II. Analyse des Filtres Numériques par la TZ (Transformée en Z)

I. Introduction

- La transformée en Z généralise la TF et permet de dépasser ces limites.
- Analogue à la transformée de Laplace, mais plus facile à utiliser.
- Elle permet de décrire aisément les signaux à temps discret et la réponse des systèmes linéaires invariants soumis à des entrées diverses.
- C'est un outil qui permet de calculer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant décrit par une équation aux différences finies.
- Elle permet l'interprétation directe des caractéristiques des signaux et des filtres dans le domaine des fréquences

II. Transformée en Z

- Soit un signal discret x(n). Sa TZ est définie par: $$\boxed{X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}}$$

où z est une variable complexe définie partout où cette série converge.

Une région de convergence correspond à l'ensemble des valeurs de z telles que X(z) soit définie et à valeurs finies.

Exemples

1. $x(n) = \delta(n) \Rightarrow X(z) = 1$ RDC=₵
2. $x(n) = \delta(n-k) \Rightarrow X(z) = z^{-k}$ si k>0 RDC=₵-{0} si k<0 RDC=₵-{∞}
3. $x(n)=(\underline{1},2,3,5,0,2) \Rightarrow x(n)=\delta(n)+2.\ \delta(n-1)+3.\ \delta(n-2)+5.\ \delta(n-3)+ 2.\ \delta(n-5)$

$$\Rightarrow \quad X(z)=1+2z^{-1}+3z^{-2}+5z^{-3}+2z^{-5}$$

II. Transformée en Z

- Soit un signal discret x(n). Sa TZ est définie par: $$\boxed{X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}}$$

où z est une variable complexe définie partout où cette série converge.

Une région de convergence correspond à l'ensemble des valeurs de z telles que X(z) soit définie et à valeurs finies.

Exemples

$$U(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}=\lim_{N\to\infty}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \left|z^{-1}\right|<1 \Leftrightarrow |z|>1 \quad \Rightarrow \quad U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

II. Transformée en Z

- Condition d'existence de la TZ

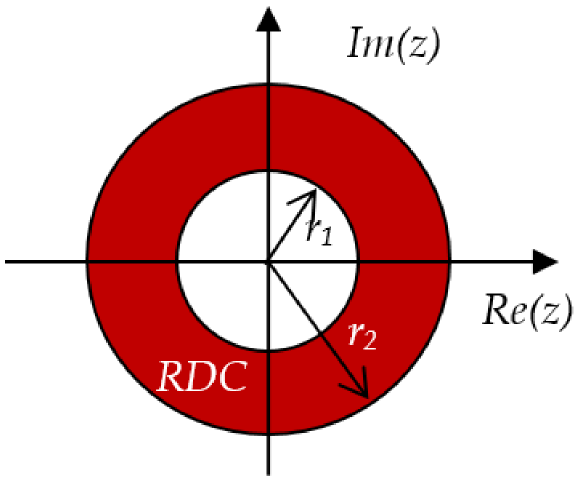
La transformée existe si la série converge. Pour cela, on utilise le critère de Cauchy $\lim_{n\to\infty} |U_n|^{1/n} < 1$ sur la convergence des séries géométriques $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$

De façon générale, la RDC est un anneau de convergence centré sur l'origine défini par :

$$r_1 < |z| < r_2$$

$$r_1 = \lim_{n\to+\infty} |x(n)|^{1/n} \qquad r_2 = \lim_{n\to+\infty} |x(-n)|^{-1/n}$$

- x(n)=0 pour n<$n_0 \Rightarrow r_2 = +\infty$
- x(n)=0 pour n>$n_0 \Rightarrow r_1 = 0$



II. Transformée en Z

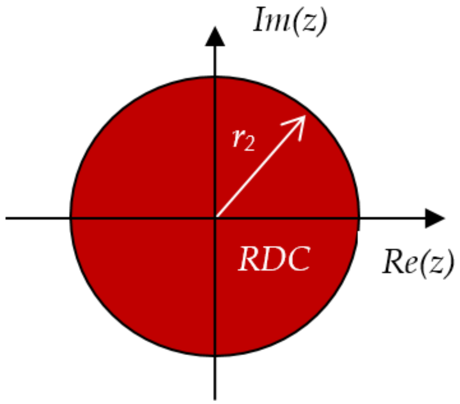
- Condition d'existence de la TZ

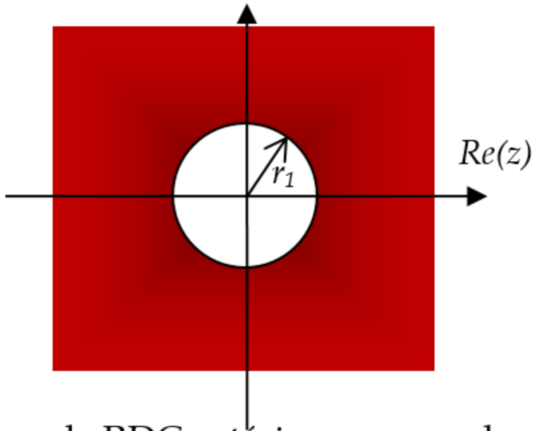
La transformée existe si la série converge. Pour cela, on utilise le critère de Cauchy $\lim_{n \to \infty} |U_n|^{1/n} < 1$ sur la convergence des séries géométriques $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$

De façon générale, la RDC est un anneau de convergence centré sur l'origine défini par :

$$r_1 < |z| < r_2$$

$$r_1 = \lim_{n \to +\infty} |x(n)|^{1/n} \qquad r_2 = \lim_{n \to +\infty} |x(-n)|^{-1/n}$$





- x(n)=0 pour n<$n_0 \Rightarrow r_2 = +\infty$
- x(n)=0 pour n>$n_0 \Rightarrow r_1 = 0$

$\Rightarrow$ système anti-causal : RDC cercle   système causal : RDC extérieure au cercle.

II. Transformée en Z

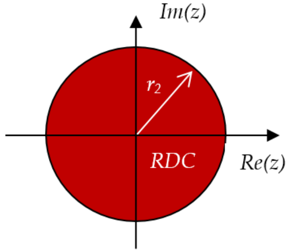
Exemples

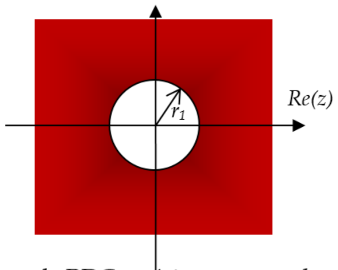
$$x(n) = \begin{cases} a^n \ si \ n \geq 0 \\ 0 \ si \ non \end{cases} \qquad X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > a$$

$$y(n) = \begin{cases} 0 \ si \ n \geq 0 \\ -b^n \ si \ n < 0 \end{cases} \qquad Y(z) = \sum_{n<0}^{-\infty} -b^n z^{-n} = \frac{z}{z-b} \qquad |z| < b$$

$$w(z) = \begin{cases} a^n \ si \ n \geq 0 \\ b^n \ si \ n < 0 \end{cases} \qquad W(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-b} \qquad b > |z| > a$$

Remarque : La TZ de a^n pour n $\in$]-∞, +∞[n'existe pas.





⇒ système anti-causal : RDC cercle   système causal : RDC extérieure au cercle.

III. Propriétés de la TZ

Si on définit $x(n) \xrightarrow{TZ} X(z)$ $x_1(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z)$ $x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_2(z)$

- Linéarité $a.x_1(n) + b.x_2(n) \xrightarrow{TZ} a.X_1(z) + b.X_2(z)$ RDC intersection des deux RDC
- Théorème du Retard $x(n-k) \xrightarrow{TZ} z^{-k}.X(z)$
- Théorème de l'avance $x(n+k) \xrightarrow{TZ} z^{k}.X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) z^{k-n}$
- Multiplication par a^n $a^n x(n) \xrightarrow{TZ} X\left(\frac{z}{a}\right)$ $a.r_1 < |z| < a.r_2$
- Retournement du temps $x(-n) \xrightarrow{TZ} X(z^{-1})$ $1/r_2 < |z| < 1/r_1$

III. Propriétés de la TZ

Si on définit $x(n) \xrightarrow{TZ} X(z)$ $x_1(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z)$ $x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_2(z)$

- Convolution $x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{TZ} X_1(z).X_2(z)$
- Théorème de dérivation $n.x(n) \xrightarrow{TZ} -z.\dfrac{dX(z)}{dz}$
- Théorème de la valeur initiale : si x(n)=0 pour n<0 alors $x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$
- Théorème de la valeur finale $\lim_{n \to +\infty} x(n) = \lim_{z \to 1}(z-1)X(z)$

III. Propriétés de la TZ

Quelques TZ

$x(n)$	$X(z)$	Région de convergence
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$U(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n U(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$n a^n U(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n U(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n T_e)U(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n T_e)U(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n T_e)U(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos(\omega_0 T_e)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n\sin(\omega_0 n T_e)U(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin(\omega_0 T_e)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

IV. TZ rationnelle (correspondant SLID)

Les systèmes linéaires invariants décrits par une équation aux différences finies possèdent une transformée en Z rationnelle (le rapport de deux polynômes en z^{-1})

$$\sum_{i=0}^{M} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} b_i x(n-i) \xrightarrow{TZ} \sum_{i=0}^{M} a_i .z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^{N} b_i .z^{-i} X(z)$$

On peut caractériser un système LI par h(n) ou par la transformée en Z (H(z)) de sa réponse impulsionnelle h(n), appelée fonction de transfert du système.

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i .z^{-i}}{\sum_{i=0}^{M} a_i .z^{-i}} = \frac{b_0}{a_0} z^{M-N} \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0}{a_0} z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^{N} (z - z_i)}{\prod_{i=1}^{M} (z - p_i)} = K\, z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^{N} (z - z_i)}{\prod_{i=1}^{M} (z - p_i)}$$

Les valeurs de z pour lesquelles H(z)=0 sont dits les zéros

Les valeurs de z pour lesquelles H(z) est infini (annule le dénominateur) sont dits les pôles

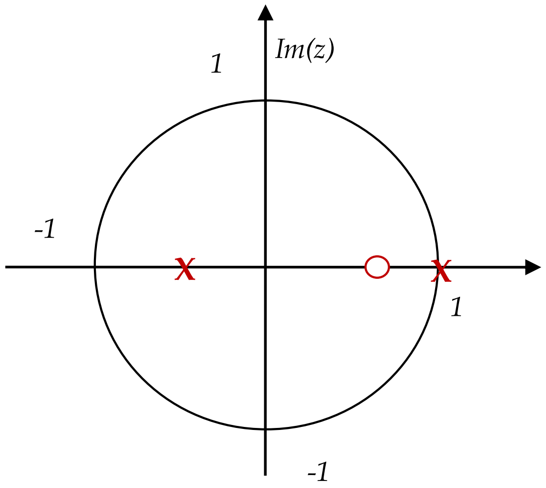
V. Représentation par les pôles et zéros

La position de ses pôles et de ses zéros (+le facteur d'amplitude $K=b_0/a_0$) va nous fournir une description complète de H(z) (par conséquent de h(n) et H(f)) donc du comportement du système.

H(z) peut donc être représentée sous la forme d'un cercle modélisant la position des pôles et des zéros dans le plan complexe.

Exemple

$$H(z) = \frac{3z-2}{(z-1)(z+0.5)}$$

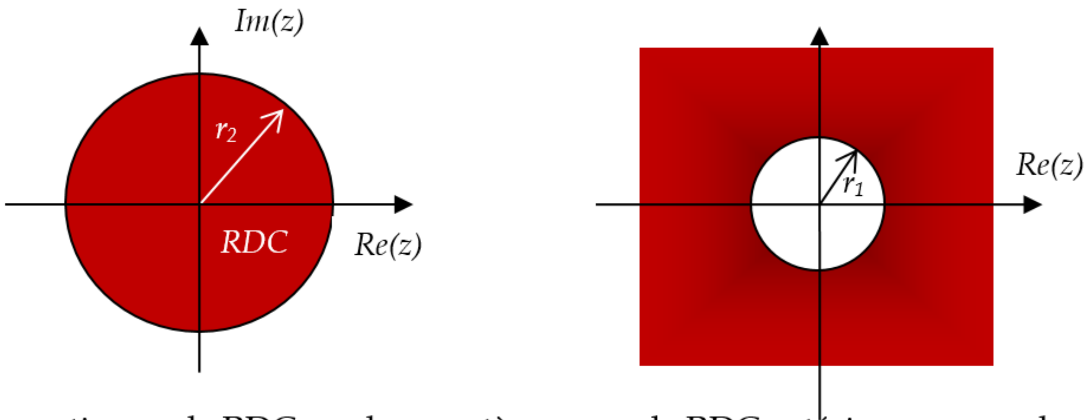


V. Représentation par les pôles et zéros

- ✓ Dans la plupart des systèmes, les ai et le bi sont réels $\Rightarrow$les pôles et les zéros sont soient réels soient des paires de complexes conjuguées.

- ✓ Le rayon d'un système causal se trouve à l'extérieur d'un cercle. Par ailleurs, s'il est stable $\sum_n |h(n)| < \infty$ puisque $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n).z^{-n}$

$\Rightarrow$ il suffit donc que z=1 fasse partie de la RDC



$\Rightarrow$ système anti-causal : RDC cercle système causal : RDC extérieure au cercle.

V. Représentation par les pôles et zéros

- ✓ Dans la plupart des systèmes, les ai et le bi sont réels $\Rightarrow$les pôles et les zéros sont soient réels soient des paires de complexes conjuguées.

- ✓ Le rayon d'un système causal se trouve à l'extérieur d'un cercle. Par ailleurs, s'il est stable $\sum_{n} |h(n)| < \infty$ puisque $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n).z^{-n}$

$\Rightarrow$ il suffit donc que z=1 fasse partie de la RDC

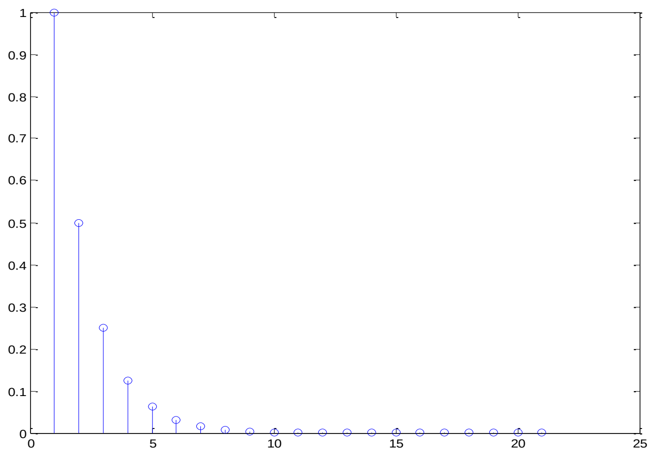
- ✓ Pour un système causal et stable, tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité (|pi|<1, $\forall$i). Le domaine de convergence ne peut contenir de pôles puisque la TZ ne converge pas aux pôles. S'il est anti-causal, il sera stable si les pôles sont à l'extérieur du cercle unité.
- ✓ Un filtre RIF $H(z) = \sum_{i=0}^{N} b_i .z^{-i}$ a tous ses pôles à l'origine et sera donc toujours stable.

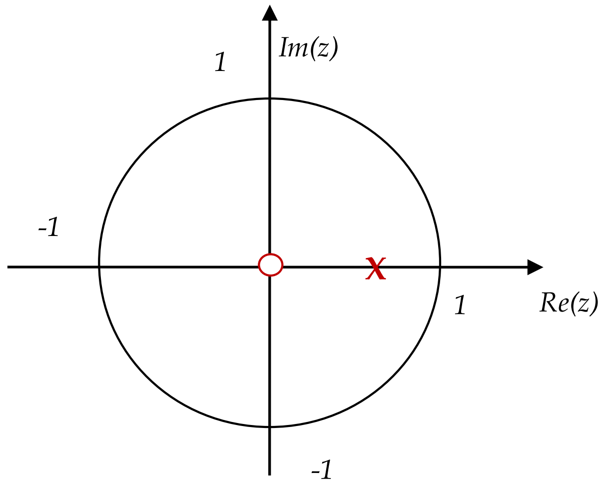
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse impulsionnelle à partir du tracé des pôles et zéros

$$h(n) = a^n\, U(n) \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-a}$$

- Pour 0 < a < 1



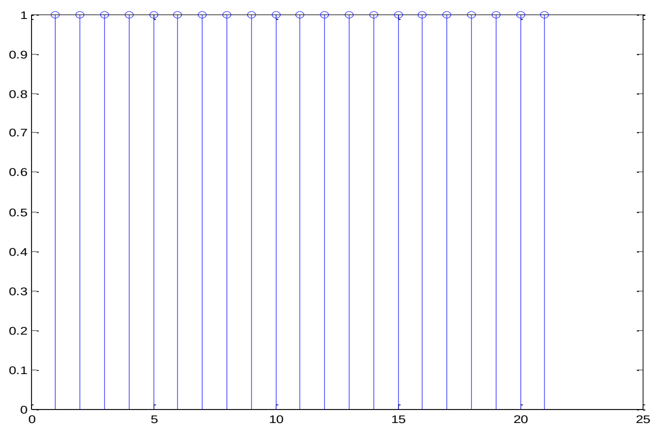


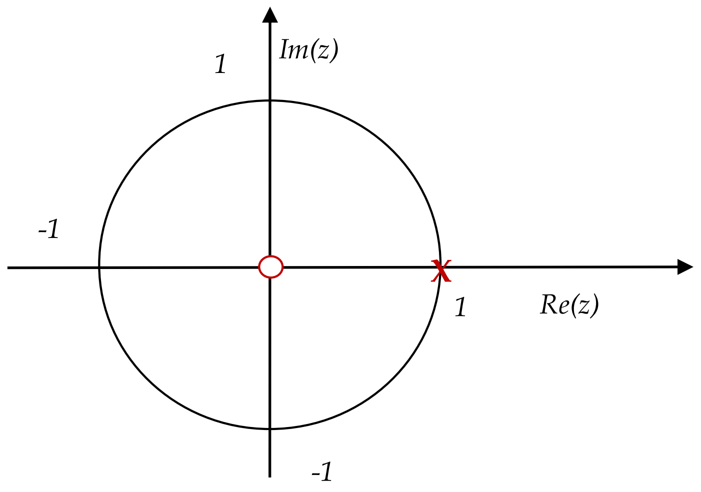
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse impulsionnelle à partir du tracé des pôles et zéros

$$h(n) = a^n\, U(n) \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-a}$$

- Pour a = 1



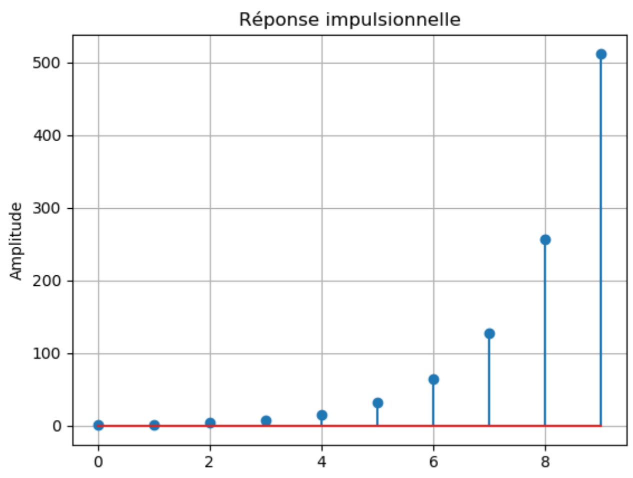


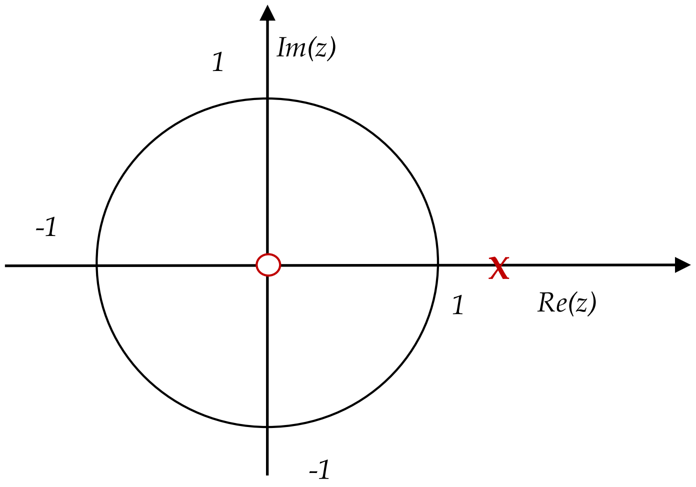
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse impulsionnelle à partir du tracé des pôles et zéros

$$h(n) = a^n\, U(n) \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-a}$$

- Pour a > 1



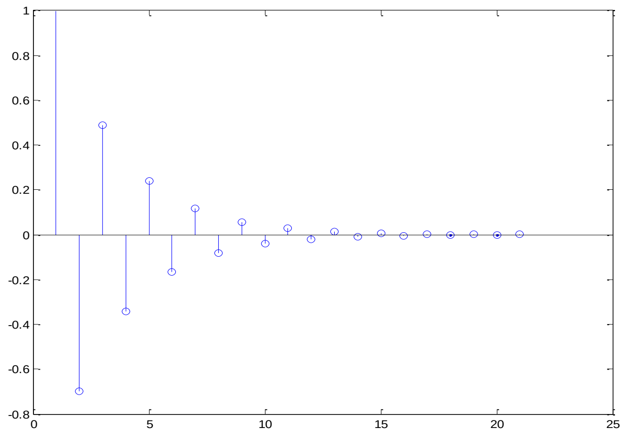


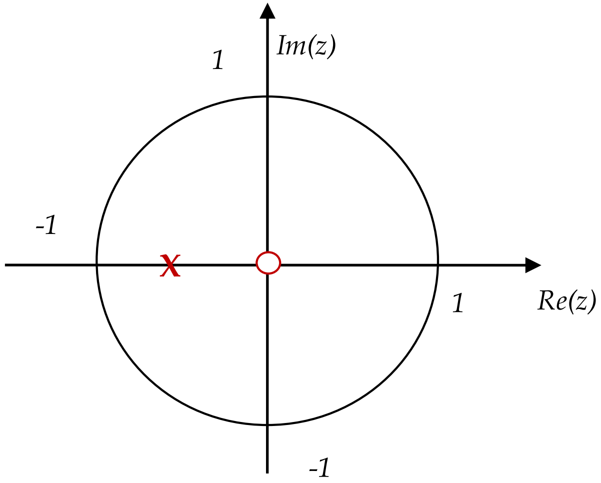
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse impulsionnelle à partir du tracé des pôles et zéros

$$h(n) = a^n\, U(n) \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-a}$$

- Pour -1 <a < 0



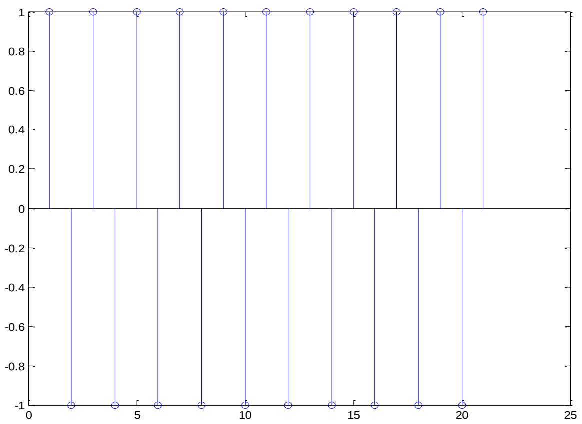


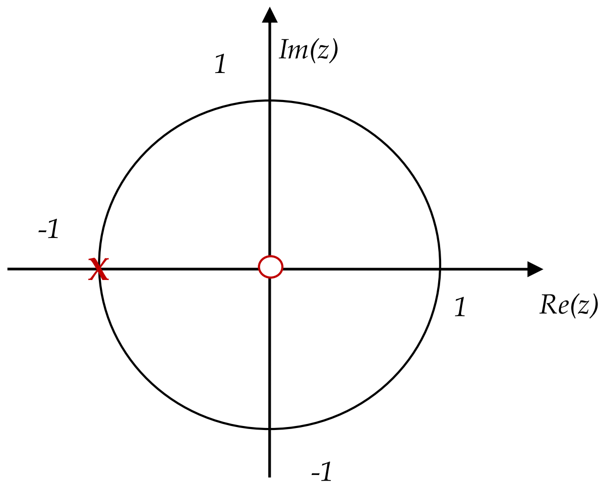
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse impulsionnelle à partir du tracé des pôles et zéros

$$h(n) = a^n\, U(n) \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-a}$$

- Pour a = - 1



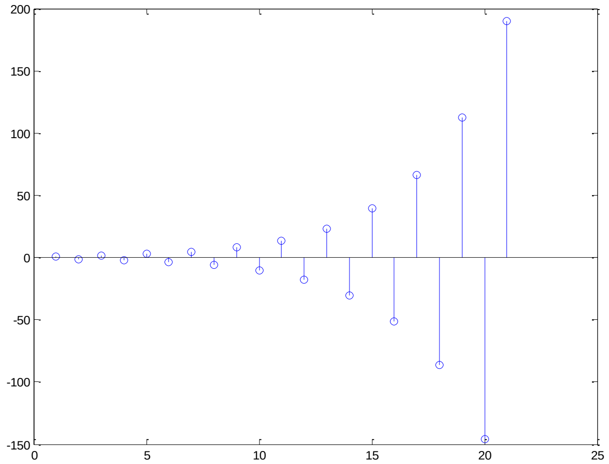


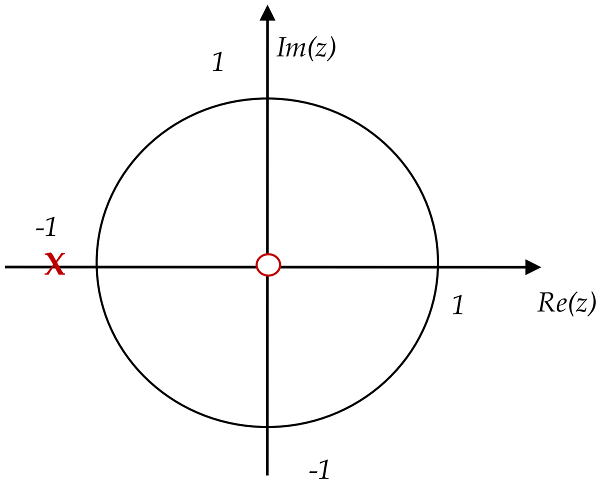
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse impulsionnelle à partir du tracé des pôles et zéros

$$h(n) = a^n\, U(n) \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-a}$$

- Pour a <- 1



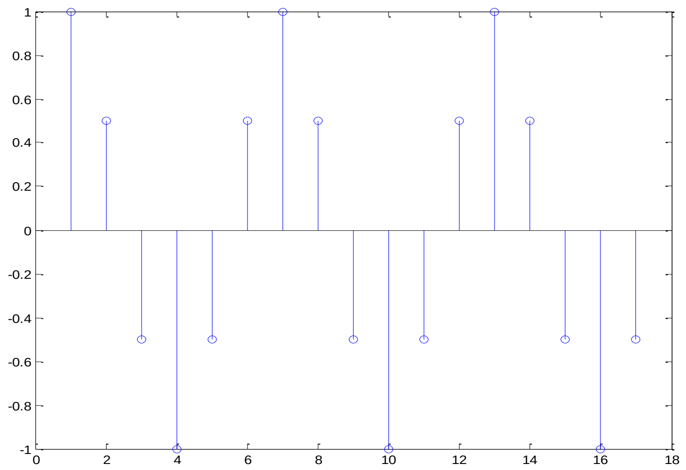


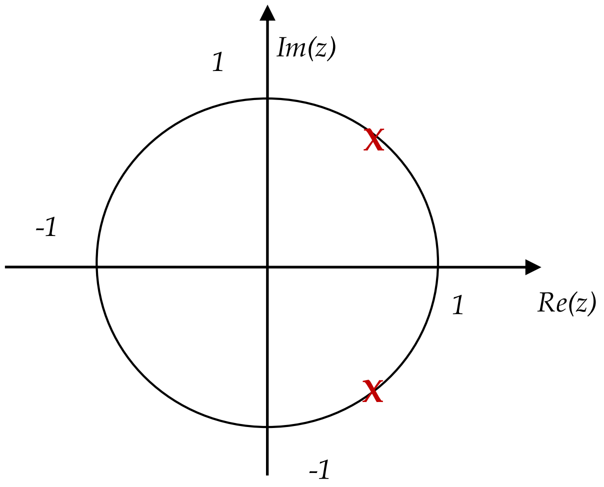
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse impulsionnelle à partir du tracé des pôles et zéros

$$h(n) = a^n \cos(2\pi f_0 n)\, U(n) \quad => \quad \mathrm{H(z)} = \frac{\dots\dots\dots..}{(z - ae^{2\pi j f_0 n})(z - ae^{-2\pi j f_0 n})}$$

- Pour a = 1



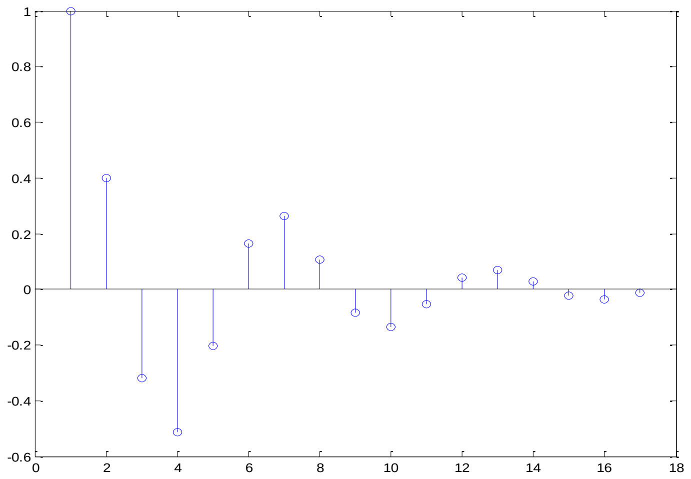


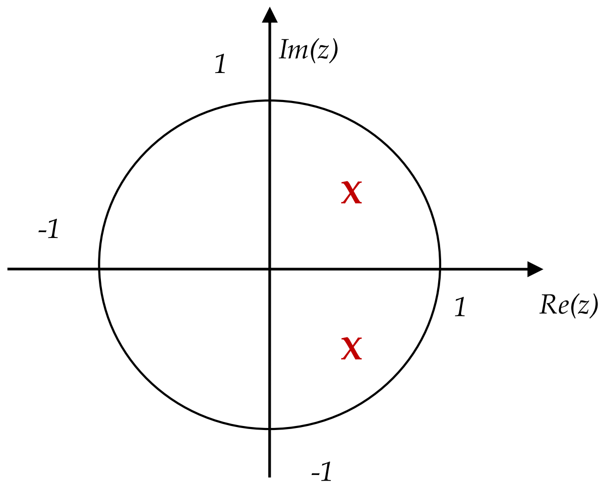
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse impulsionnelle à partir du tracé des pôles et zéros

$$h(n) = a^n \cos(2\pi f_0 n)\, U(n) \quad => \quad \mathrm{H(z)} = \frac{\dots\dots\dots..}{(z - ae^{2\pi j f_0 n})(z - ae^{-2\pi j f_0 n})}$$

- Pour 0 < a < 1



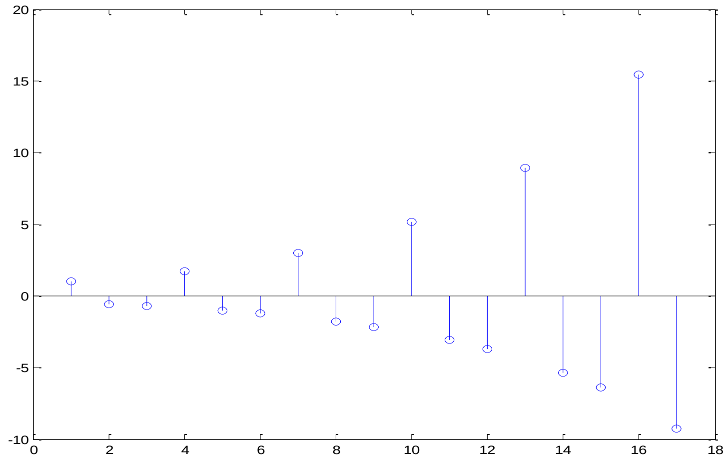


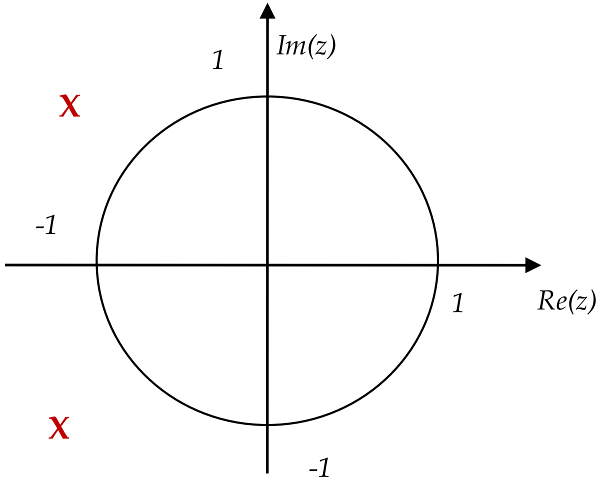
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse impulsionnelle à partir du tracé des pôles et zéros

$$h(n) = a^n \cos(2\pi f_0 n)\, U(n) \quad => \quad \mathrm{H(z)} = \frac{\dots\dots\dots..}{(z - ae^{2\pi j f_0 n})(z - ae^{-2\pi j f_0 n})}$$

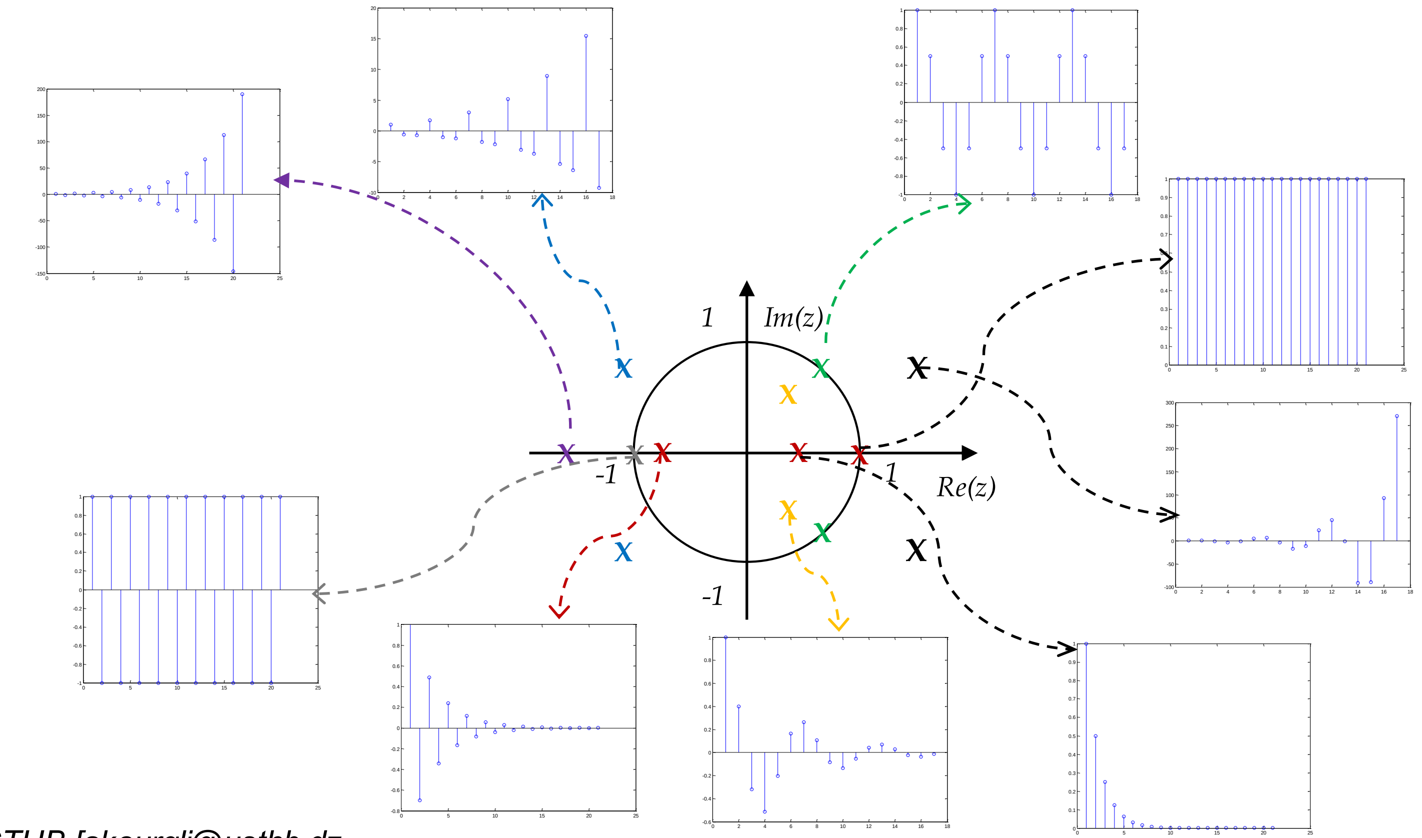
- Pour a < -1





V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse impulsionnelle à partir du tracé des pôles et zéros



V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse fréquentielle à partir du tracé des pôles et zéros

- Pour un SLID

$$H(z) = K\, z^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^{N} (z - z_i)}{\prod_{i=1}^{M} (z - p_i)}$$

- Passage de H(z) vers H(f)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n).z^{-n}$$

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(nT_e) e^{-2\pi\, j f\, nTe}$$

$$H(f) = H(z)\Big|_{z=e^{2\pi j f Te}}$$

V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse fréquentielle à partir du tracé des pôles et zéros

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(nT_e)e^{-2\pi jf\,nTe} = H(z)\Big|_{z=e^{2\pi jfTe}}$$

$$\Rightarrow \quad |z| = \left|e^{2\pi jfTe}\right| = \left|\cos(2\pi fTe) + j\sin(2\pi fTe)\right| = 1$$

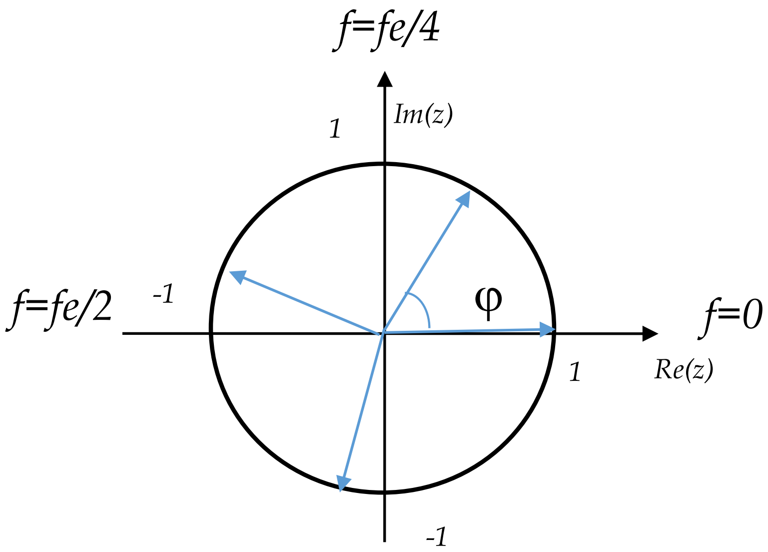
$$\Rightarrow \quad z = e^{2\pi jfTe} = e^{j\varphi} \text{ où } \varphi = 2\pi fTe$$

$$\rightarrow f = 0 \text{ où } \varphi = 2\pi 0Te = 0$$

$$\rightarrow f = fe/4 \text{ où } \varphi = 2\pi fe/4Te = \pi/2$$

$$\rightarrow f = fe/2 \text{ où } \varphi = 2\pi fe/4Te = \pi$$

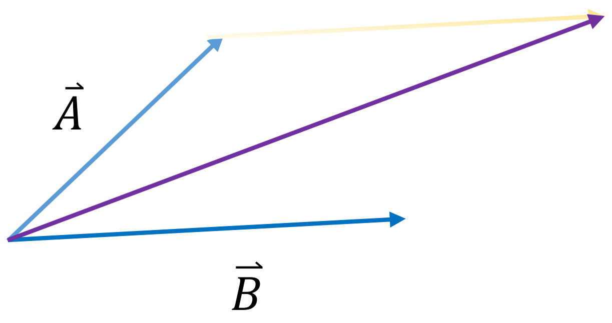
$$\rightarrow f = fe \text{ où } \varphi = 2\pi feTe = 2\pi$$



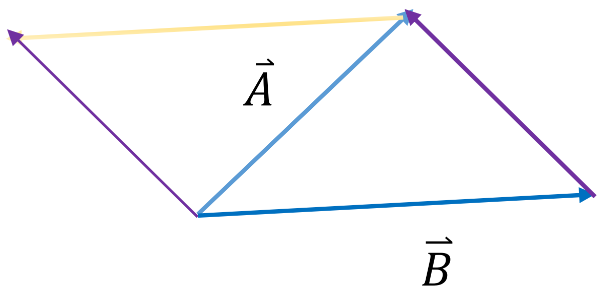
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse fréquentielle à partir du tracé des pôles et zéros

- Rappel sur les vecteurs



- Somme



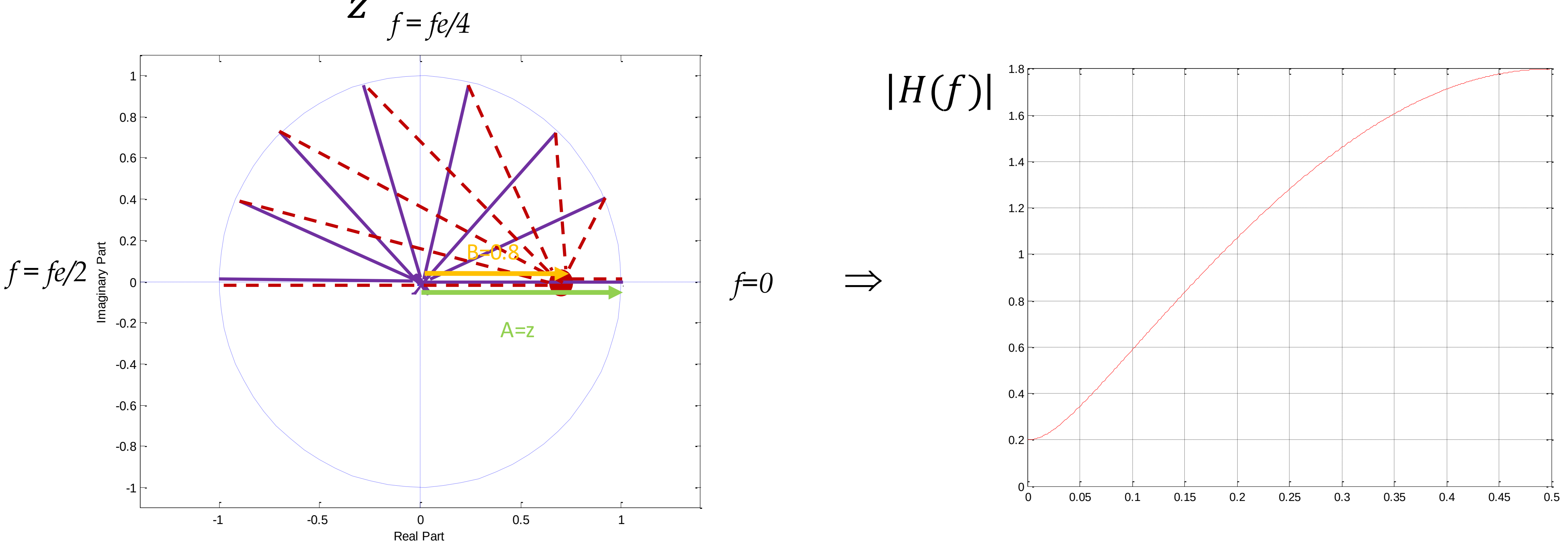
- Différence

V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse fréquentielle à partir du tracé des pôles et zéros

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(nT_e)e^{-2\pi\, jf\, nTe} = H(z)\Big|_{z=e^{2\pi jfTe}} = K\, z^{M-N} \left.\frac{\prod_{i=1}^{N}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{M}(z-p_i)}\right|_{z=e^{2\pi jfTe}}$$

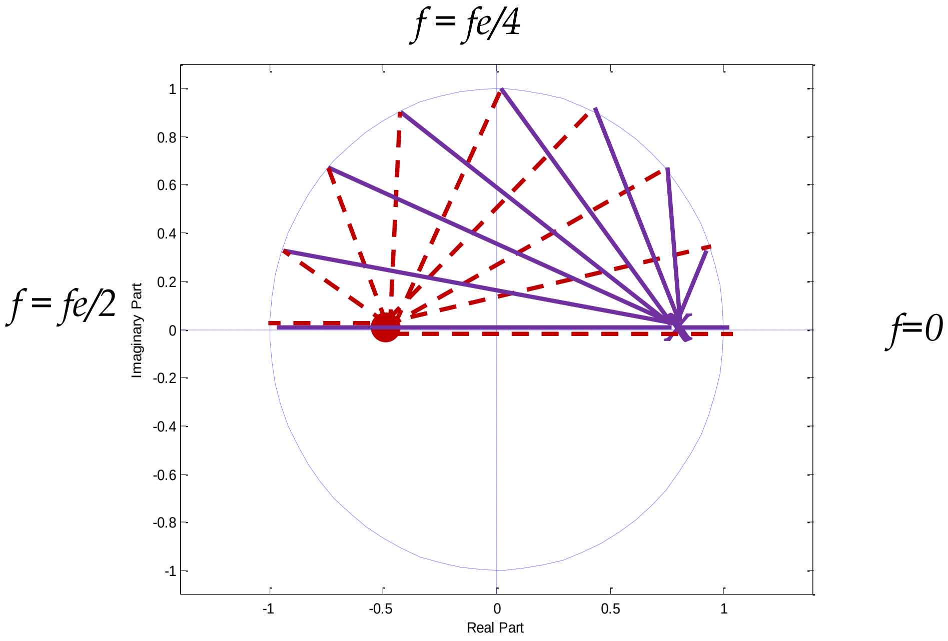
Exemple 1 : $H(z) = \dfrac{(z-0.8)}{z}$



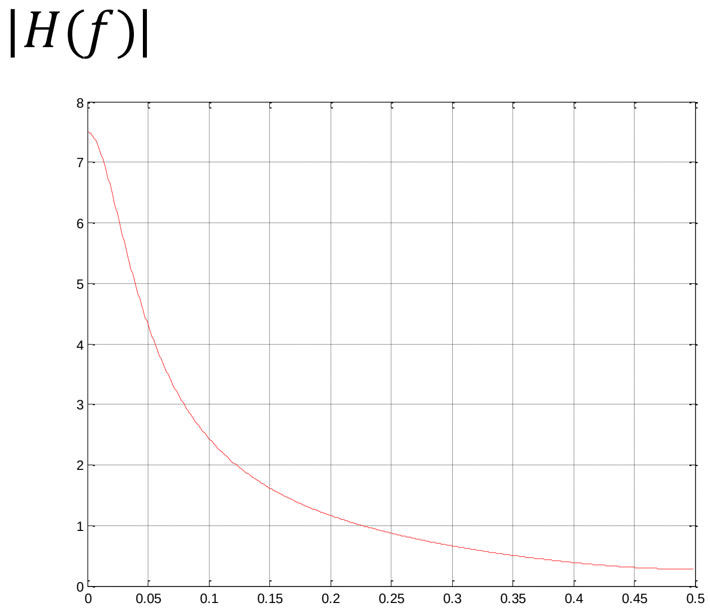
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse fréquentielle à partir du tracé des pôles et zéros

Exemple 2 : $H(z) = \frac{(z+0.5)}{(z-0.8)}$



$\Rightarrow$

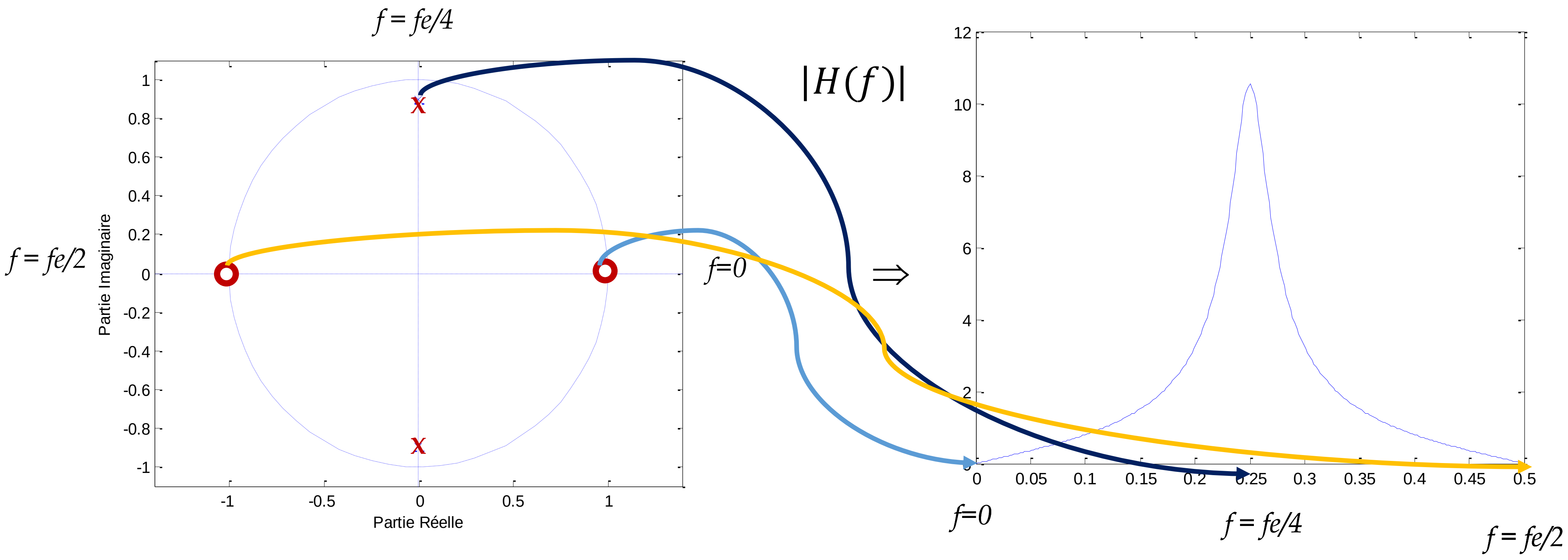


- Un zéro ou un pôle à l’origine n’influent pas sur le module de la réponse fréquentielle.
- Un zéro au voisinage du cercle unité introduit une atténuation dans le module de la réponse en fréquence (minimum)
- Un pôle au voisinage du cercle unité introduit une résonance d’autant plus importante dans le module de la réponse en fréquence que le pôle est proche du cercle unité (maximum)

V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse fréquentielle à partir du tracé des pôles et zéros

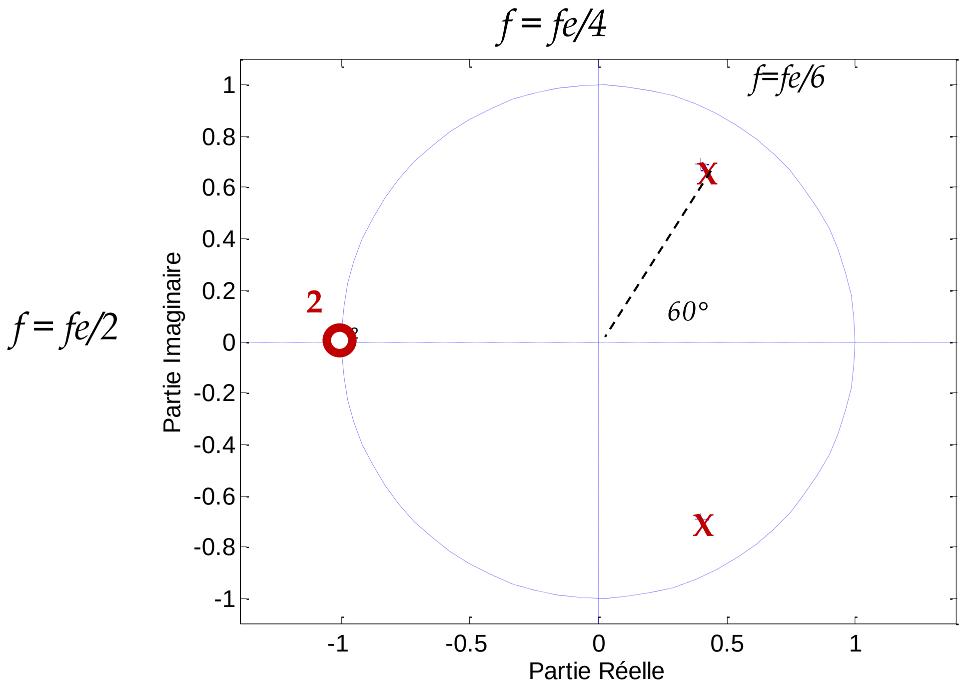
Exemple 3



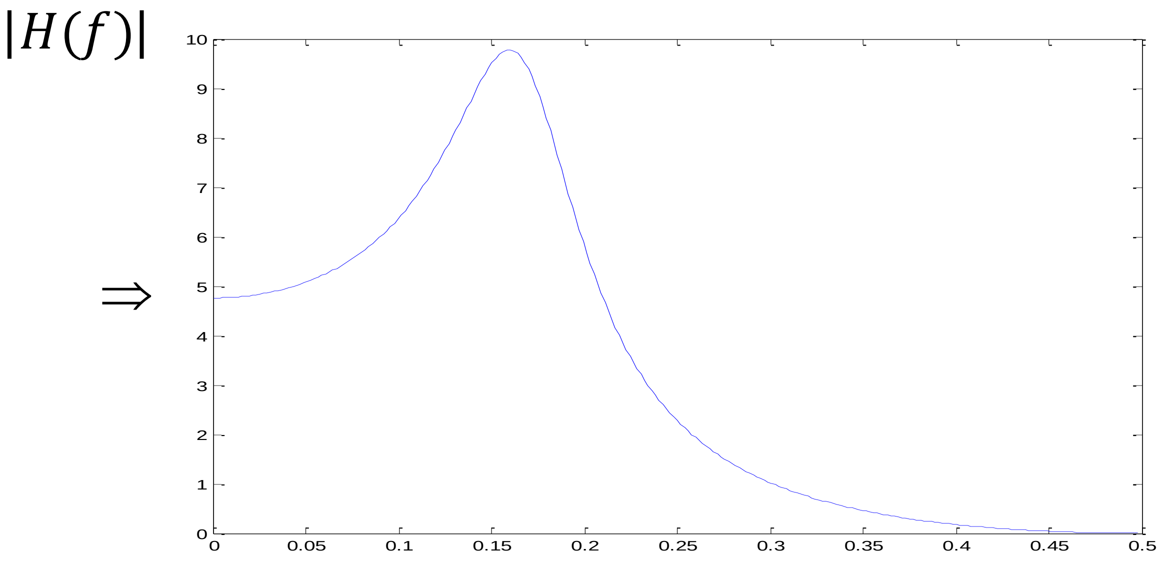
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse fréquentielle à partir du tracé des pôles et zéros

Exemple 4



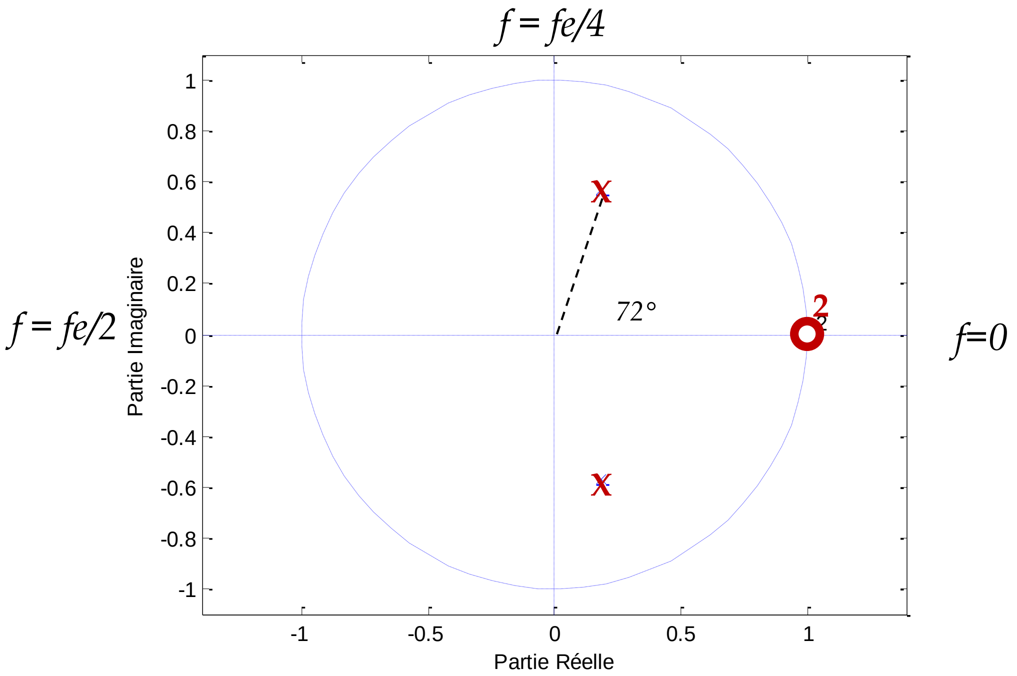
f=0 $\Rightarrow$



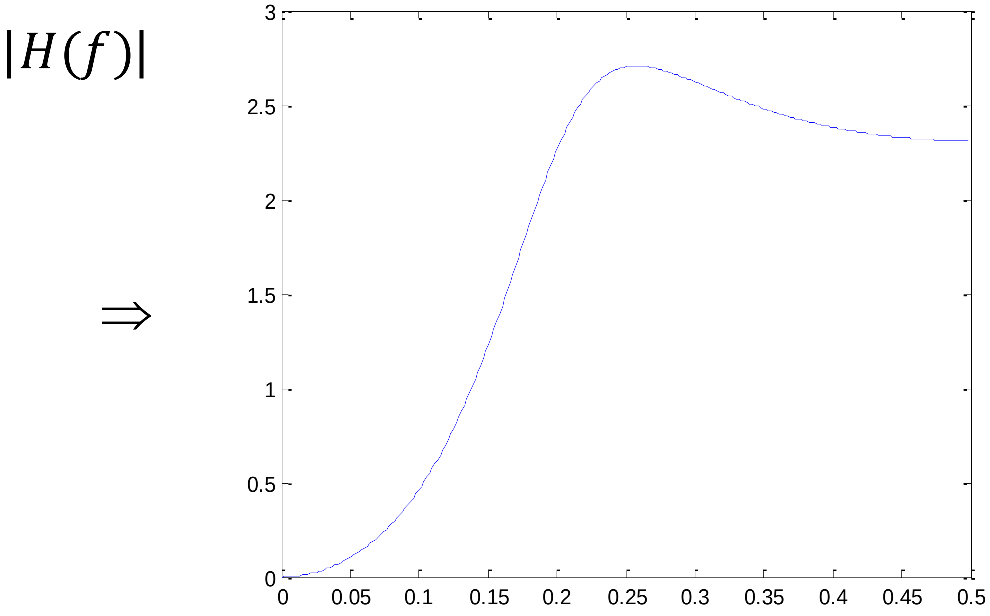
V. Représentation par les pôles et zéros

Détermination de la réponse fréquentielle à partir du tracé des pôles et zéros

Exemple 5



$\Rightarrow$



VI. Transformée en Z inverse

Méthode des Résidus

$$h(n)=\sum_{p_i\ poles\ de\ z^{n-1}H(z)} \mathrm{Re}\,s\left[z^{n-1}H(z)\right]_{z=pi}$$

$$\mathrm{Re}\,s[z^{n-1}H(z)]_{z=pi}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-p_i)^m z^{n-1}H(z)\right]_{z=pi}$$

Exemple

$\Rightarrow$ 1 seul pôle e^{-a} simple (m=1)

$$H(z)=\frac{z}{z-e^{-a}}$$

$$\mathrm{Re}\,s[z^{n-1}H(z)]_{z=e^{-a}}=\left[(z-e^{-a})z^{n-1}\frac{z}{z-e^{-a}}\right]_{z=e^{-a}}=\left[z^n\right]_{z=e^{-a}}=e^{-an}.u(n)$$

VI. Transformée en Z inverse

Développement en fonctions en Z simples

$x(n)$	X(z)	Région de convergence
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$U(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n U(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$n a^n U(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n U(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0 T_e)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+a^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n \sin(\omega_0 n T_e) U(n)$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0 T_e)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0 T_e)+a^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

VI. Transformée en Z inverse

Transformée Inverse par division polynômiale

Exemple

$$H(z)=\frac{1}{1-a.z^{-1}}=\frac{z}{z-a} \quad pour \quad |z|>|a|$$

Domaine de convergence extérieur à un cercle → signal causal→ division pour avoir une série en z^{-1}

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-az^{-1} \\ \cline{2-2}
-(1-az^{-1}) & 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\ldots\ldots \\ \cline{1-1}
\quad az^{-1} & \\
\quad -(az^{-1}-a^2z^{-2}) & \\ \cline{1-1}
\qquad a^2z^{-2} &
\end{array}$$

h(0) h(1) h(2) h(3)

$$\Rightarrow \qquad h(n)=a^n.U(n)$$

VI. Transformée en Z inverse

Transformée Inverse par division polynômiale

Exemple

$$H(z)=\frac{1}{1-a.z^{-1}}=\frac{z}{z-a} \quad pour \quad |z|<|a|$$

Domaine de convergence intérieur à un cercle → signal anti-causal→ division pour avoir une série en z

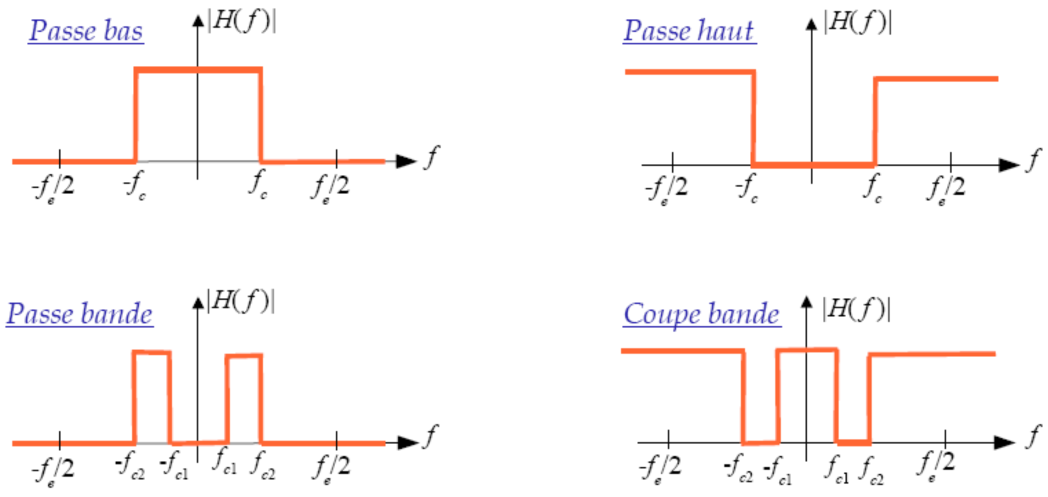
z	$-a+z$
$-(z-a^{-1}z^2)$	$-a^{-1}z \quad -a^{-2}z^2 \quad -a^{-3}z^3 \quad - \ldots\ldots$
$a^{-1}z^2$	
$-(a^{-1}z^2-a^{-2}z^3)$	
$a^{-2}z^3$	

h(-1) h(-2) h(-3)

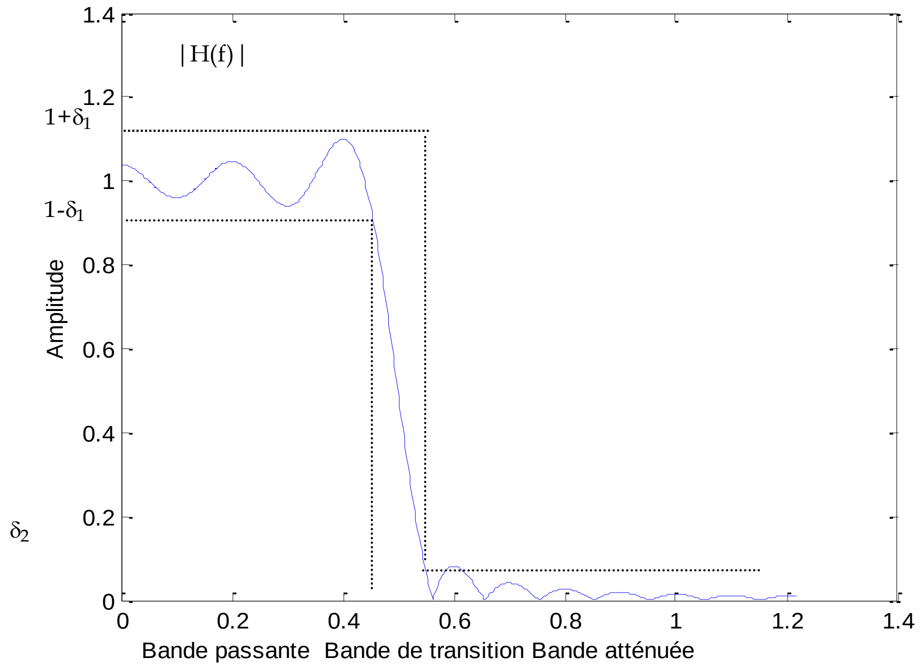
$$\Rightarrow \quad h(n)=-a^n.u(-n-1)$$

VII. Caractéristiques des Filtres Numériques

- Filtre idéal



- Filtre réel



- RIF ou RIII ?

VII. Caractéristiques des Filtres Numériques

- RIF ou RII ?

Rappels

- RII : $\sum_{i=0}^{M} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} b_i x(n-i)$

- RIF : $y(n) = \sum_{i=0}^{N} b_i x(n-i) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i} = \frac{b_0 \prod_{i=1}^{N}(z-z_i)}{z^N} \quad \Rightarrow \quad h(n) = \sum_{i=0}^{N} b_i \delta(n-i)$

Tous les pôles sont en zéros $\Rightarrow$ RIF toujours stables

+ Possibilité d'avoir un retard de groupe constant

VII. Caractéristiques des Filtres Numériques

- **Retard de groupe**

$$H(f) = |H(f)|e^{-j\phi(f)} \qquad\qquad \beta = -\frac{d\phi(f)}{df}$$

- Rappel $TF\{x(t-t_0)\} = X(f)e^{-2\pi j f t_0}$

- Une phase linéaire assurera un même déphasage pour toutes les fréquences (pas de distorsion).

$$\phi(f) = \phi_0 + 2\pi\ f\ t_0 \qquad\qquad \beta = -\frac{d\phi(f)}{df} = 2\pi t_0 = cste$$

- Les filtres FIR peuvent générer des filtres à phase linéaire à la condition que la réponse impulsionnelle soit symétrique

VII. Caractéristiques des Filtres Numériques

Exemple

$$y(n)=\frac{1}{4}\big(x(n)+2x(n-1)+x(n-2)\big)$$

$$\Rightarrow \quad h(n)=\frac{1}{4}\big(\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)\big)$$

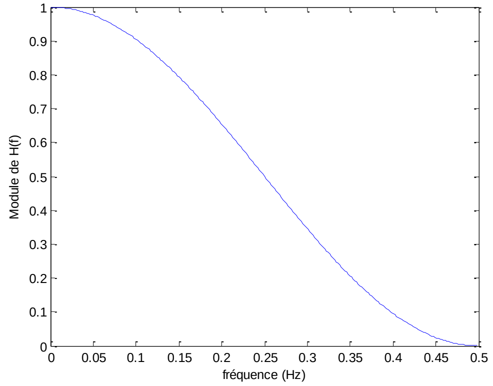
$$\Rightarrow \quad H(z)=\frac{1}{4}(1+2z^{-1}+z^{-2})$$

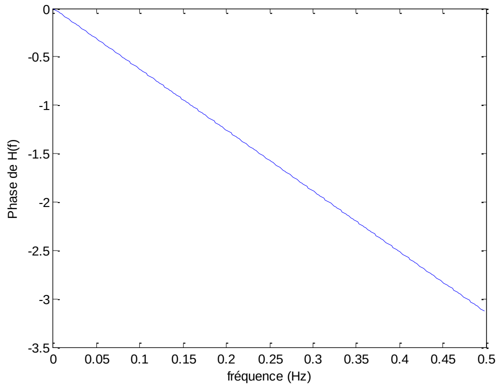
$$\Rightarrow \quad H(f)=H(z)\Big|_{z=e^{2\pi jfT_e}}=\frac{1}{4}(1+2e^{-2\pi jfT_e}+e^{-4\pi jfT_e})$$

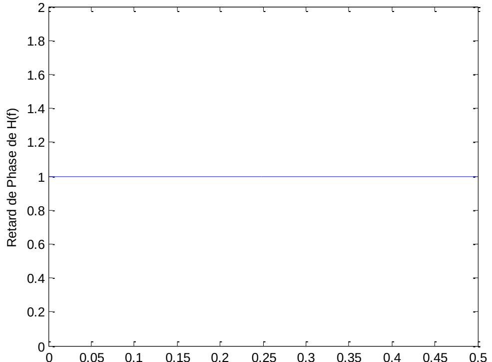
$$H(f)=\frac{1}{4}e^{-2\pi jfT_e}\,(e^{2\pi jfT_e}+2+e^{-2\pi jfT_e})$$

$$H(f)=\frac{1}{4}e^{-2\pi jfT_e}\,(2\cos(2\pi fT_e)+2)=e^{-2\pi jfT_e}\,(cos^2(\pi fT_e))$$

$$\Rightarrow \quad \beta=-\frac{d\varphi(f)}{df}=2\pi T_e=cste$$







Faculté d'Electronique et d'Informatique, USTHB [akourgli@usthb.dz
http://perso.usthb.dz/~akourgli/

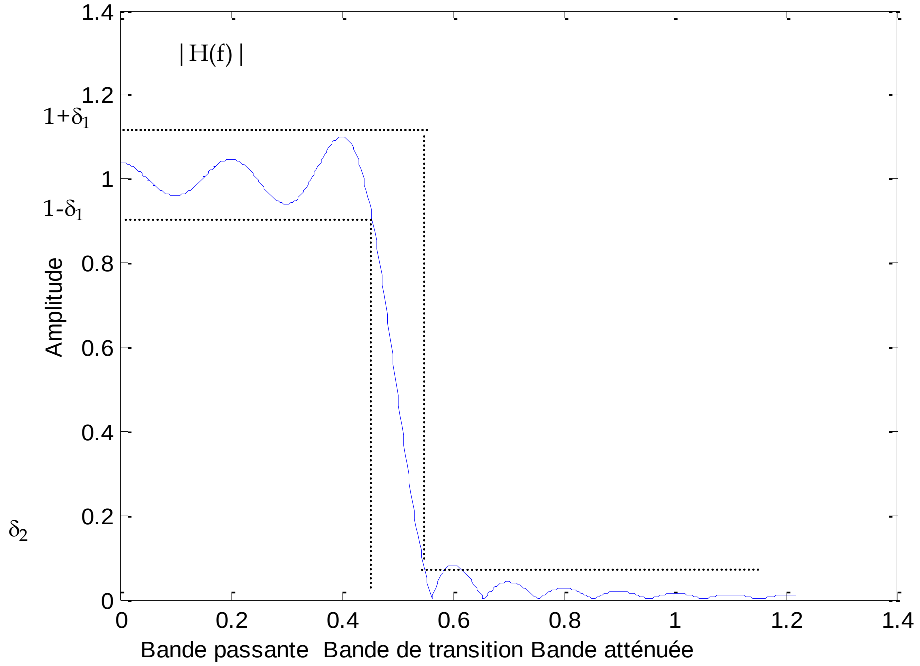
VII. Caractéristiques des Filtres Numériques

RIF ou RII ?

- RII

➢Réponse fréquentielle désirée avec très peu de pôles et zéros

☻Risque d'instabilité (récursivité)



- RIF

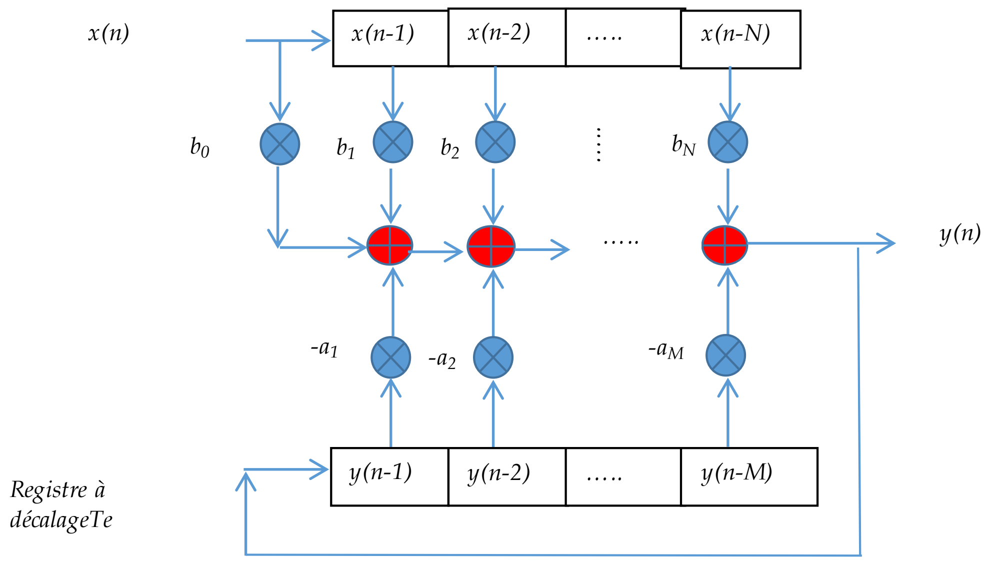
✓Toujours stable

✓Possibilité d'avoir un retard de groupe constant

☻Pas de pôles hors zéros (réponse impulsionnelle longue)

VII. Structure des Filtres Numériques

- SLID $$y(n) = -\sum_{i=1}^{M} a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^{N} b_i x(n-i)$$



- ➢ un ou plusieurs organes de retard (registres à décalage)
- ➢ une horloge
- ➢ opérateurs arithmétiques (additionneurs et multiplieurs)
- ➢ registres fournissant les coefficients de pondération du filtre

Analyse des FN par la TZ

(Indications pour TP)

Adobe Acrobat
Document

Synthèse des Filtres RIF