient de nécessiter un grand nombre de coefficients pour obtenir les mêmes caractéristiques fréquentielles. Ceci est dû au fait que leur fonction de transfert ne possède pas de pôles. Cette absence de pôles permet cependant d'obtenir des filtres inconditionnellement stables.

Les deux méthodes les plus utilisées pour l'approximation des filtres numériques RIF sont :

- o Développement par série de Fourier : cette série est ensuite tronquée par des fonctions fenêtres pour limiter la réponse impulsionnelle. Les coefficients de Fourier coïncident avec les échantillons de la réponse impulsionnelle du Filtre.

- o Echantillonnage de la réponse fréquentielle : Cette méthode fait appel à la TFD. Celle-ci est appliquée aux coefficients recherchés b_i pour obtenir une suite fréquentielle qui corresponde à la réponse fréquentielle du filtre.

Il existe d'autres méthodes telles les méthodes d'optimisation qui se concentrent sur la minimisation d'un critère d'erreur entre la courbe réelle et le filtre idéal. La plus utilisée est la méthode de Parks and McClellan, qui reformule le problème de synthèse de filtre sous la forme d'une approximation polynômiale.

3. Méthode de la fenêtre

Cette technique consiste, connaissant l'expression analytique $H(f)$ de la réponse fréquentielle continue à approcher, à déterminer par utilisation de la transformée de Fourier inverse, la réponse impulsionnelle.

1. à partir du gabarit idéal du filtre, on détermine les coefficients du filtre en limitant le calcul à N valeurs réparties symétriquement autour de $n=0$. Puis, on calcule de la TFD inverse du filtre idéal :

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} H(f) e^{2\pi j f n T_e} df & N \text{ impair} \\ \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} H(f) e^{-j\pi f T_e} e^{2\pi j f n T_e} df & N \text{ pair} \end{cases}$$

2. On limite la réponse impulsionnelle à N échantillons (troncature) suivie d'une pondération de la réponse impulsionnelle idéale $h(n)$ par une suite discrète $w(n)$ appelée fenêtre de pondération pour atténuer les ondulations en bande coupée: $h_N(n) = h(n) \cdot w(n)$.

3. On décale la réponse impulsionnelle $h_N(n)$ pour avoir une solution causale.

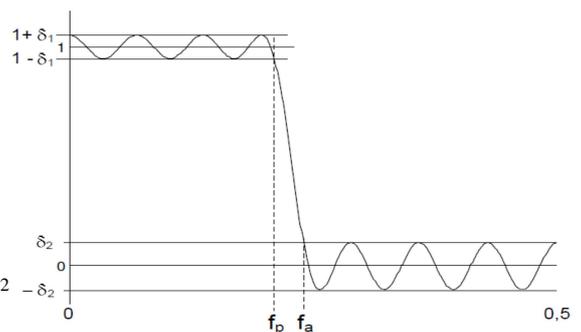
Exemple :

- Calcul de la réponse impulsionnelle idéale (cas N impair)

$$h(n) = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} H(f) e^{2\pi j f n T_e} df$$

On pose $f_c = (f_p + f_a) / 2 \Rightarrow h(n) = \frac{1}{f_e} \int_{-f_c/2}^{f_c/2} e^{2\pi j f n T_e} df = \frac{1}{2\pi j n f_e T_e} e^{2\pi j f n T_e} \Big|_{-f_c/2}^{f_c/2}$

$$\Rightarrow h(n) = \frac{e^{2\pi j f_c n T_e} - e^{-2\pi j f_c n T_e}}{2\pi j n} = \frac{\sin(2\pi f_c n T_e)}{\pi n} = \frac{\sin(\pi n f_c / (f_e / 2))}{\pi n}$$



On normalise les fréquences par rapport à $f_e/2$ c.a.d que l'on remplace partout f_c par $f_c / (f_e/2)$, on obtient alors :

$$h(n) = \frac{\sin(\pi n f_c / (f_e / 2))}{\pi n} \frac{f_c / (f_e / 2)}{f_c / (f_e / 2)} = f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$$

Réponse impulsionnelle h(n)

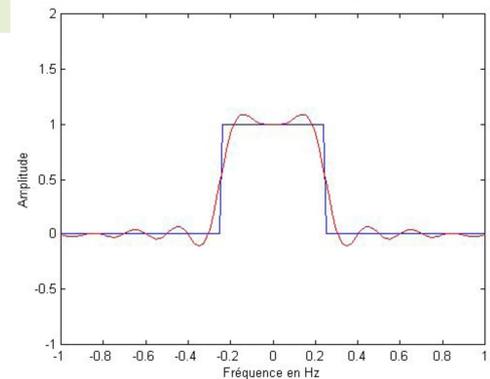
Type de filtre	$h(n)$ pour $n \neq 0$	$h(n)$ $n=0$
Passe-bas	$f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$	f_c
Passe-haut	$-f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c}$	$1-f_c$
Passe-bande	$f_{c2} \frac{\sin(\pi n f_{c2})}{\pi n f_{c2}} - f_{c1} \frac{\sin(\pi n f_{c1})}{\pi n f_{c1}}$	$f_{c2} - f_{c1}$
Rejécteur de bande	$f_{c1} \frac{\sin(\pi n f_{c1})}{\pi n f_{c1}} - f_{c2} \frac{\sin(\pi n f_{c2})}{\pi n f_{c2}}$	$1 - (f_{c2} - f_{c1})$

- Limitation du nombre d'échantillons à N

$$h_N(n) = h(n) \cdot w(n)$$

$$si \ w(n) = \begin{cases} 1 & si \ |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} \Rightarrow W(f) = \frac{\sin(N\pi f)}{\pi f}$$

$$H_N(f) = H(f) * W(f)$$



- La largeur de la bande de transition décroît si N augmente et les oscillations les plus fortes tendent à se concentrer aux discontinuités. Elles ne diminuent pas si N augmente : on a toujours un dépassement à peu près égal à 9%. C'est le phénomène de Gibbs.

- La pondération temporelle introduit des ondulations et limite la raideur de coupure du filtre. Un compromis est à faire entre la raideur et l'amplitude des ondulations.

- Cette méthode donne des ondulations de même amplitude dans la bande passante et dans la bande atténuée. Pour diminuer les oscillations : on utilise une autre fenêtre qui permet d'obtenir de forte atténuation des oscillations mais une largeur de la bande de transition plus grande.

- On choisira en fonction de l'atténuation δ_1 le type de fenêtre à utiliser, et on choisit en fonction de la largeur de la zone de transition Δf et du type de la fenêtre $w(n)$ la longueur de la réponse impulsionnelle N.

Fenêtres	Largeur de Transition : $\Delta f (2\Delta f / f_e)$	Atténuation en bande atténuée A
$w_{Rect}(n) = \begin{cases} 1 & pour \ n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$	$1.8/N$	21
$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) & pour \ n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$	$6.2/N$	44

$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	6.6/N	53
$w_{Black}(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	11/N	74

4. Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

La méthode de synthèse par échantillonnage en fréquence est appliquée depuis la réponse fréquentielle d'un filtre continu idéal H(f) dont on ne connaît pas la formule mathématique (on ne peut alors calculer h(n) par TF inverse de H(f)). On utilise alors la transformation de Fourier Discrète inverse. C'est-à-dire que l'on "échantillonne" la réponse désirée dans le domaine fréquentiel, on obtient N points de cette réponse fréquentielle auxquels on fait correspondre N points de la réponse temporelle équivalente obtenus par TFD inverse (ou FFT inverse):

- Echantillonnage fréquentiel

$$H(k) = H(f) \Big|_{f=k/N} \quad k = -N/2 \text{ à } N/2 - 1$$

- TFD inverse
$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} H(k) e^{2\pi j k n / N}$$

Cette méthode de synthèse est très simple et permet de réaliser toute forme de filtre mais cette méthode de synthèse ne garantit que les points fréquentiels H(k). Entre ces points, la valeur de H(f) n'est pas maîtrisée. Les oscillations ne sont pas également réparties et le maximum d'erreur entre la réponse idéale et la réponse obtenue se situe « autour » la bande de transition.

Sachant que H(k)*=H(-k) pour un signal h(n) réel, on peut, de manière générale, démontrer que

$$h(n) = \frac{1}{N} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^{N/2} H(k) \cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) \right) \quad \text{pour } -N/2 \leq n \leq N/2$$

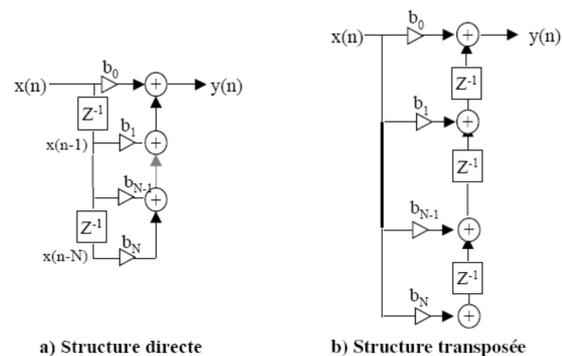
Remarque : Pour le choix de N, il faut veiller à ce que f_e/N soit inférieur à Δf .

Par ailleurs, on peut quelques peu atténuer les ondulations en adoucissant les transitions dans la transmittance du filtre. Pour cela, on introduira 0.5 entre 1 et 0

Réalisation du filtre RIF

La structure canonique directe (transversale ou non récursive) est :

Un filtre RIF nécessite (N-1) opérations de multiplication, N opération d'addition pour chaque nouvel échantillon à filtrer.



IV. Synthèse des filtres RII

Parmi les principaux mérites des filtres récursifs, on peut citer : la possibilité d'obtenir une bande de transition étroite pour un ordre raisonnable ; et parmi les défauts : les risques d'instabilité dus à une grande sensibilité numérique des coefficients, une variation de phase fortement non linéaire.

La sortie est une combinaison linéaire d'un ensemble fini d'éléments d'entrées et de sortie:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i) \quad \text{d'où} \quad H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i \cdot z^{-i}}$$

1. Méthode des pôles et des zéros

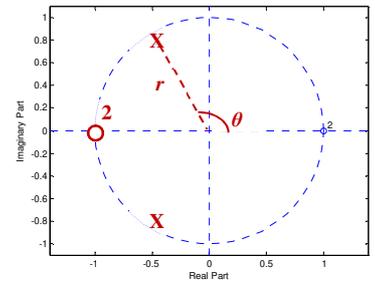
C'est la méthode directe qui consiste à placer des pôles et des zéros aux fréquences utiles

Il existe une relation "empirique" entre la largeur de la zone de transition Δf à 3 db et la position des pôles sur un rayon supérieure à 0.9: $r \approx 1 - \frac{\Delta f_{3db}}{f_e} \pi$

- Pour un filtre passe-bas de second ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z+1)(z+1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}$$

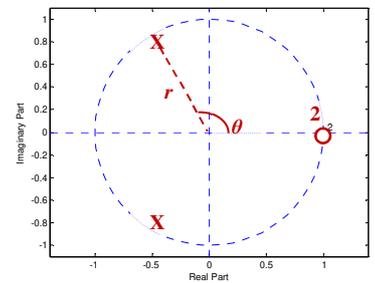
avec $K = \frac{1+r^2 - 2r \cos \theta}{4}$ $\theta = (f_c / f_e) \times 360^\circ$ et $r = 1 - \frac{\Delta f_{3db}}{f_e} \pi$



- Pour un filtre passe-haut de second ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z-1)(z-1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2 - 2z + 1)}{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}$$

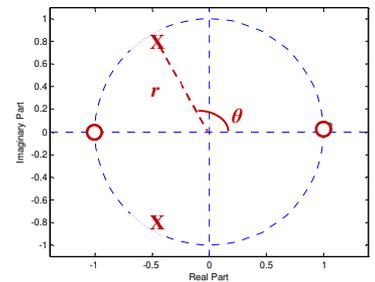
avec $K = \frac{1+r^2 + 2r \cos \theta}{4}$



- Pour un filtre passe-bande de second ordre, nous avons :

$$H(z) = \frac{K(z-1)(z+1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2 - 1)}{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}$$

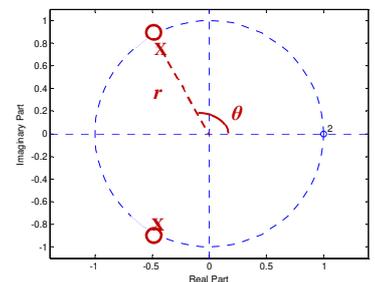
avec $K = \frac{|e^{2j\theta} - 2r \cos \theta e^{j\theta} + r^2|}{|e^{2j\theta} - 1|}$



- Pour un filtre coupe-bande de second ordre, nous avons :

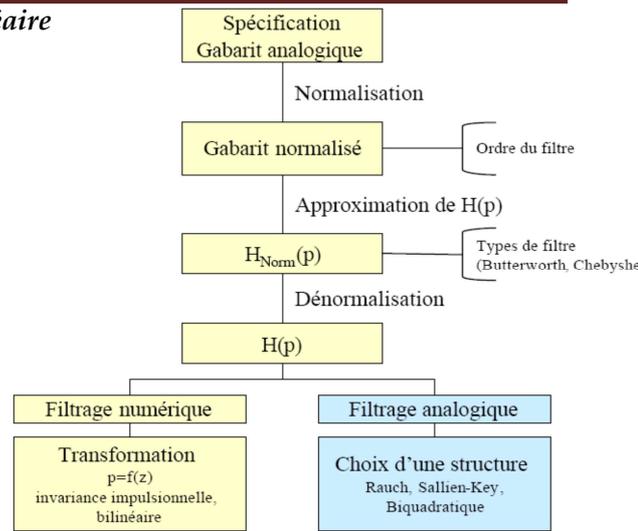
$$H(z) = \frac{K(z-e^{-j\theta})(z-e^{j\theta})}{(z-re^{-j\theta'})(z-re^{j\theta'})} = \frac{K(z^2 - 2 \cos \theta z + 1)}{z^2 - 2zr \cos \theta' + r^2}$$

avec $K = \frac{1+r^2 - 2r \cos \theta'}{2 - 2 \cos \theta}$



2. Méthodes de l'invariance impulsionnelle et transformation bilinéaire

La méthode la plus courante (indirecte) est l'utilisation des méthodes de synthèse des filtres analogiques aboutissant à une fonction $H(p)$ correspondant aux spécifications. Une fonction permettant le passage du plan p dans le plan z (i.e. $p = f(z)$) est ensuite utilisée pour obtenir $H(z)$. Cette fonction doit maintenir la stabilité du filtre analogique et maintenir, au mieux, les caractéristiques de la réponse fréquentielle $H(f)$ du filtre numérique.

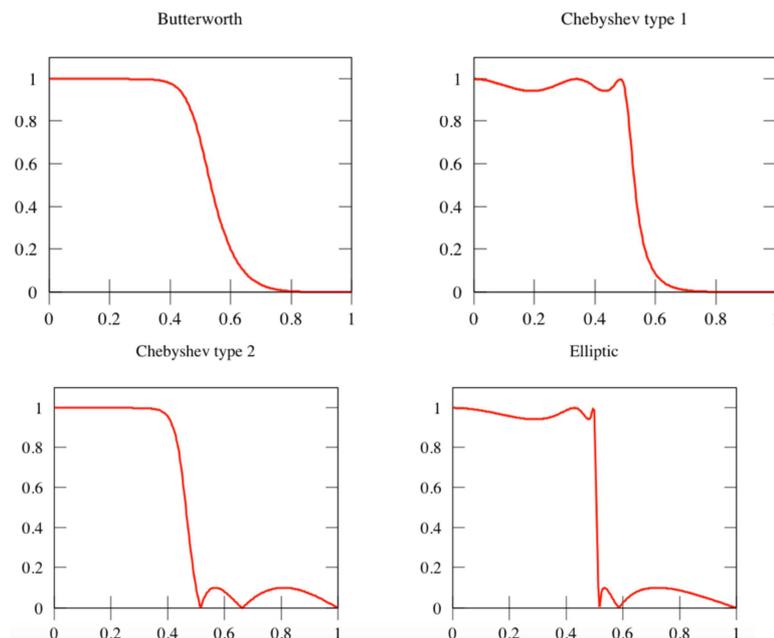


Il existe de nombreuses méthodes permettant de synthétiser un filtre numérique récursif à partir d'un filtre analogique pris comme modèle :

- le filtre doit avoir une réponse impulsionnelle ou indicielle imposée : ce sont les méthodes de l'invariance impulsionnelle et de l'invariance indicielle.
- le filtre doit avoir une réponse fréquentielle entrant dans un gabarit donné : c'est la transformation bilinéaire.

Pour synthétiser des filtres analogiques répondant à un gabarit donné, on choisira parmi un ensemble de filtres analogiques testés et éprouvés :

- Filtres de Butterworth : Coupure peu raide mais gain constant en bande passante
- Filtres de Tchebychev (Chebyshev) : Raideur de coupure importante mais ondulations dans la bande passante (Chebyshev 1) ou atténuée (Chebyshev 2) et simple à mettre en oeuvre
- Filtres de Cauer (dit aussi elliptiques) : Coupure extrêmement raide mais ondulations dans la bande passante et atténuée mais circuits plus complexes à réaliser.
- Filtres de Bessel : Retard de groupe constant mais mauvaise sélectivité même pour ordre élevé.



$$N_{Butterwrth} \geq \frac{\log\left(\frac{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}{10^{\frac{A_a}{10}} - 1}\right)}{2 \log(\omega_p / \omega_a)} = \frac{\log\left(\left(\frac{1}{\delta_1^2} - 1\right) / \left(\frac{1}{\delta_2^2} - 1\right)\right)}{2 \log(\omega_p / \omega_a)}$$

$$N_{Tchebychev} \geq \frac{\log\left(2.10^{\frac{A_a}{10}} / \sqrt{\left(10^{\frac{2A_a}{10}} - 1\right)}\right)}{\log\left(\omega_a / \omega_p + \sqrt{\left(\omega_a / \omega_p\right)^2 - 1}\right)}$$

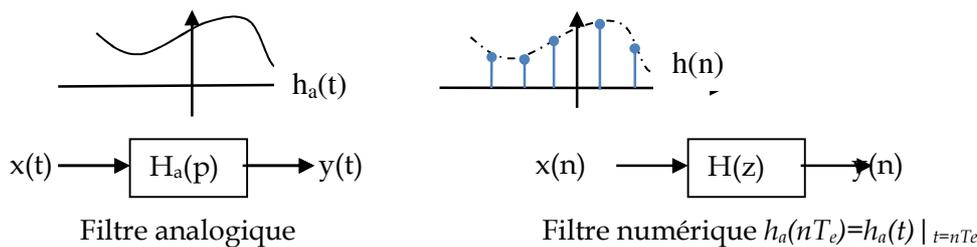
Les fonctions de transfert $H_N(p)$ des filtres analogiques polynômiaux (Butterworth, Tchebychev, Bessel, Caer) sont données pour des fréquences de coupure normalisées et uniquement pour des filtres passe-bas.

Passe-bas	$p = p / \omega_A$	Passe-bande	$p = \frac{1}{B} \left(\frac{p}{\omega_A} + \frac{\omega_A}{p} \right)$	Pulsation centrale $\omega_A = \sqrt{\omega_{A1} \omega_{A2}}$
Passe-haut	$p = \omega_A / p$	Coupe-bande	$p = \left[\frac{1}{B} \left(\frac{p}{\omega_A} + \frac{\omega_A}{p} \right) \right]^{-1}$	Largeur de Bande $B = (\omega_{A2} - \omega_{A1})$

A partir de l'expression de $H_N(p)$ normalisée, on dénormalise en remplaçant p par les valeurs données au tableau précédent permettant d'aboutir à une fonction de transfert dénormalisée $H(p)$.

2.1. Méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle

La méthode de l'invariance impulsionnelle consiste à effectuer la synthèse d'un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle $h(n)$ est l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre analogique équivalent :



Pour obtenir $h(n)$, on peut opérer de 2 manières:

$$H_a(p) \xrightarrow{L^{-1}} h_a(t) \xrightarrow{t=nT_e} h(n) = T_e h_a(nT_e) \xrightarrow{TZ} H(z) \text{ ou } H(z) = T_e \sum_{\text{pôles } p_i \text{ de } H_a(p)} \text{Résidus} \left(\frac{H_a(p)}{1 - z^{-1} e^{pT_e}} \right) \Bigg|_{p=p_i}$$

Pour éviter de décomposer en éléments simple, on peut calculer $H(z)$ en utilisant les relations entre transformées de Laplace et en z pour les systèmes du premier et du second ordre.

$H(p)$	$T_e H(z)$
$\frac{1}{p+a}$	$T_e \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$T_e \frac{1 - e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)}{1 - 2e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2aT_e} z^{-2}}$
$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$T_e \frac{e^{-aT_e} z^{-1} \sin(\omega_0 T_e)}{1 - 2e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2aT_e} z^{-2}}$

La réponse du filtre numérique sera proche de celle du filtre analogique dans la bande $[-f_c/2, f_c/2]$ si le filtre analogique a une réponse fréquentielle nulle en dehors de cette bande. Cette méthode est utile seulement dans le cas de filtres analogiques à bande limitée.

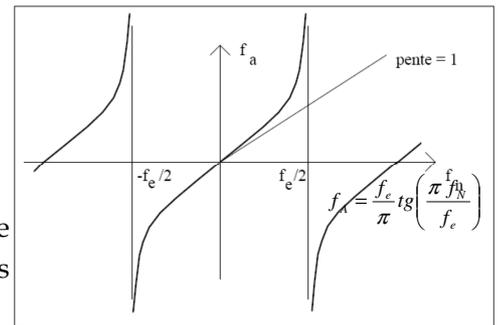
2.2. Méthode de la transformation bilinéaire

Cette méthode a pour objectif de faire coïncider au mieux les domaines analogique et numérique. Les filtres qui en sont dérivés sont plus stables que sont obtenus à travers l'emploi de la méthode de la variance impulsionnelle. Mais, en contrepartie, elle introduit une distorsion sur l'axe des fréquences.

On sait qu'un filtre analogique est caractérisé par sa fonction de transfert $H(p)$ et un filtre numérique est défini par sa fonction de transfert $H(z)$ avec $z = e^{2\pi j f T_e} = e^{p T_e}$. Ce qui implique que $p = \text{Ln}(z)/T_e$. Pour conserver le caractère polynomial des fonctions de transfert, une approximation de $\text{Ln}(z)$ par les séries de Laurent est employée. En ne conservant que le termes du premier ordre, on définit la transformation bilinéaire :

$$p = \frac{\text{Ln}(z)}{T_e} \approx \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T_e} \frac{z - 1}{z + 1}$$

$$\omega_A = \frac{2}{T_e} \text{tg} \left(\frac{\omega_N T_e}{2} \right) = \frac{2}{T_e} \text{tg} \left(\frac{\pi f_N}{f_e} \right)$$



Il n'y a pas égalité entre pulsation analogique et pulsation discrète et que la relation les liant n'est pas non plus linéaire puisqu'il y a distorsion des fréquences, y compris du retard de groupe.

Pour faire la synthèse d'un filtre numérique par la transformation bilinéaire, on procède comme suit :

- On définit les caractéristiques souhaitées du filtre numérique (fréquence d'échantillonnage, de coupure, etc.)
- On calcule les pulsations analogiques ω_A correspondant aux pulsations numériques $\omega_A = \frac{2}{T_e} \text{tg} \left(\frac{\pi f_N}{f_e} \right)$
- On détermine le gabarit du filtre analogique $H_N(p)$ normalisée d'ordre n (Chebyshev, Butterworth, etc.) qui servira de modèle au filtre numérique et on écrit la fonction de transfert dénormalisée $H(p)$ de ce filtre analogique (qu'il faut recalculer en fonction de ω_A).
- On applique la transformation bilinéaire à $H(p)$ en remplaçant $p = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$, ce qui donne la fonction $H(z)$.

Cette méthode donne d'assez bons résultats à condition que les fréquences caractéristiques ne soient pas trop proches de la demi-fréquence d'échantillonnage.