

Filtrage Multi-cadences

1

Introduction

Exemples de systèmes multi-cadences

- Applications audio où co-existent plusieurs fréquences d'échantillonnage : 32kHz (diffusion); 44,1 kHz (disque compact numérique) ; 48kHz (bande sonore numérique) ; 96kHz
- Chaîne de traitement correspondant à l'émetteur bande de base d'un modulateur DPQSK où l'on a trois fréquences de traitement : la fréquence bit, la fréquence symbole et la fréquence d'échantillonnage
- Changement des fréquences
- Bancs de Filtres

But : Améliorer les caractéristiques d'implantation d'un algorithme en adoptant pour chacune de ses étapes un échantillonnage dit critique (fréquence de traitement est choisie égale à la fréquence de Nyquist)

Introduction

Exemple : Synthétiser un filtre passe-bas avec les spécifications suivantes : $f_p=100\text{Hz}$
 $f_a=300\text{Hz}$ $A_a>50\text{ db}$ $f_e=20\text{kHz}$.

Hamming \Rightarrow **N=331**

Filtre occupe une petite portion de la bande passante (passe-bas avec $f_c=1\% f_e$).

➔ Sous-échantillonner et puis sur-échantillonner sans perte d'informations.

\Rightarrow Prendre $f_e'=f_e/25=800\text{Hz}$ $\Rightarrow N=15 \ll 331 \Rightarrow$ Filtre plus rapide.

➤ Principe des bancs de filtres : Diviser la bande passante en plusieurs filtres à bande étroite donc des filtres que l'on pourra facilement décimer \Rightarrow un gain de temps.

Introduction

- Filtrage passe-bas $\Rightarrow f_{max}$ diminue
- Modulation $\Rightarrow f_{max}$ augmente

Adapter la fréquence d'échantillonnage afin de minimiser le temps de calcul.

Augmenter le SNR avant CNA

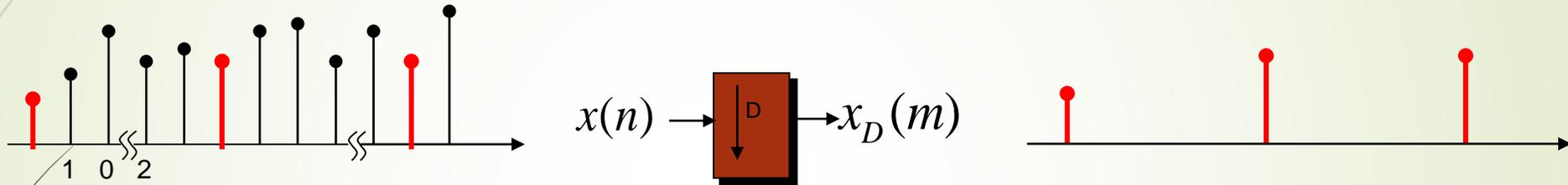
Changement de fréquences

Bancs de Filtres

1. Décimation ou sous-échantillonnage (diminution de f_{max})
2. Interpolation ou sur-échantillonnage (augmentation de f_{max}).

Sous-Echantillonnage et Sur-Echantillonnage

- Fabriquer à partir du signal original x un signal x_D comportant moins d'échantillons que le signal d'origine \Rightarrow "enlever" des échantillons \Rightarrow **décimation** (down sampling)



- $T_e' = D T_e \Rightarrow f_e' = f_e / D$
- Sous-échantillonnage de D consiste à se débarrasser de $D - 1$ échantillons sur D
- Echantillonner directement à f_e / D , mais rien ne garantit que $f_e / D > 2 f_{max}$. Il y a donc un risque de repliement spectral.

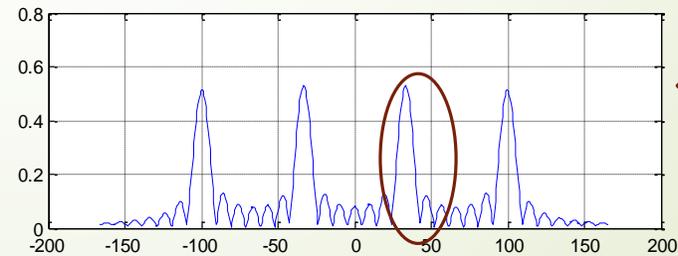
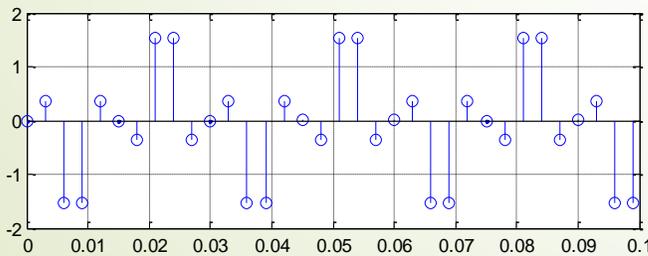
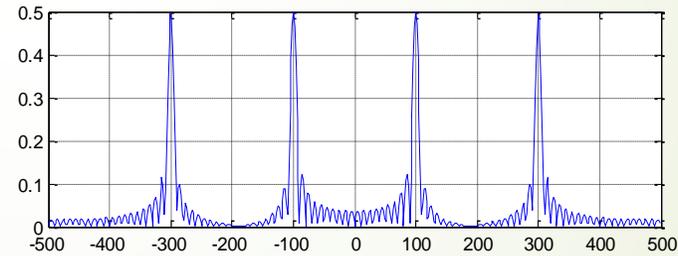
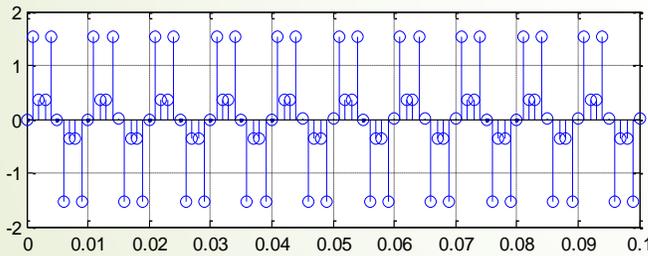
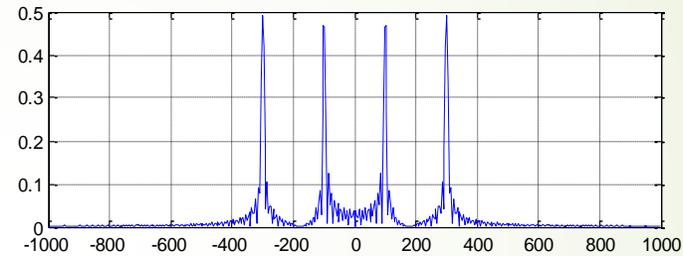
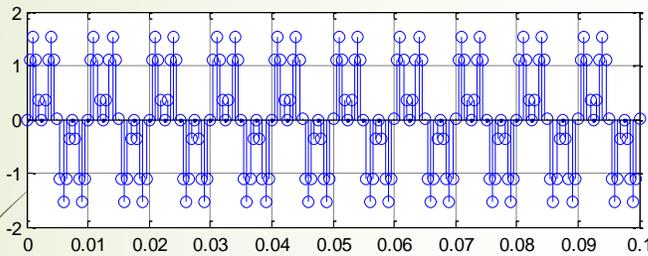
$$X_D(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_D(m) z^{-m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n/D) z^{-n/D}$$

6

Sous-Echantillonnage et Sur-Echantillonnage

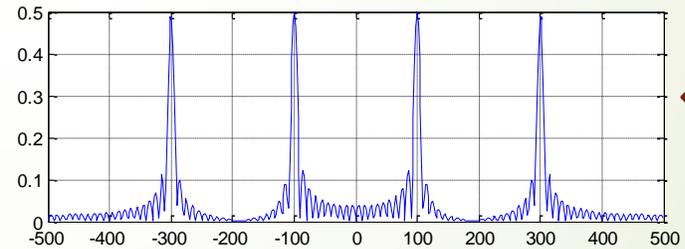
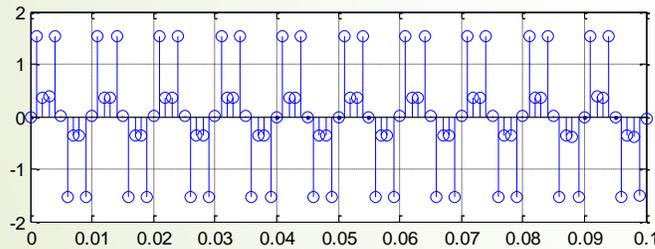
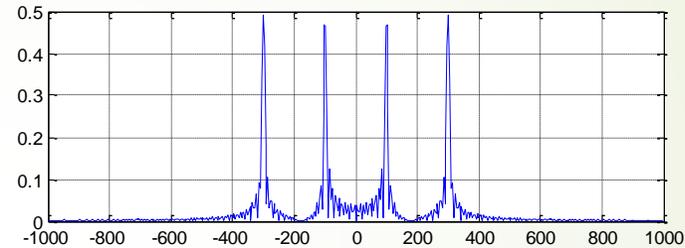
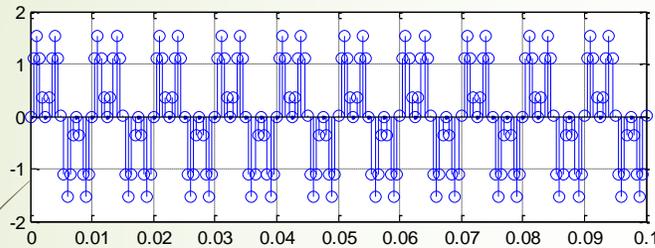
Exemple : Signal = somme de 2 sinusoïdes de fréquences 100 et 300Hz.

On le décime de 2 et de 6 ($f_e=2000$ Hz)

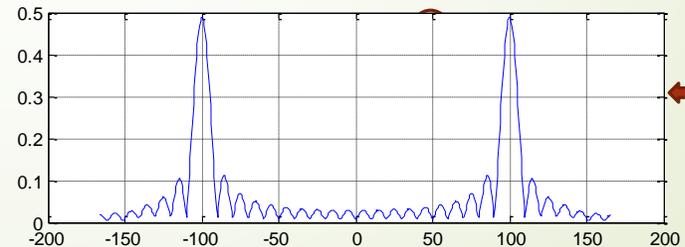
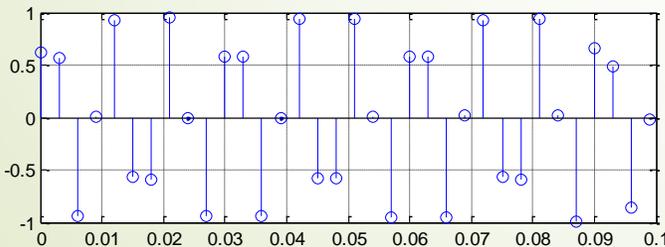


Sous-Echantillonnage et Sur-Echantillonnage

Solution : Avant de décimer, supprimer le contenu fréquentiel de $x(n)$ après $f_e / 2D$ et f_e / D puisque le spectre devient périodique de période f_e / D



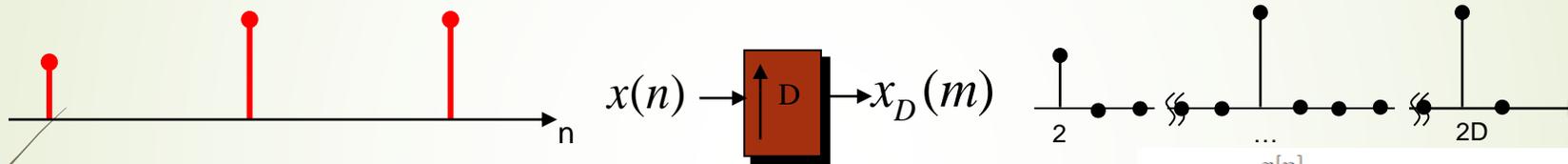
$f_e' = f_e / 2$



$f_e' = f_e / 6$

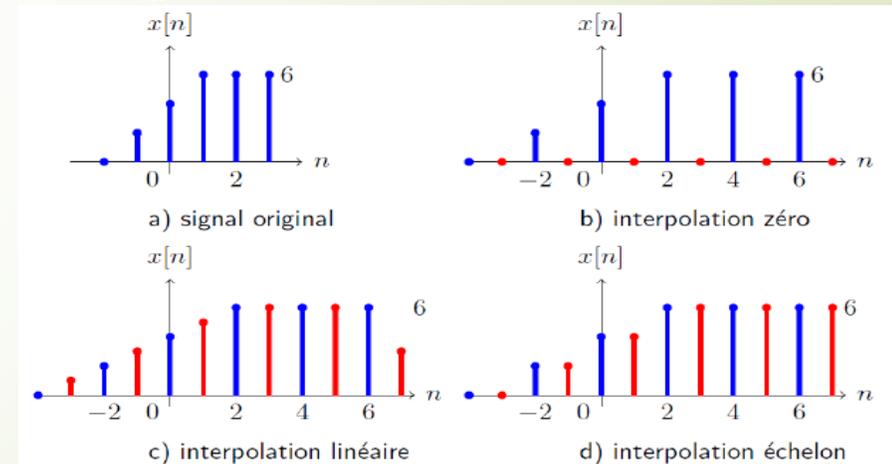
Sous-Echantillonnage et **Sur-Echantillonnage**

- Fabriquer à partir du signal original x un signal x_M un signal de même durée mais comportant davantage d'échantillons que le signal d'origine \Rightarrow "rajouter" des échantillons \Rightarrow **interpolation** (upsampling).



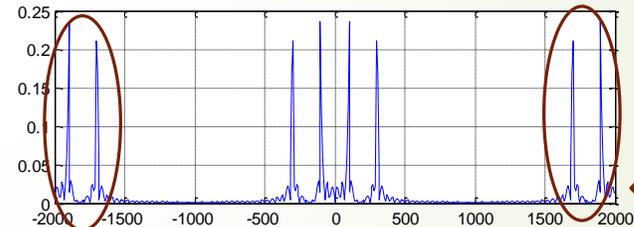
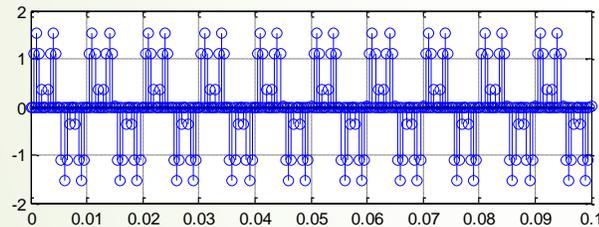
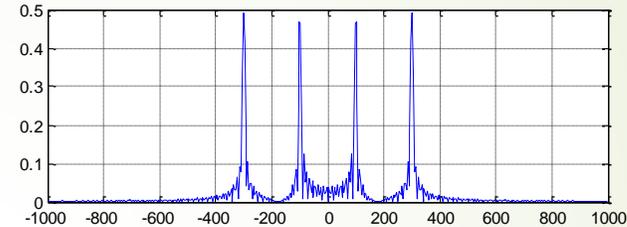
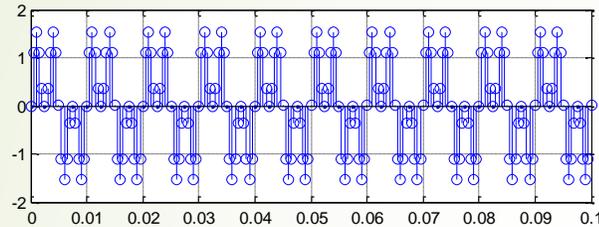
- $T_e' = T_e / D \Rightarrow f_e' = D f_e$
- Sur-échantillonnage de $D \Rightarrow$ Rajouter $D - 1$ points
- Signal d'origine n'a pas de contenu fréquentiel au-delà de $f_e/2$

$$X_D(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_D(m)z^{-m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_D(nD)z^{-nD} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)(z^{-n})^D = X(z^D)$$

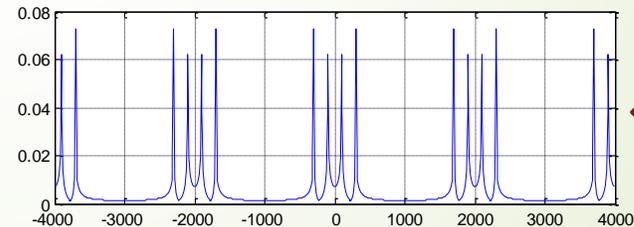
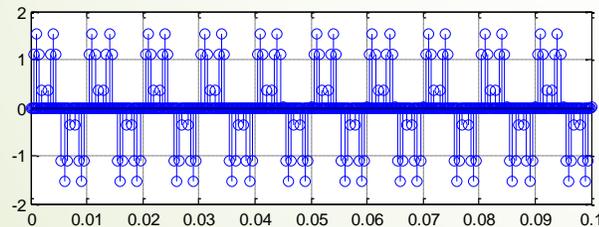


Sous-Echantillonnage et Sur-Echantillonnage

Exemple : Signal = somme de 2 sinusoides de fréquences 100 et 300Hz. On l'interpole de 2 puis de 4.



Spectres Miroirs
 $f_{e'} = 2f_e$

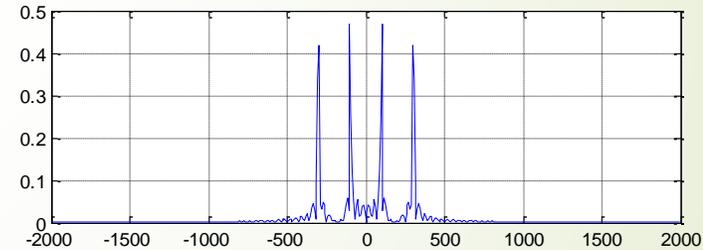
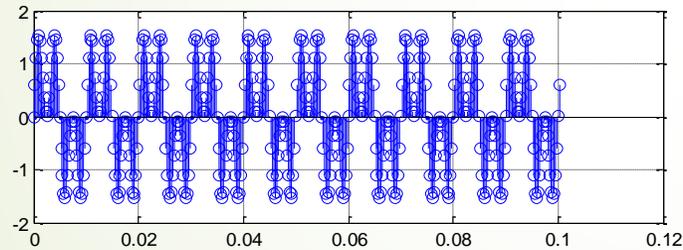
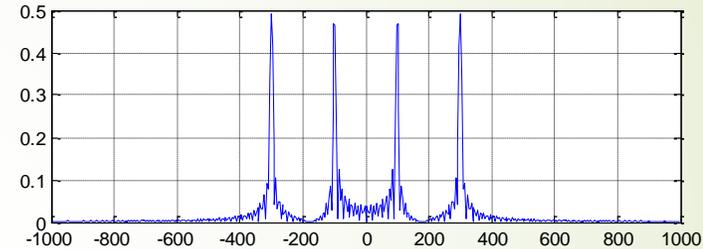
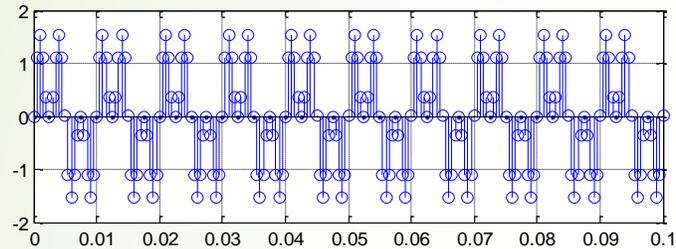


$f_{e'} = 4f_e$

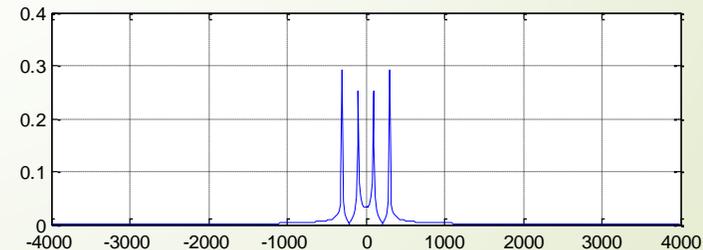
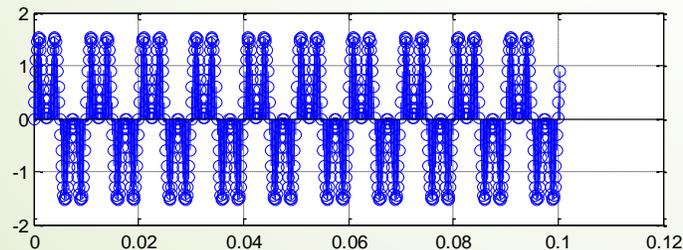
Même forme de spectre mais fréquence d'échantillonnage de $D f_e \Rightarrow$ Supprimer spectres miroirs par filtrage passe-bas à partir de $f_e/2$

Sous-Echantillonnage et Sur-Echantillonnage

Solution : Après avoir interpolé, Filtrage passe-bas à $f_e/2$



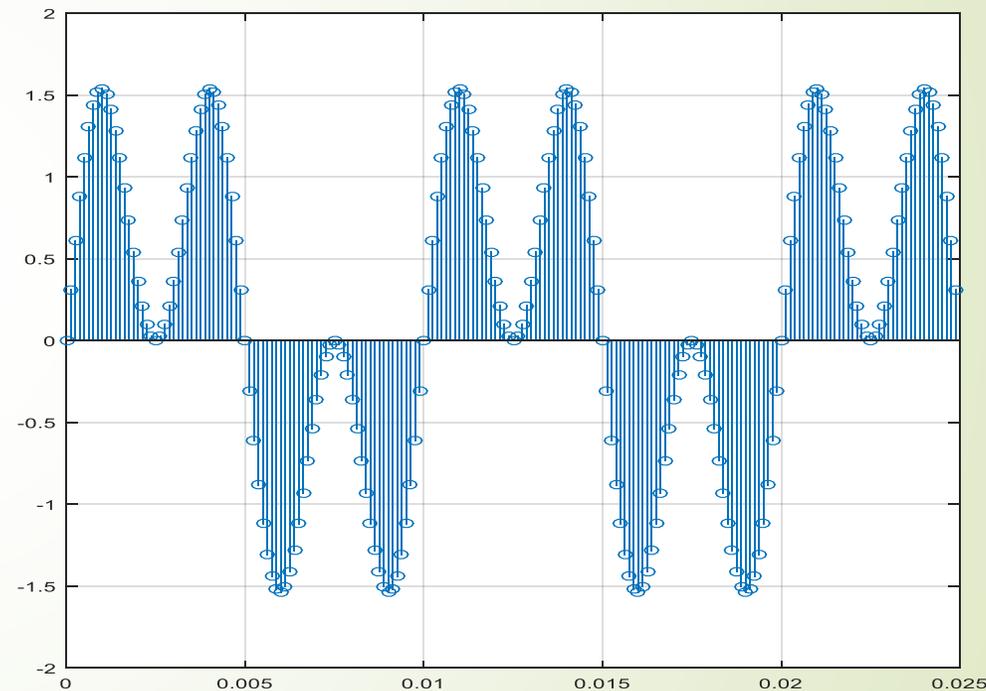
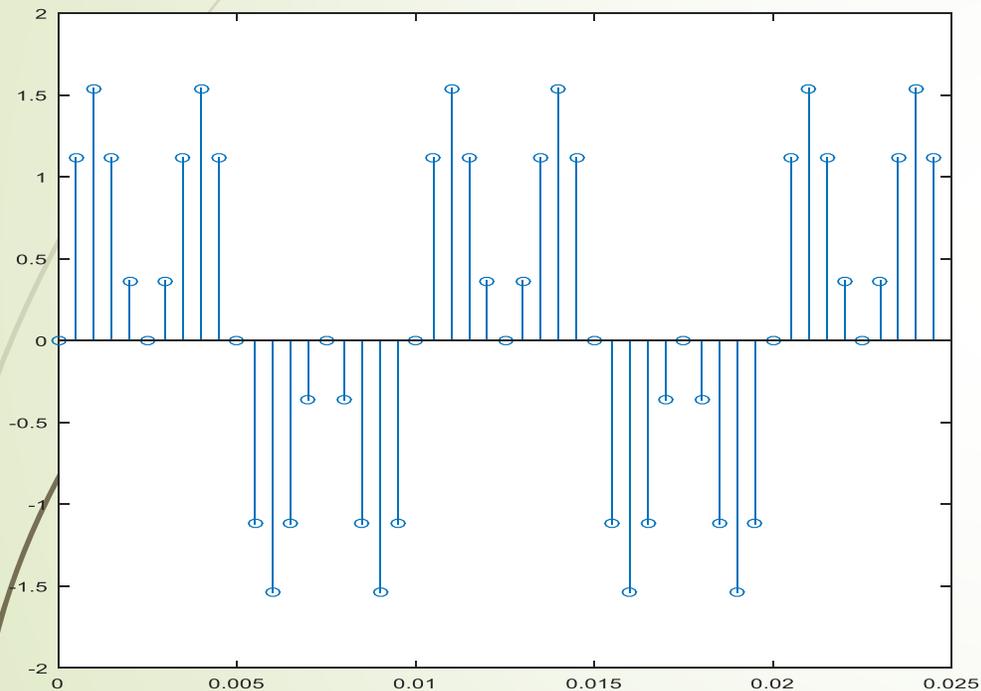
$$f_e' = 2f_e$$



$$f_e' = 4f_e$$

Sous-Echantillonnage et **Sur-Echantillonnage**

Solution : Après avoir interpolé de 4 + Filtrage passe-bas à $f_e/2$



Filtrage Multi-cadences

Décomposition Polyphases

- Représentation plus simple du sous et sur-échantillonnage
- Utile pour les bancs de filtres

Rappels

- ✓ Décimation : **Filtrage passe bas** + (réduction du nbre d'échantillons)
- ✓ Interpolation : Augmentation du nbre d'échantillons + **Filtrage passe-bas**

Dans les 2 cas, plus pratique d'inverser les 2 opérations \Rightarrow gain de temps

Comment? **Représentation polyphases**

Exemple 1 : Décomposition de 2 \rightarrow Séparer les échantillons en 2 (pairs et impairs)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n)z^{-2n} + z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1)z^{-2n}$$

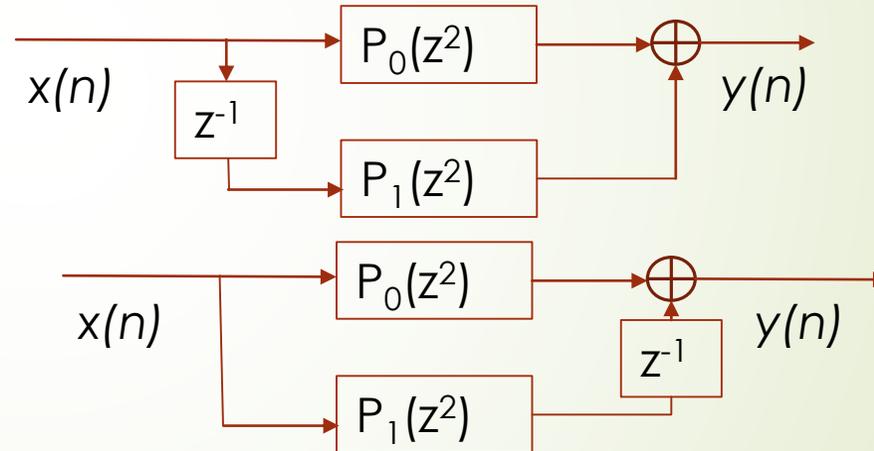
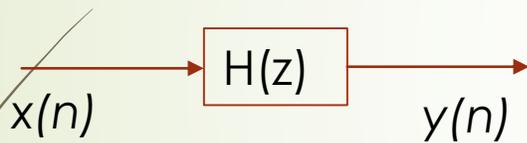
$$\text{On pose } P_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n)z^{-n} \quad P_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1)z^{-n} \Rightarrow H(z) = P_0(z^2) + z^{-1}P_1(z^2)$$

Décomposition Polyphases

Exemple 1 : Décomposition polyphases de 2 → Séparer les échantillons en 2 (pairs et impairs)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n)z^{-2n} + z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1)z^{-2n}$$

On pose $P_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n)z^{-n}$ $P_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1)z^{-n} \Rightarrow H(z) = P_0(z^2) + z^{-1}P_1(z^2)$



En général

➤ $H_D(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{l=0}^{\frac{N}{D}-1} h(lD+k)z^{-(lD+k)}$

➤ $H_D(z) = \sum_{k=0}^{D-1} z^{-k} \sum_{l=0}^{\frac{N}{D}-1} h(lD+k)(z^D)^{-l} = \sum_{k=0}^{D-1} z^{-k} P_k(z^D) \text{ où } P_k(z) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{D}-1} h(lD+k)z^{-l}$

Décomposition Polyphases

Exemple 2 : Décomposition polyphases de 4 → Séparer les échantillons en 4

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(4n)z^{-4n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(4n+1)z^{-4n-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(4n+2)z^{-4n-2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(4n+3)z^{-4n-3}$$

$$\text{On pose } P_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(4n)z^{-n} \quad P_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(4n+1)z^{-n}$$

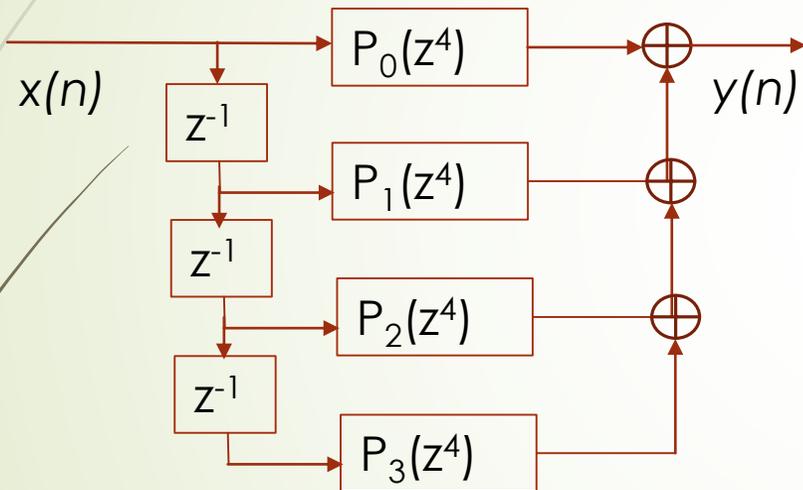
$$P_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(4n+2)z^{-n} \quad P_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(4n+3)z^{-n}$$

$$\Rightarrow H(z) = P_0(z^4) + z^{-1}P_1(z^4) + z^{-2}P_2(z^4) + z^{-3}P_3(z^4)$$

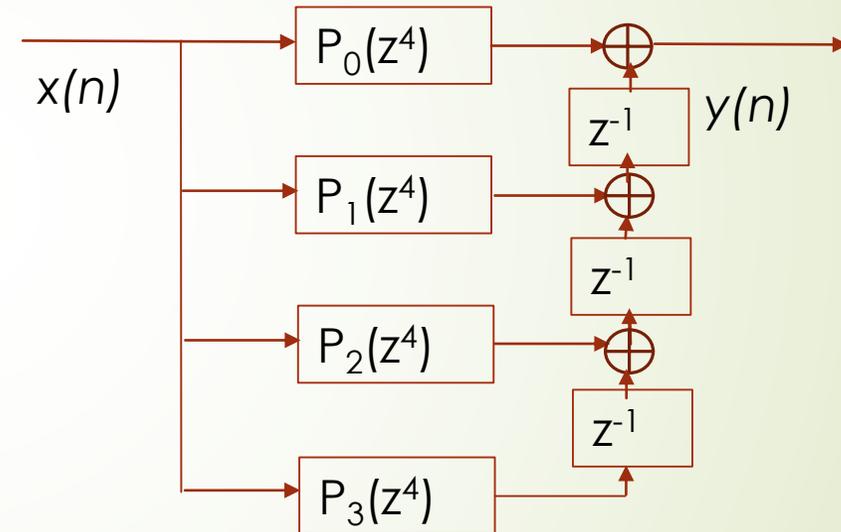
Décomposition Polyphases

Exemple 2 : Décomposition polyphases de 4 → Séparer les échantillons en 4

$$H(z) = P_0(z^4) + z^{-1}P_1(z^4) + z^{-2}P_2(z^4) + z^{-3}P_3(z^4)$$



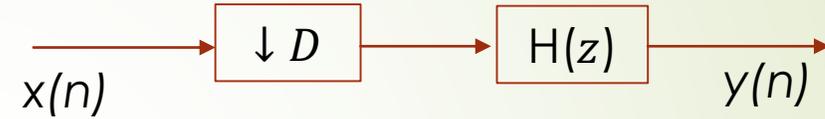
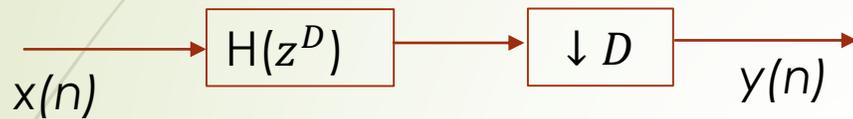
Structure Directe



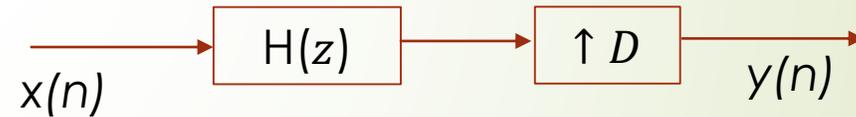
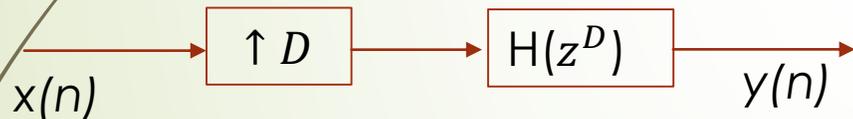
Structure transposée

Décomposition Polyphases

Identités Nobles



Identité Noble 1



Identité Noble 2

Décomposition Polyphases

Identité Noble 1 : Exemple illustratif



➤ $x(n)$ à décimer de 3 avec un filtre passe-bas $h(n)$:

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + \dots + h(11)z^{-11} = P_0(z^3) + z^{-1}P_1(z^3) + z^{-2}P_2(z^3)$$

➤ $P_0(z^3) = h(0) + h(3)z^{-3} + h(6)z^{-6} + h(9)z^{-9}$

➤ $X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots + x(n)z^{-n} + \dots$



➤ $y_0(n) = x(0)h(0)$

+ $x(1)h(0)z^{-1} + x(2)h(0)z^{-2} + [x(3)h(0) + x(0)h(3)]z^{-3} + [x(4)h(0) + x(1)h(3)]z^{-4} + [x(5)h(0) + x(2)h(3)]z^{-5}$

+ $[x(6)h(0) + x(3)h(3) + x(0)h(6)]z^{-6} + [x(7)h(0) + x(4)h(3) + x(1)h(6)]z^{-7} + [x(8)h(0) + x(5)h(3) + x(2)h(6)]z^{-8}$

+ $[x(9)h(0) + x(6)h(3) + x(3)h(6) + x(0)h(9)]z^{-9} + [x(10)h(0) + x(7)h(3) + x(4)h(6) + x(1)h(9)]z^{-10}$

+ $[x(11)h(0) + x(8)h(3) + x(5)h(6) + x(2)h(9)]z^{-11} + [x(12)h(0) + x(9)h(3) + x(6)h(6) + x(3)h(9)]z^{-12} + \dots$

Décomposition Polyphases

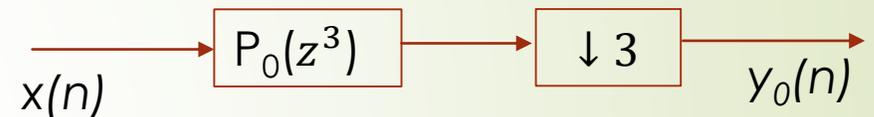
Identité Noble 1 : Exemple illustratif

➤ $x(n)$ à décimer de 3 avec un filtre passe-bas $h(n)$:

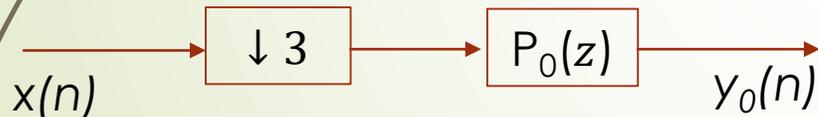
$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + \dots + h(11)z^{-11} = P_0(z^3) + z^{-1}P_1(z^3) + z^{-2}P_2(z^3)$$

$$P_0(z^3) = h(0) + h(3)z^{-3} + h(6)z^{-6} + h(9)z^{-9}$$

Après décimation par 3



$$\begin{aligned} \text{➤ } y_0(n) = & x(0)h(0) + [x(3)h(0) + x(0)h(3)]z^{-1} + [x(6)h(0) + x(3)h(3) + x(0)h(6)]z^{-2} \\ & + [x(9)h(0) + x(6)h(3) + x(3)h(6) + x(0)h(9)]z^{-3} + [x(12)h(0) + x(9)h(3) + x(6)h(6) + x(3)h(9)]z^{-4} + \dots \end{aligned}$$



$$\text{➤ } x_0(n) = \{x(0), x(3), x(6), \dots\} \Rightarrow X_0(z) = x(0) + x(3)z^{-1} + x(6)z^{-2} + x(9)z^{-3} + \dots + x(n)z^{-n/3}$$

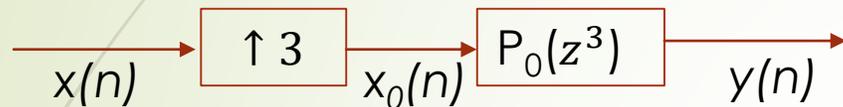
$$\text{➤ } P_0(z) = h(0) + h(3)z^{-1} + h(6)z^{-2} + h(9)z^{-3}$$

$$\text{➤ } y_0(n) = x(0)h(0) + [x(3)h(0) + x(0)h(3)]z^{-1} + [x(6)h(0) + x(3)h(3) + x(0)h(6)]z^{-2} + [x(9)h(0) + x(6)h(3) + x(3)h(6) + x(0)h(9)]z^{-3} + [x(12)h(0) + x(9)h(3) + x(6)h(6) + x(3)h(9)]z^{-4} + \dots$$

Décomposition Polyphases

Identité Noble 2 : Exemple illustratif

- $x(n)$ à interpoler de 3 avec un filtre passe-bas $h(n)$:



- $x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3), \dots\} \Rightarrow X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots + x(n)z^{-n} + \dots$

- $H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + \dots + h(11)z^{-11} = P_0(z^3) + z^{-1}P_1(z^3) + z^{-2}P_2(z^3)$

Avec $P_0(z^3) = h(0) + h(3)z^{-3} + h(6)z^{-6} + h(9)z^{-9}$

- Après interpolation $\Rightarrow x_0(n) = \{x(0), 0, 0, x(1), 0, 0, x(2), 0, 0, x(3), \dots\}$

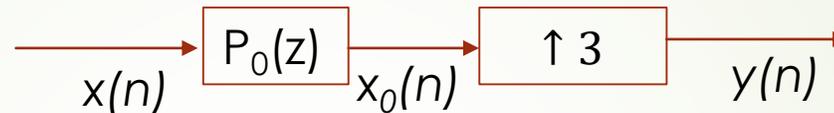
$$X_0(z) = x(0) + x(1)z^{-3} + x(2)z^{-6} + x(3)z^{-9} + \dots + x(n)z^{-3n} + \dots$$

- $y_0(n) = x(0)h(0) + [x(1)h(0) + x(0)h(3)]z^{-3} + [x(2)h(0) + x(1)h(3) + x(0)h(6)]z^{-6}$
 $+ [x(3)h(0) + x(2)h(3) + x(1)h(6) + x(0)h(9)]z^{-9} + [x(4)h(0) + x(3)h(3) + x(2)h(6) + x(1)h(9)]z^{-12} + \dots$

Décomposition Polyphases

Identité Noble 2 : Exemple illustratif

On applique l'identité noble 2



➤ $P_0(z^3) = h(0) + h(3)z^{-3} + h(6)z^{-6} + h(9)z^{-9} \Rightarrow P_0(z) = h(0) + h(3)z^{-1} + h(6)z^{-2} + h(9)z^{-3}$

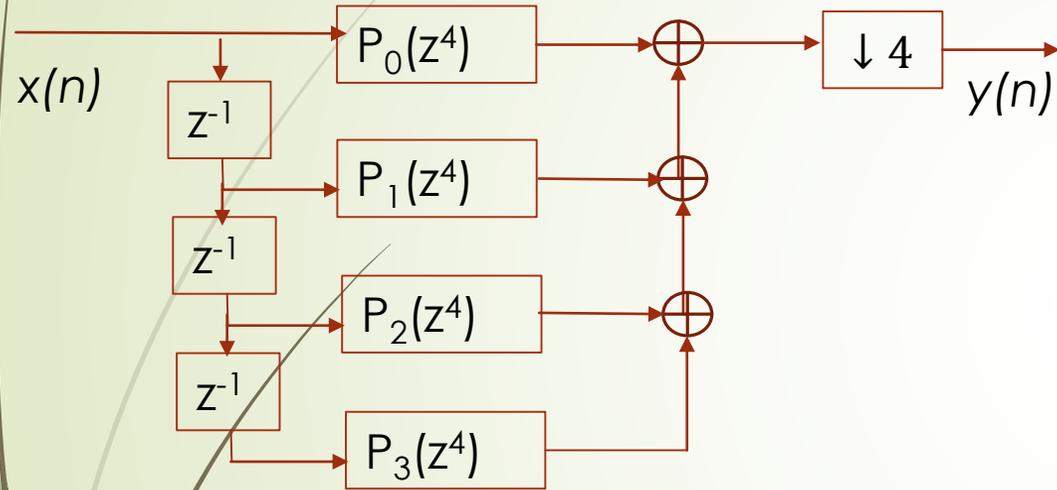
➤ $X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots + x(n)z^{-n} + \dots$

➤ $x_0(n) = x(0)h(0) + [x(1)h(0) + x(0)h(3)]z^{-1} + [x(2)h(0) + x(1)h(3) + x(0)h(6)]z^{-2} + [x(3)h(0) + x(2)h(3) + x(1)h(6) + x(0)h(9)]z^{-3} + [x(4)h(0) + x(3)h(3) + x(2)h(6) + x(1)h(9)]z^{-4} + \dots$

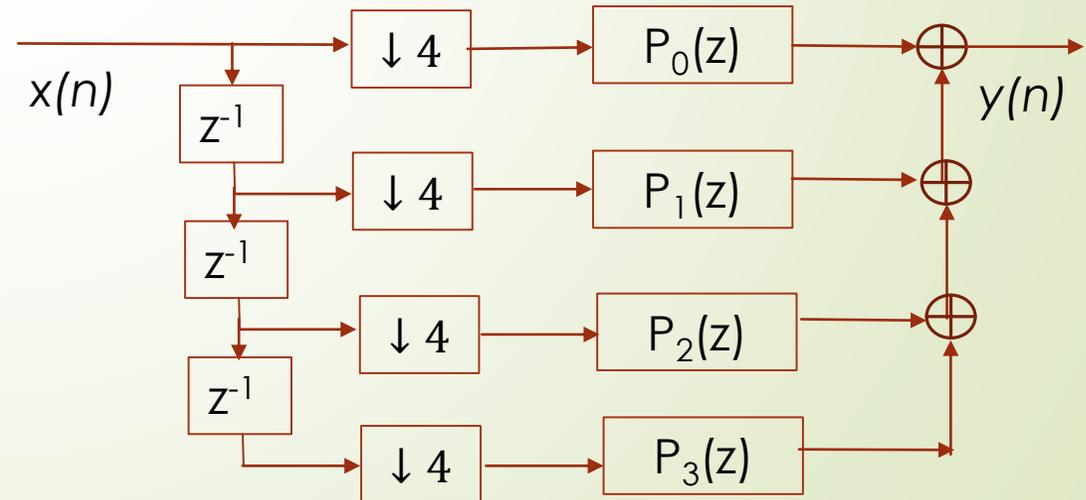
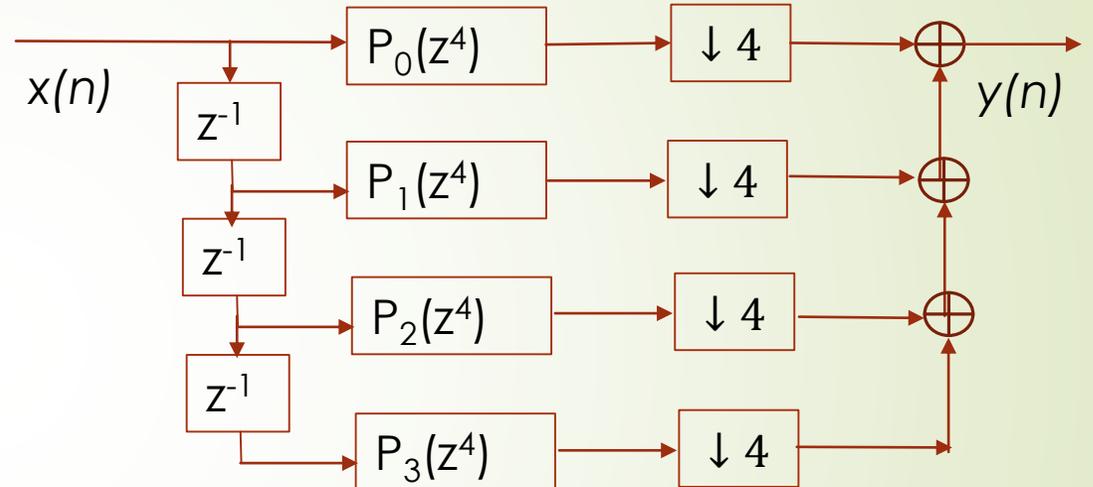
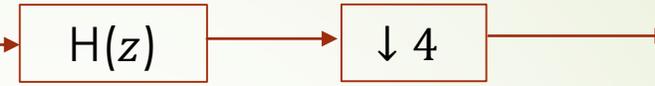
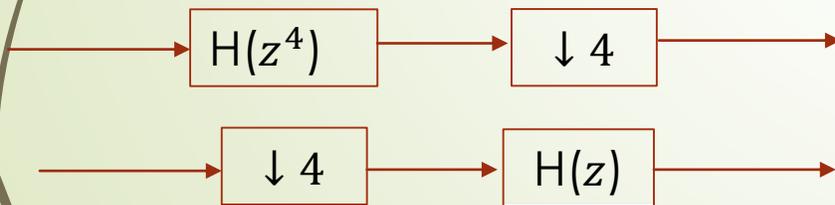
➤ Après Interpolation par 3 $\Rightarrow y_0(n) = x(0)h(0) + 0z^{-1} + 0z^{-2} + [x(1)h(0) + x(0)h(3)]z^{-3} + 0z^{-4} + 0z^{-5} + [x(2)h(0) + x(1)h(3) + x(0)h(6)]z^{-6} + 0z^{-7} + 0z^{-8} + [x(3)h(0) + x(2)h(3) + x(1)h(6) + x(0)h(9)]z^{-9} + 0z^{-10} + 0z^{-11} + [x(4)h(0) + x(3)h(3) + x(2)h(6) + x(1)h(9)]z^{-12} + \dots$

Décimation Polyphases

Exemple : Décimation par 4

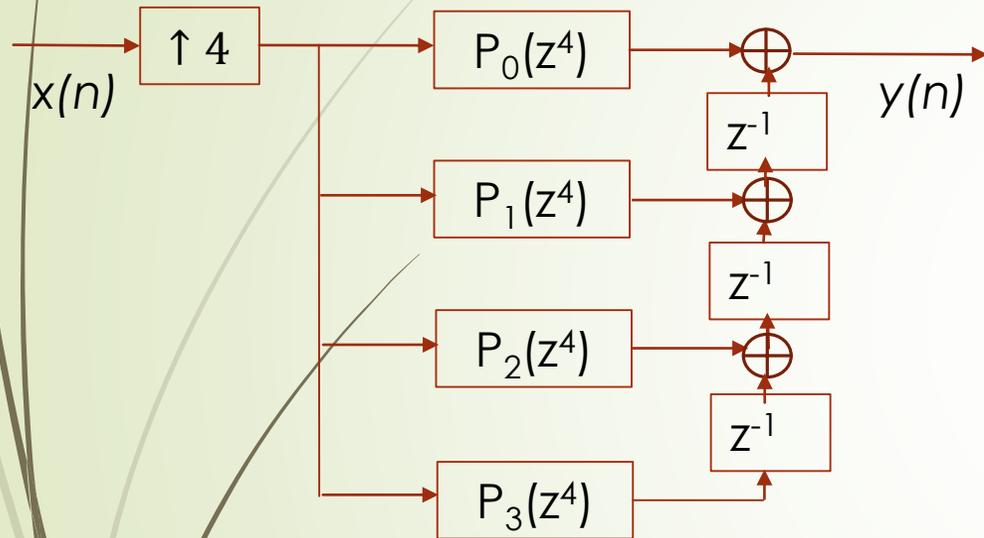


Structure Directe

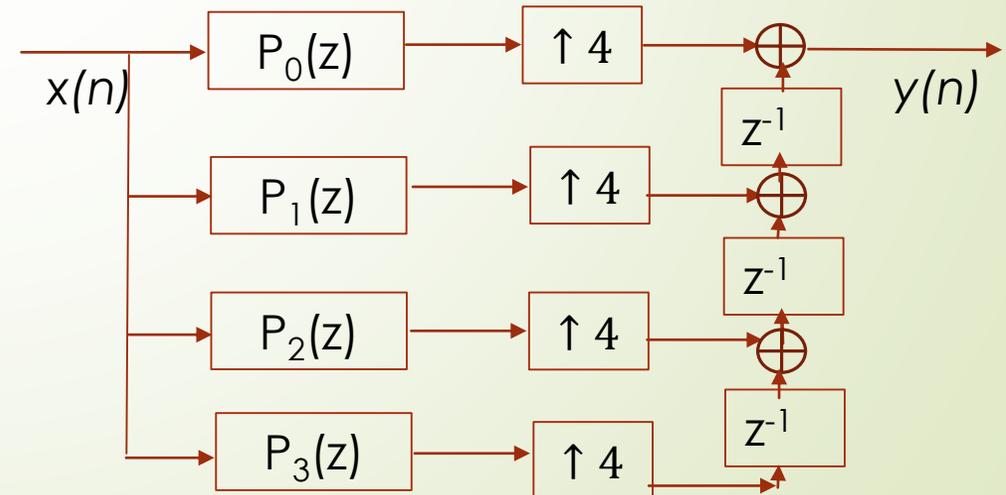
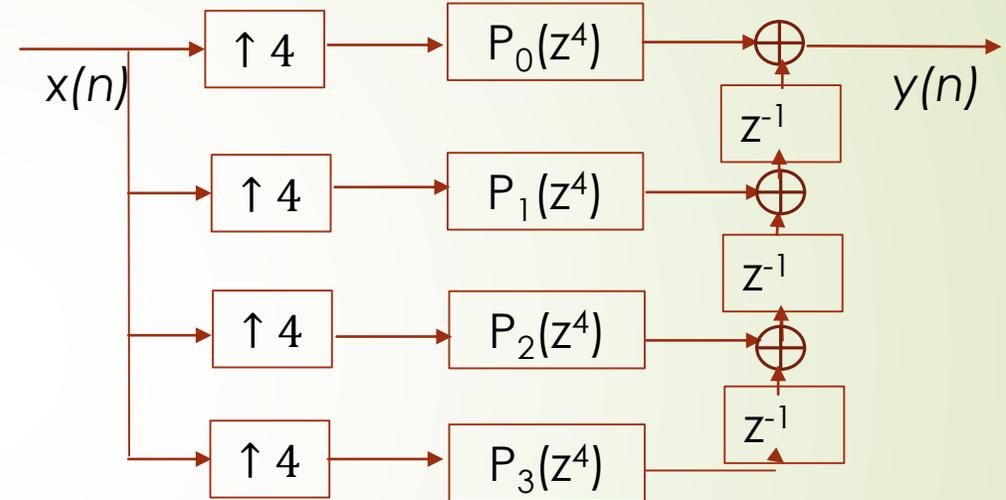
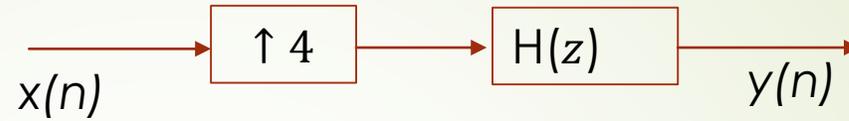
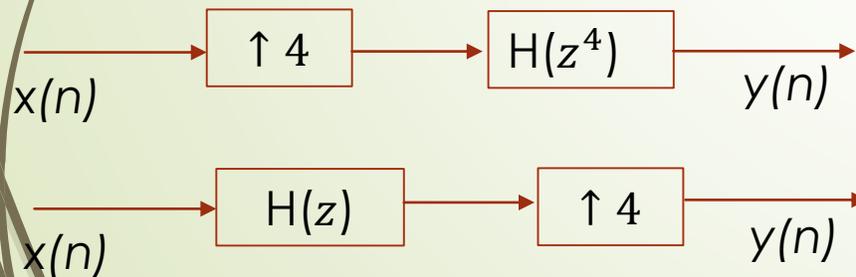


Interpolation Polyphases

Exemple : Interpolation de 4

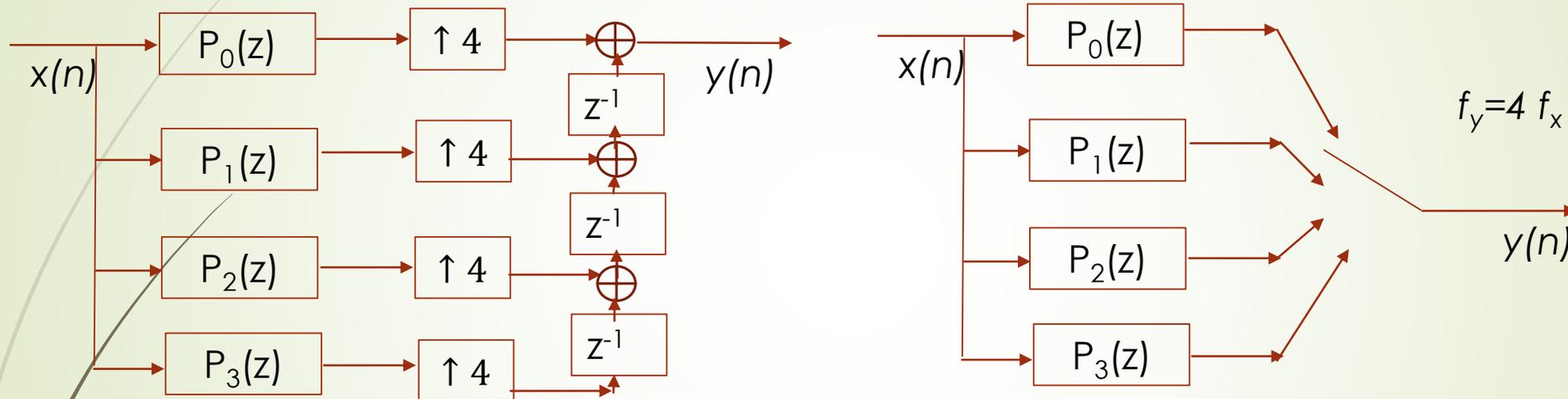


Structure transposée



Interpolation Polyphases

Modèle de commutateur

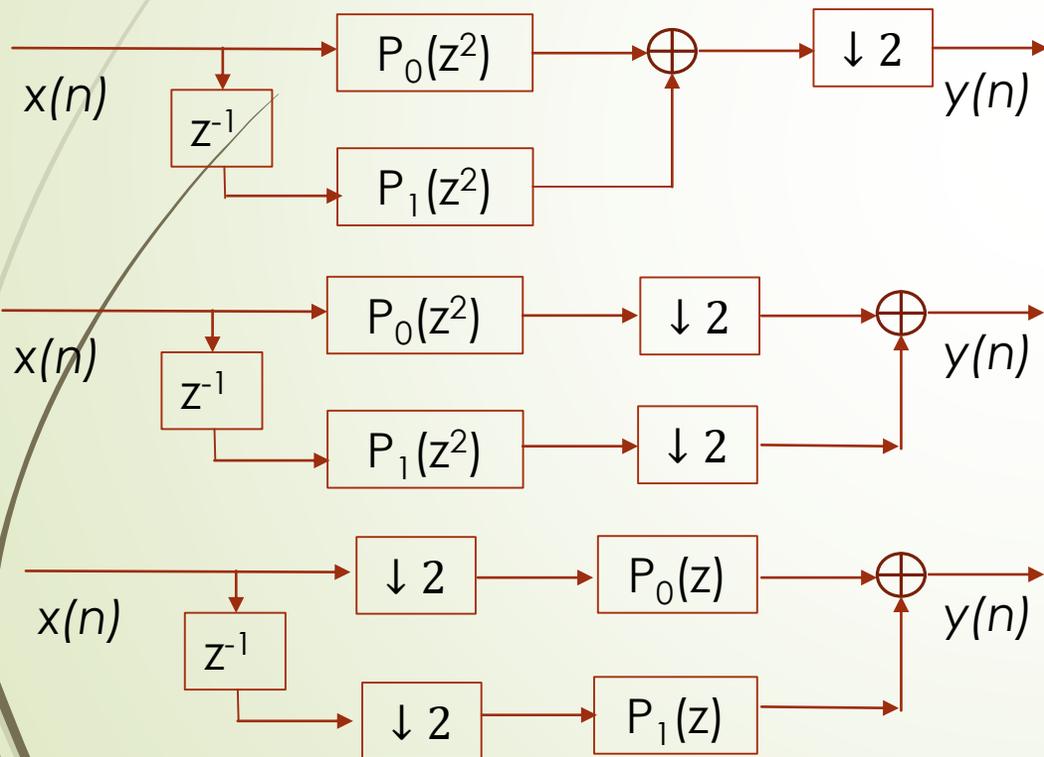


- A chaque instant d'échantillonnage en sortie du système une seule composante polyphase est non nulle.
- L'interpolation par $D = 4$, dans cet exemple, insère 3 zéros sur 4. A un instant donné, une seule branche contribue à la sommation et les autres sont à zéro.
- Le commutateur joue le rôle des délais et additionneurs.

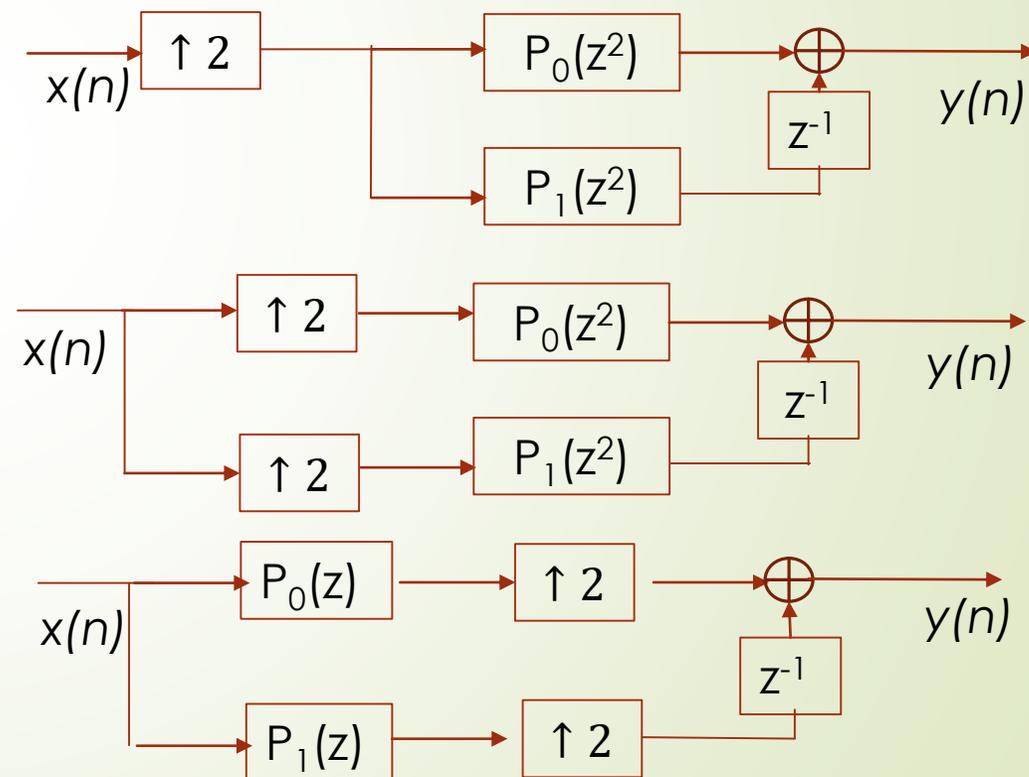
Décimation Polyphases

Exemple : Décimation et interpolation par 2

Structure polyphases pour une Décimation par 2



Structure polyphases pour une Interpolation par 2



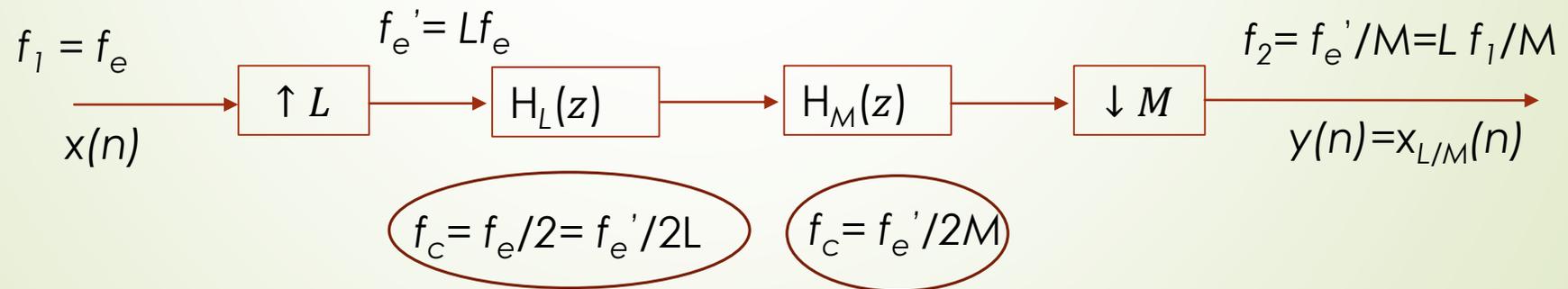
Filtrage Multi-cadences

Traitement Multi-Cadences

Changer numériquement la fréquence d'échantillonnage d'un signal $x(n)$ d'une fréquence d'échantillonnage f_1 à une fréquence d'échantillonnage f_2 où $f_2/f_1=L/M$.

Sur-échantillonner le signal $x(n)$ d'un facteur L puis à le décimer d'un facteur M .

- Le sur-échantillonnage par L doit être suivie d'un filtre passe-bas coupant à $f_e/2L$ pour supprimer les spectres dus au sur-échantillonnage où f_e est la fréquence d'échantillonnage du signal de sortie.
- La décimation par M doit être précédée d'un filtrage anti-repliement ayant une fréquence de coupure de $f_e/2M$, si f_e est la fréquence d'échantillonnage du signal d'entrée.



- Conserver un seul des deux filtres passe-bas : plus petite f_c soit $(\max(L,M))$

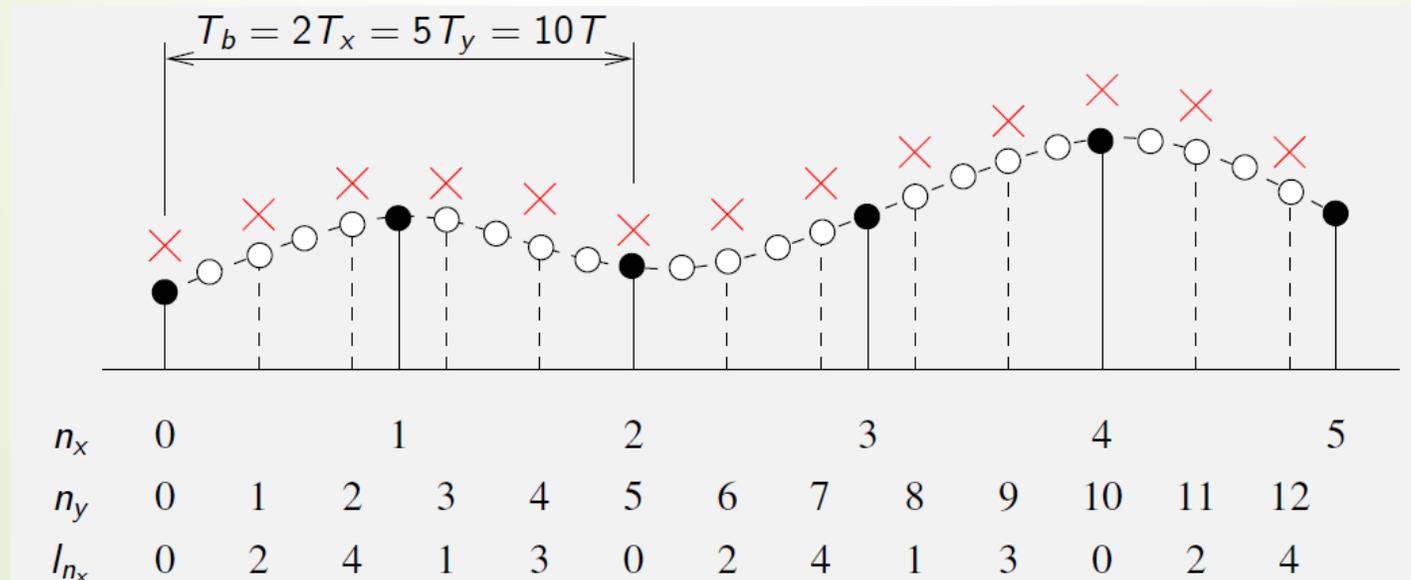
Traitement Multi-Cadences

Changer numériquement la fréquence d'échantillonnage d'un signal $x(n)$ d'une fréquence d'échantillonnage f_1 à une fréquence d'échantillonnage f_2 où $f_2/f_1=L/M$.

Sur-échantillonner le signal $x(n)$ d'un facteur L puis à le décimer d'un facteur M .

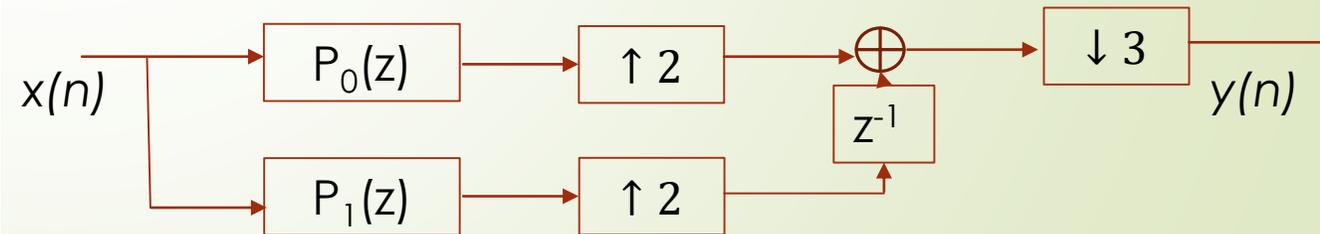
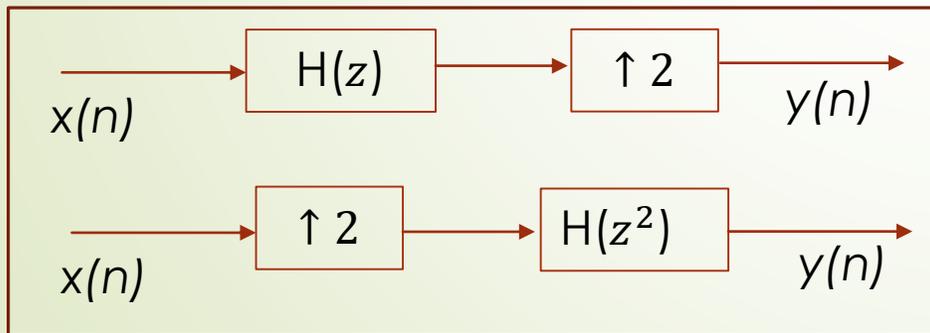
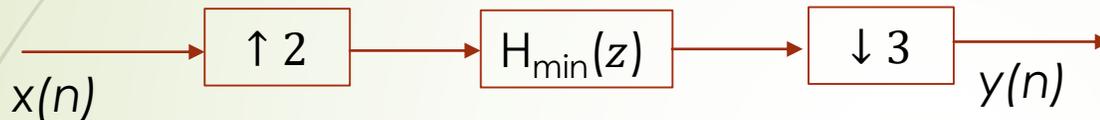
- Si L et M sont premiers entre eux, décimation et interpolation sont commutatifs

Exemple : Conversion où $L = 5$ et $M = 2$



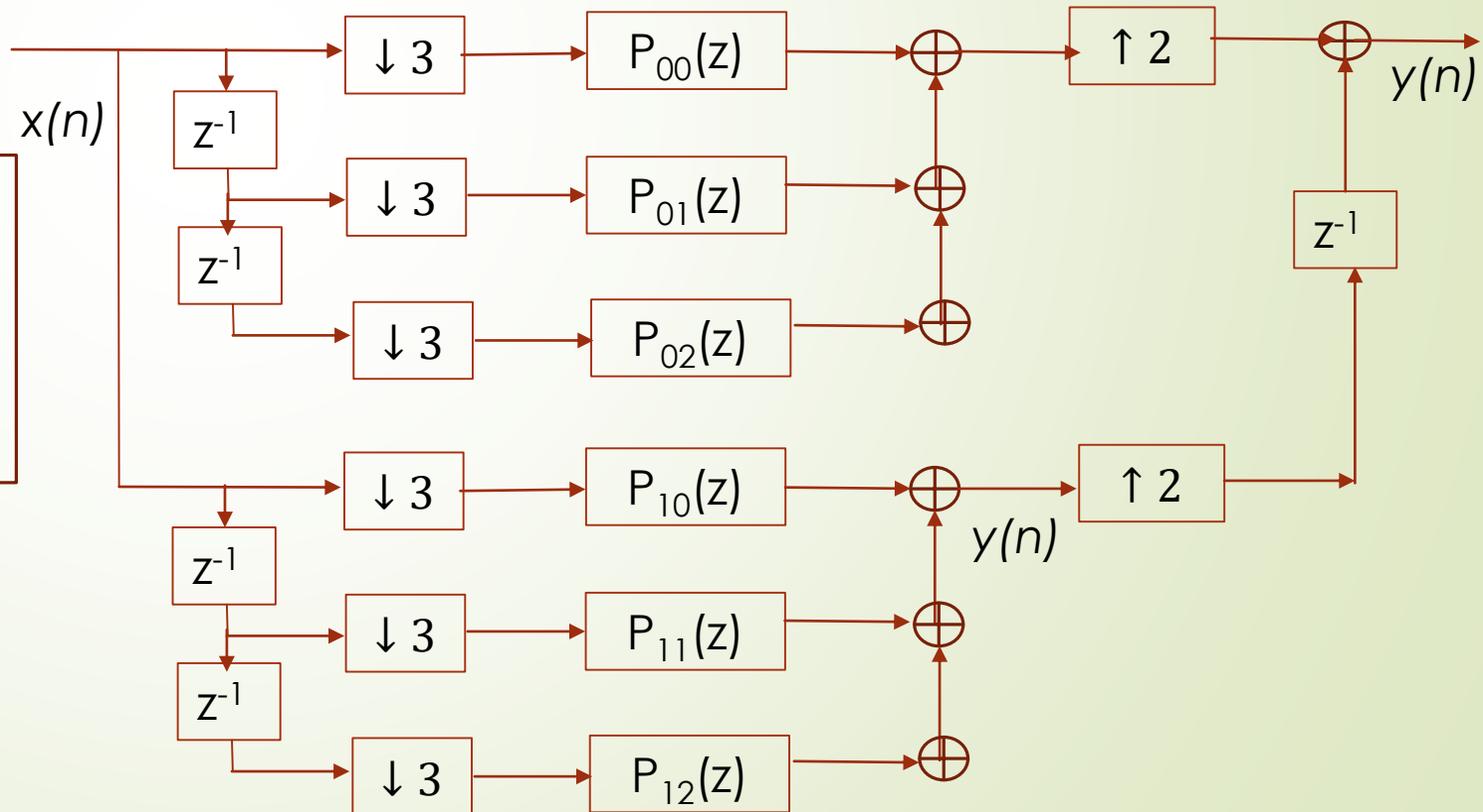
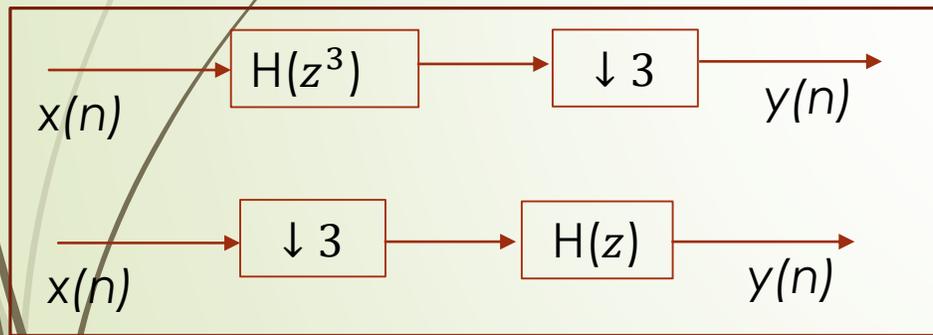
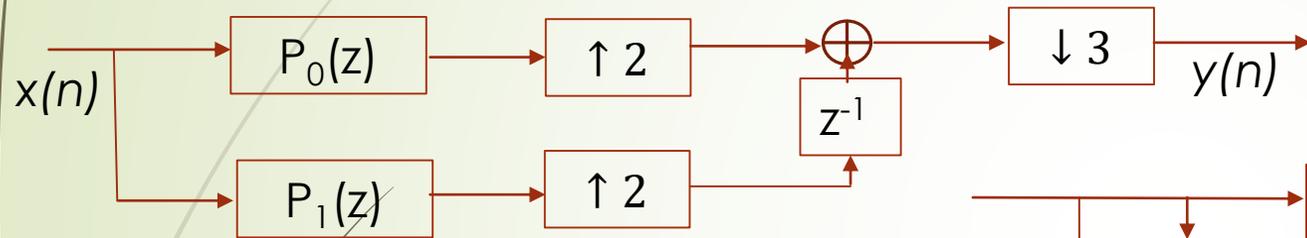
Traitement Multi-Cadences

Exemple : Réduction de fréquence d'échantillonnage d'un signal audio d'un facteur $2/3$ (passage de 48kHz à 32kHz). Sur-échantillonner le signal $x(n)$ d'un facteur 2 puis à le décimer d'un facteur 3.



Traitement Multi-Cadences

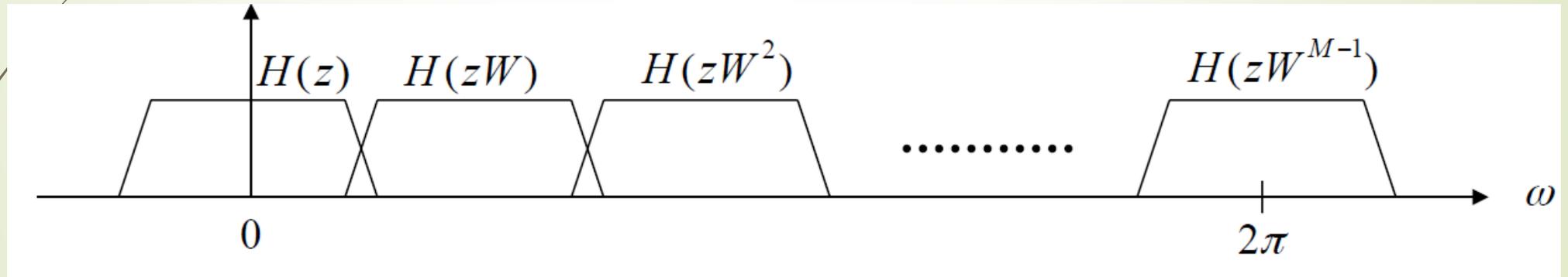
Exemple : Réduction de fréquence d'échantillonnage d'un signal audio d'un facteur $2/3$ (passage de 48kHz à 32kHz). Sur-échantillonner le signal $x(n)$ d'un facteur 2 puis à le décimer d'un facteur 3.



Filtrage Multi-cadences

Bancs de Filtrés

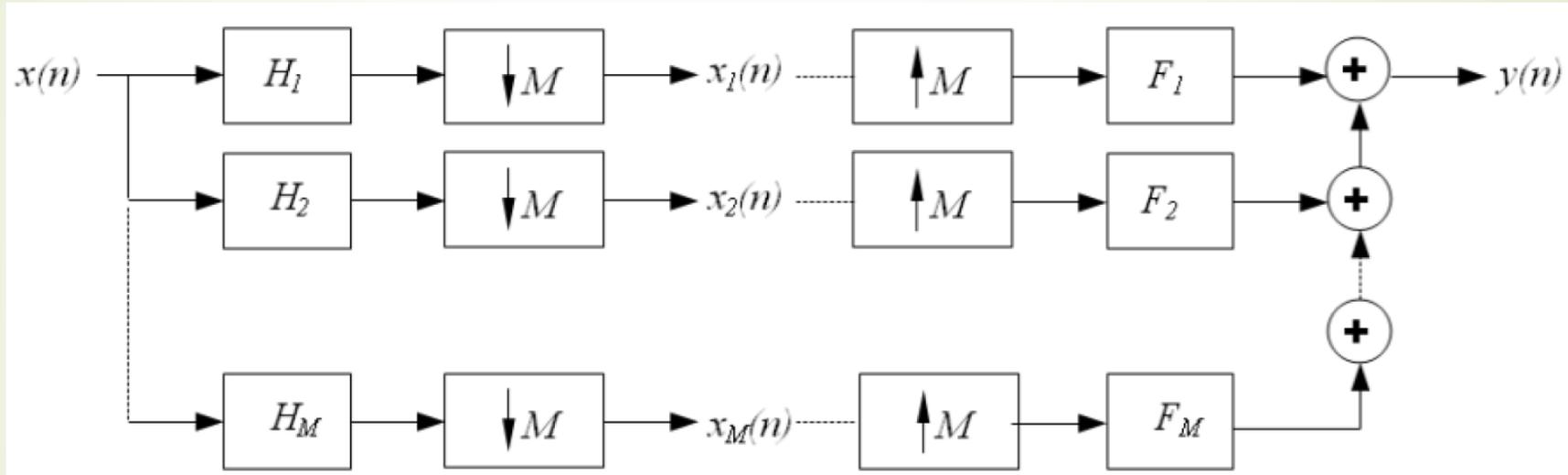
- Un banc de filtres est un ensemble de filtres, avec une entrée ou une sortie commune
- Un banc de filtres est un ensemble de filtres ($H_0(z); \dots; H_{M-1}(z)$) tel que tel que les bandes passantes des filtres forment (+/-) une partition de l'ensemble des fréquences et leurs réponses en fréquence se déduisent les unes des autres par certaines relations (exemple: $H_k(z) = H_0\left(ze^{-\frac{2\pi jk}{M}}\right) = H_0(zW^k)$)



- Chaque sortie du filtre d'un banc est à bande étroite, on peut donc la décimer pour la traiter plus rapidement.

Bancs de Filtrés

- Le banc décompose le signal $x(n)$ en M signaux de sous-bandes.



- $H_k(z)$ sont les filtres d'analyse (de décomposition)
- $F_k(z)$ sont les filtres de synthèse (de reconstruction)
- Reconstruction parfaite quand en l'absence de tout traitement dans les sous-bandes le signal de sortie $y(n)=x(n-k)$.

Bancs de Filtres

Rappels :

- Peigne de Dirac : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$ périodique de période $T_e \Rightarrow$ décomposable en série de Fourier telle que $C_n = \frac{1}{T_e} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi j n \frac{t}{T_e}}$ **En discret** $\sum \delta(n - mM) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{2\pi j m \frac{n}{M}}$

Décimation de M équivalente à un échantillonnage de M $\Rightarrow y(m) = y(n/M) = \sum x(n) \delta(n - mM)$

- Fonction de transfert $Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x(n) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{\frac{2\pi j k n}{M}} \right) z^{-n/M} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(e^{-\frac{2\pi j k}{M}} z^{\frac{1}{M}} \right)^{-n} \right)$

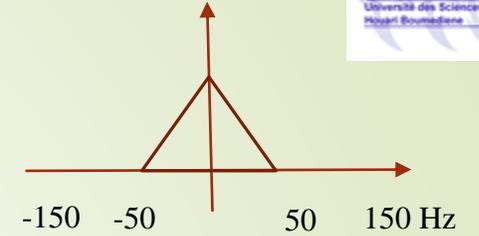
$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(W_M^k z^{\frac{1}{M}} \right)$ avec $W_M = e^{-\frac{2\pi j}{M}}$

- Réponse en fréquence

$y(m) = x(n) \cdot \sum \delta(n - mM) \Rightarrow Y(f) = X(f) * \frac{f_e}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \delta \left(f - \frac{mf_e}{M} \right) = \frac{f_e}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X \left(f - \frac{mf_e}{M} \right) \Rightarrow$ **Périodisation de $\frac{f_e}{M}$**

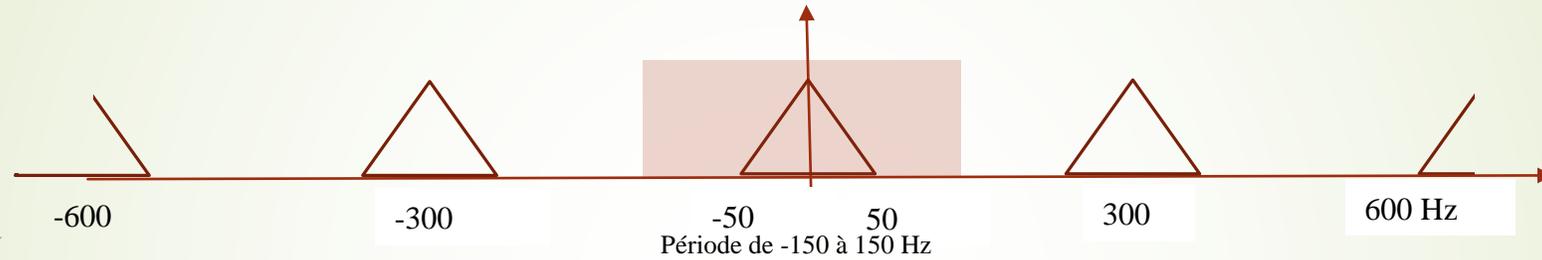
Interpolation M $\Rightarrow Y(z) = X(z^M)$

Bancs de Filtres

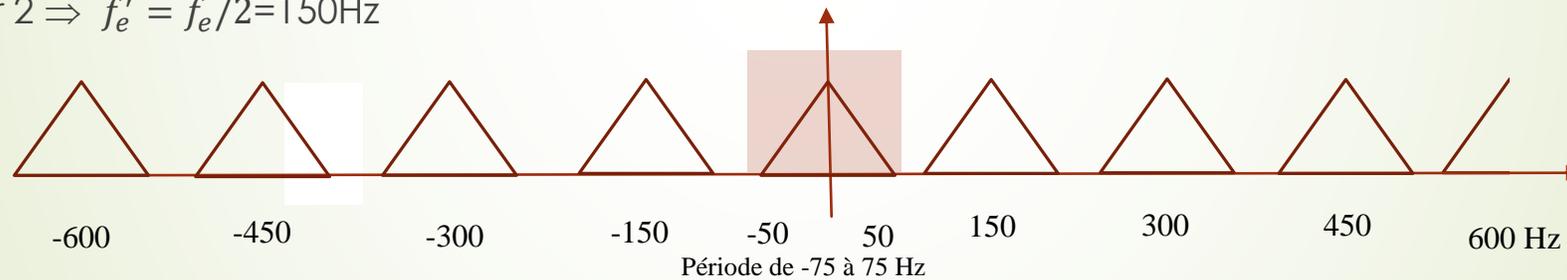


Rappels : Exemple d'une réponse en fréquence du signal décimé par 2 puis par 4

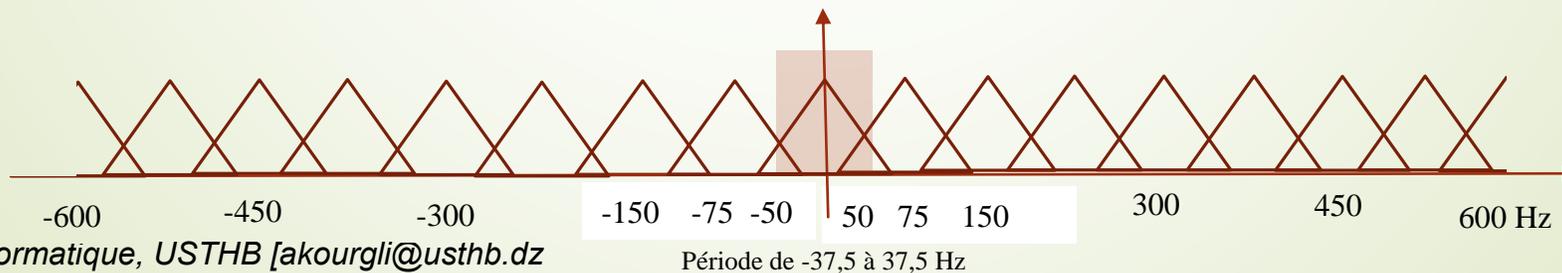
➤ Signal original

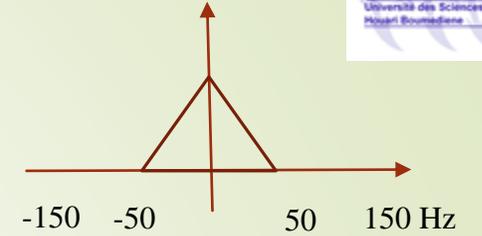


➤ Décimation par 2 $\Rightarrow f'_e = f_e/2 = 150\text{Hz}$



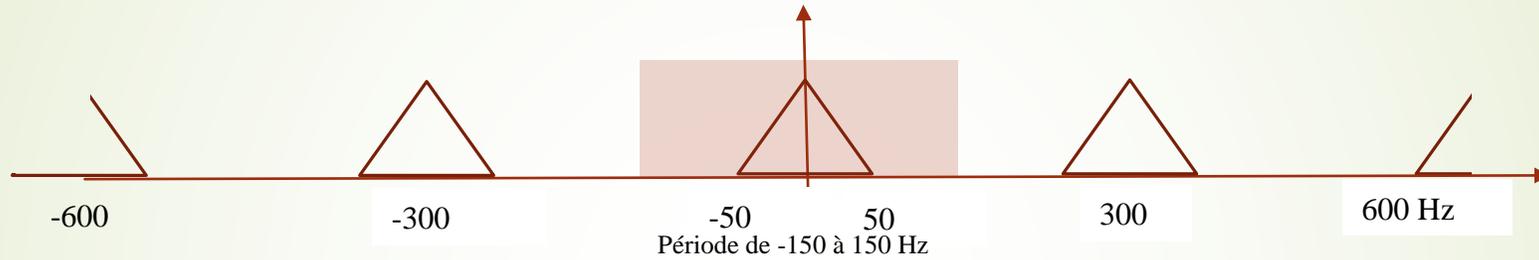
➤ Décimation par 4 $\Rightarrow f'_e = f_e/4 = 75\text{Hz}$



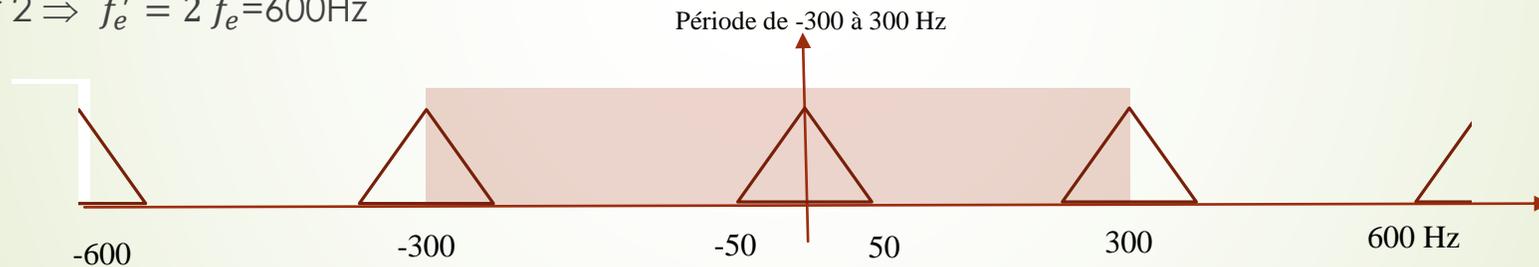


Rappels : Exemple d'une réponse en fréquence du signal interpolé par 2 puis par 4

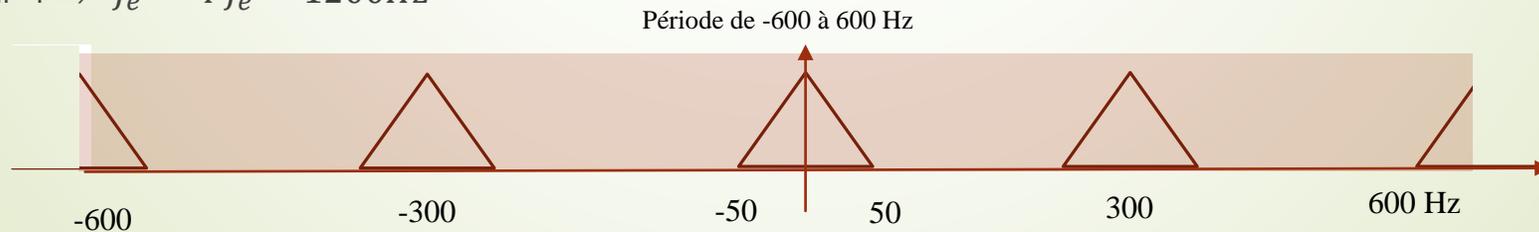
➤ Signal original



➤ Interpolation par 2 $\Rightarrow f'_e = 2 f_e = 600\text{Hz}$

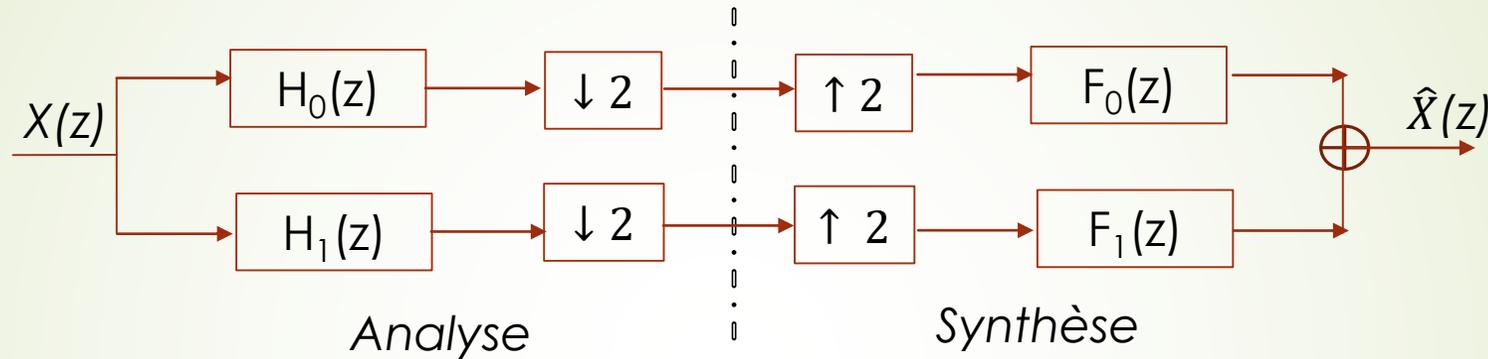


➤ Interpolation par 4 $\Rightarrow f'_e = 4 f_e = 1200\text{Hz}$



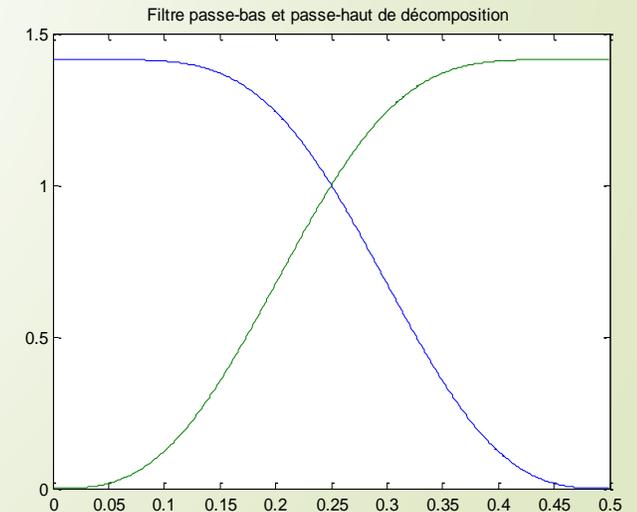
Bancs de Filtrés

Exemple : Banc de filtres à 2 canaux



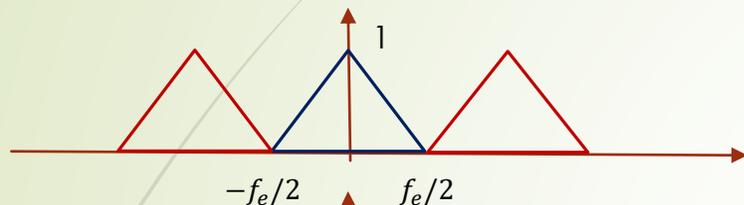
- $H_0(z)$ et $H_1(z)$ les filtres passe bas et passe haut du banc d'analyse
- $F_0(z)$ et $F_1(z)$ les filtres passe bas et passe haut du banc de synthèse
- Echantillonnage critique

si $H_1(z) = H_0(-z^{-1})$, soit $H_1(f) = H_0(\frac{f_e}{2} - f)$

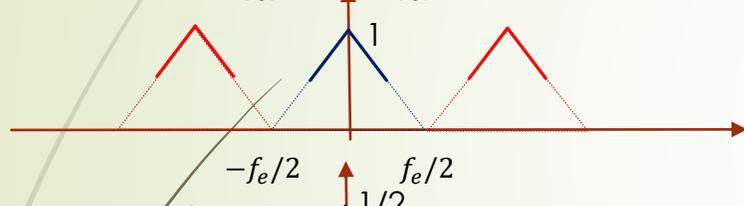


Bancs de Filtrés

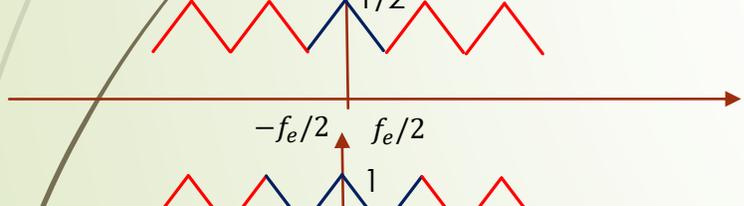
Exemple : Banc de filtres à 2 canaux



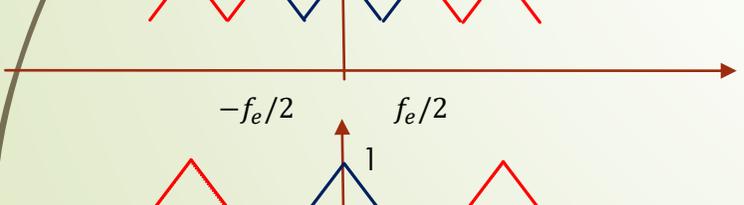
P-bas $H_0(z)$



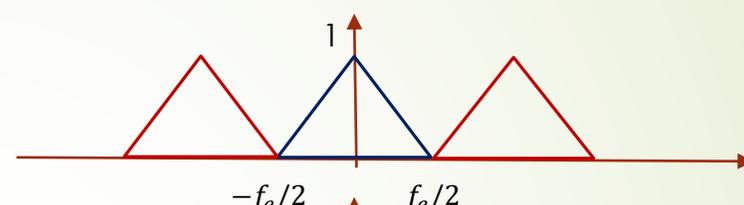
↓ 2



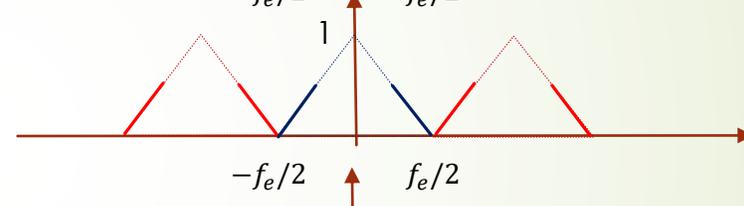
↑ 2



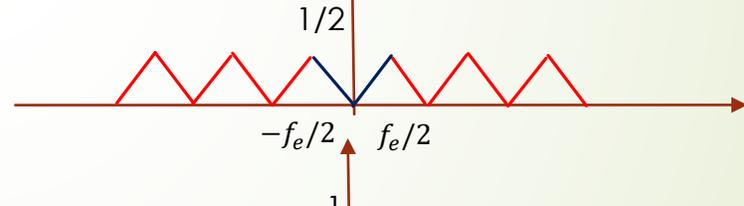
P-bas $F_0(z)$



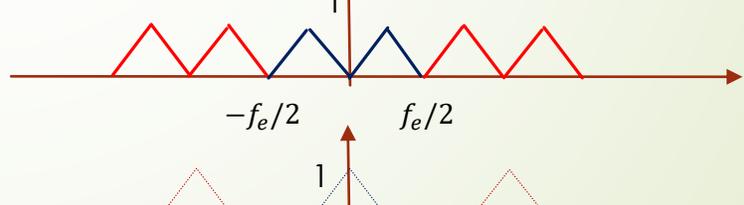
P-haut $H_1(z)$



↓ 2



↑ 2

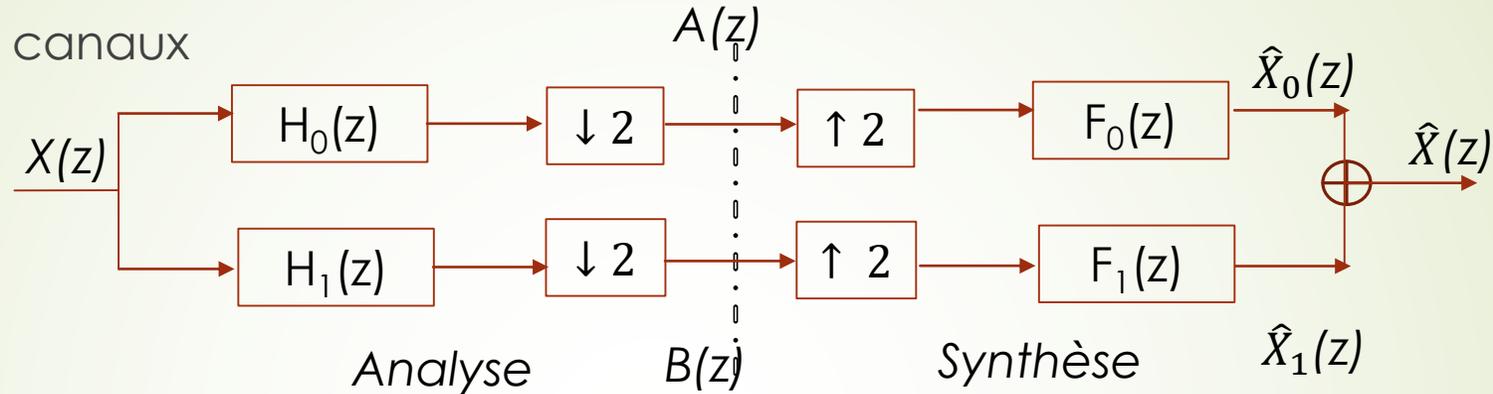


P-haut $F_1(z)$



Bancs de Filtrés

Banc de filtres à 2 canaux



➤ $A(z) = \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 H_0 \left(W_2^k z^{\frac{1}{2}} \right) X \left(W_2^k z^{\frac{1}{2}} \right) \right)$ avec $W_2^1 = e^{-\frac{2\pi j}{2}} = -1$

⇒ $A(z) = \frac{1}{2} \left(H_0 \left(z^{\frac{1}{2}} \right) X \left(z^{\frac{1}{2}} \right) + H_0 \left(-z^{\frac{1}{2}} \right) X \left(-z^{\frac{1}{2}} \right) \right)$

➤ $\hat{X}_0(z) = A(z^2)F_0(z) \Rightarrow \hat{X}_0(z) = F_0(z) \frac{1}{2} \left(H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z) \right)$

➤ $\hat{X}_1(z) = F_1(z) \frac{1}{2} \left(H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z) \right)$

⇒ $\hat{X}(z) = \frac{1}{2} \left(F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) \right) X(z) + \frac{1}{2} \left(F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) \right) X(-z)$

Bancs de Filtrés

Banc de filtres à 2 canaux

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2}(F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z))X(z) + \frac{1}{2}(F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z))X(-z)$$

Reconstruction si $\hat{x}(n) = x(n)$ à un retard près, soit :

- $F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) = 2z^{-k}$
- $F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_0(z) = -H_1(-z) \text{ et } F_1(z) = H_0(-z) \\ F_0(z) = H_1(-z) \text{ et } F_1(z) = -H_0(-z) \end{cases} \text{ ou}$

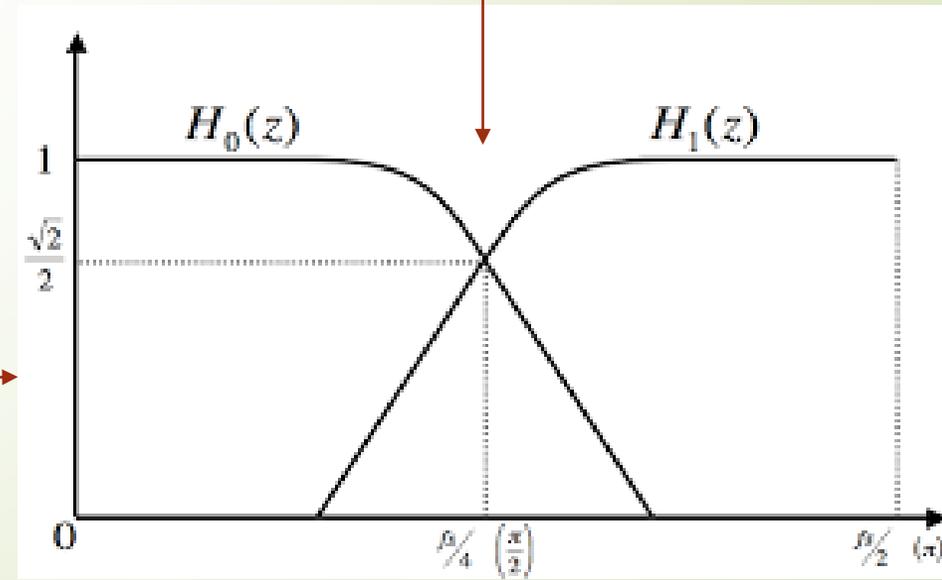
Éliminer le terme en $X(-z) \Rightarrow$ **Les filtres Q.M.F. (Quadrature Mirror Filter)**

- $H_1(z) = H_0(-z)$ soit $h_1(n) = (-1)^n h_0(n)$
- $F_0(z) = H_0(z)$ soit $f_0(n) = h_0(n)$
- $F_1(z) = -H_0(-z)$ soit $f_1(n) = -(-1)^n g_0(n)$

$$H_1(z) = H_0(-z) \Rightarrow H_1(f) = H_0\left(f - \frac{f_e}{2}\right)$$

$$H_0^2(z) + H_1^2(z) = 1$$

Effet miroir autour de $f_e/2$



Bancs de Filtrés

Banc de filtres à 2 canaux

Éliminer le terme en $X(-z) \Rightarrow$ Les filtres C.Q.F. (Conjugate Quadrature Filter)

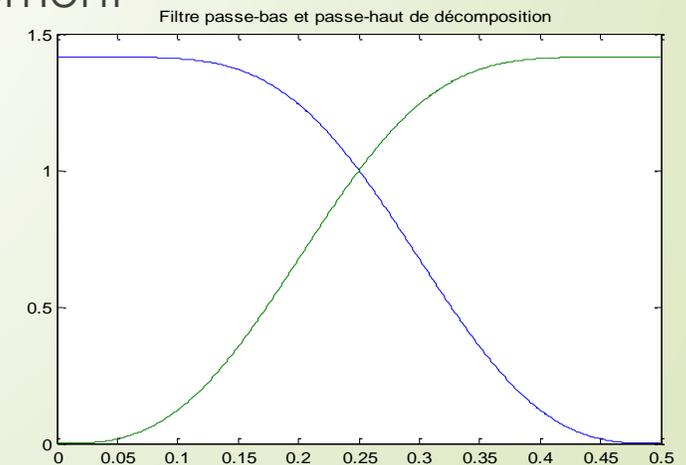
➤ $H_1(z) = -H_0(-z^{-1})z^{-(L-1)}$ soit $h_1(n) = (-1)^n h_0(L-1-n)$

➤ $F_0(z) = H_1(-z) = H_0(z^{-1})z^{-(L-1)}$ soit $f_0(n) = h_0(L-1-n)$

➤ $F_1(z) = -H_0(-z)$ soit $f_1(n) = -(-1)^n h_0(n)$

Reconstruction rigoureusement exacte du signal d'entrée contrairement aux filtres Q.M.F. mais complexité calculatoire plus importante

- Quadrature : Les 2 filtres se coupent à $f_e/4$. La bande passante utilisée par chacun des filtres, est la moitié de la bande initiale
 La somme de leur module au carré vaut 2



Bancs de Filtrés

Banc de filtres à 2 canaux (Décomposition polyphases)

