Les ondelettes discrètes

Faculté d'Electronique et d'Informatique, USTHB [akourgli@usthb.dz
http://perso.usthb.dz/~akourgli/

Introduction

- ➢ Signaux du monde réel (signaux vocaux et les images)ne sont pas stationnaires.
- ➢ Essentiel de l'information dans l'évolution de leurs caractéristiques (statistiques, fréquentielles, temporelles, spatiales)
- Analyse de Fourier
- ✓ Caractérisation globale du signal (intégrale de -∞ à +∞),
- ✓ Aucune localisation temporelle ou spatiale

- Solution : Une transformation qui apporte l'information sur le contenu fréquentiel tout en préservant la localisation (temporelle ou spatiale) $\Rightarrow$ Représentation temps/fréquence ou espace/échelle
- ➢ Transformée de Fourier à fenêtre
- ✓ Transformée de Wigner-Ville
- ✓ Transformée en Ondelettes.

Transformée de Fourier à Court Terme

- Appliquer la TF sur de petites portions $\Rightarrow$ Spectre local

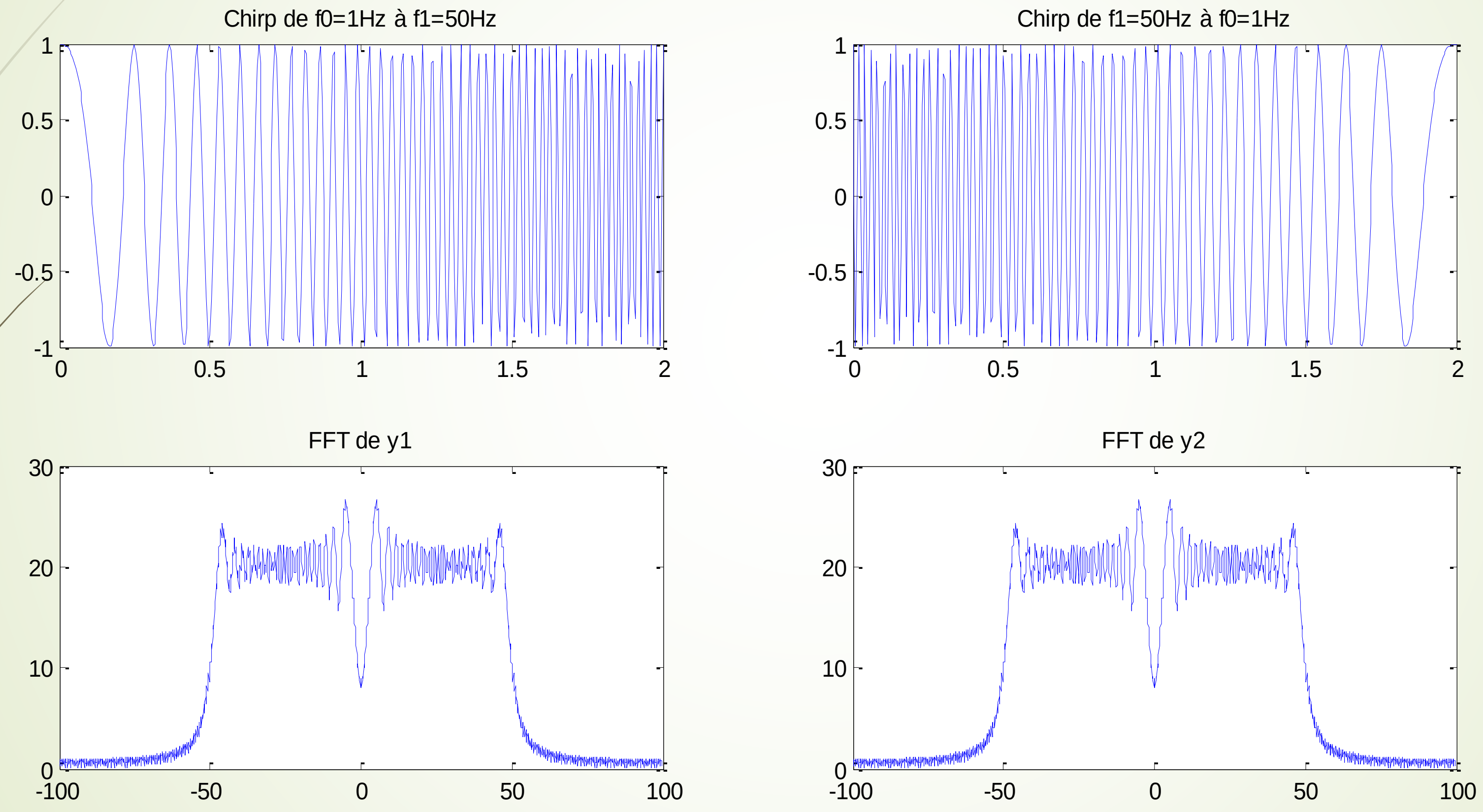
$$TFCT(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h^*(\tau-t)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \qquad S_x(t,f)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h^*(\tau-t)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\right|^2$$

h(t) : fenêtre de pondération (Hammng, Blackman,..) *Spectrogramme*

- Choisir la bonne fenêtre (largeur lobe principal, amplitude lobes secondaires)
- Taux de recouvrement entre les fenêtres
- Compromis Résolution temporelle- Résolution fréquentielle (Gaussienne Meilleure)

Transformée de Fourier à Court Terme

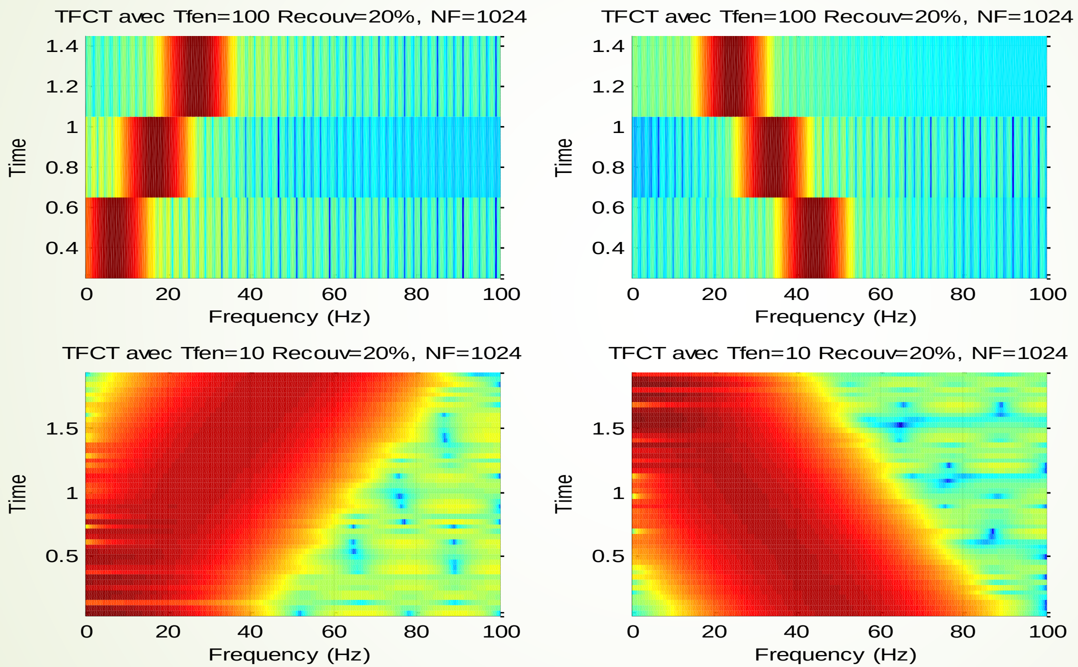
- **Exemple** : **TF** d'un Chirp allant de f1 puis f2 et inversement



- Pas de localisation temporelle du contenu fréquentiel

Transformée de Fourier à Court Terme

- **Exemple** : **TFCT** d'un Chirp allant de f1 puis f2 et inversement



- Localisation de la distribution de l'énergie simultanément en temps et fréquence
- Taille de fenêtre unique ⇒ choisir une fenêtre et une forme d'onde (signal oscillant dans une fenêtre temporelle donnée) que l'on pourrait dilater (pour les basses fréquences) et contracter (fréquences élevées) à volonté ⇒ Ondelettes

Ondelettes continues

- Introduite par *Jean Morlet* en 1981 pour résoudre des problèmes de signaux sismiques en recherche pétrolière.
- Partant d'une fenêtre $\psi(t)$ (dite fonction mère) ⇒ Générer un **ensemble** de fonctions de base similaire par dilatation (indice a) et translation (indice *b*) d'un seul prototype $\psi_{a,b}(t)$:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad a > 0$$

  - ***a > 0*** est un paramètre d'**échelle de contraction** (*a < 1*) ou de **dilatation** (*a > 1*) de la fenêtre
  - ***b*** une **translation** de la fenêtre.

- En décomposant le signal x*(t)* sur cette famille, on obtient ainsi les coefficients d'ondelettes

$$WT_{x,\psi}(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi_{a,b}^{*}(t)\ dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)^{*} dt$$

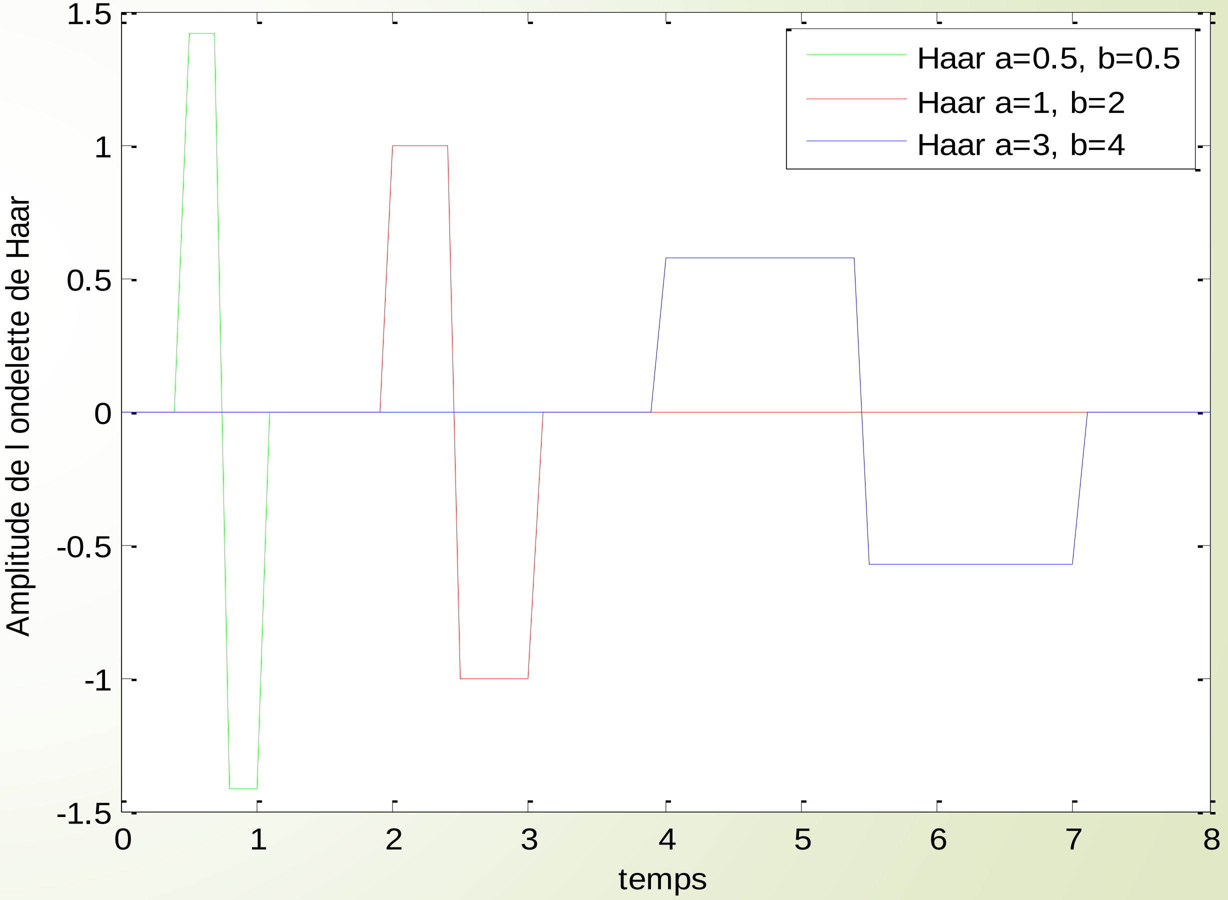
- L'ondelette mère $\psi(t)$ devra avoir une bonne localisation (nulle en dehors d'un certain intervalle), et devra être oscillante le nombre de moments nuls correspond au nombre d'oscillations).

Ondelettes continues

La CWT est un opérateur linéaire, invariant par translation, et par dilatation. Elle est unique pour une ondelette donnée.

Exemple : Ondelette de Haar

- $$\psi(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ -1 & si \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$
- $$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} & si \quad b \le t \le b + \frac{a}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{a}} & si \quad b + \frac{a}{2} \le t \le b + a \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



Exemples d'autres Ondelettes

- Chapeau mexicain $\psi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right)e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$
- Morlet $\psi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}e^{-2\pi jft}$

Conservation de $\psi_{a,b}$ soit $\|\psi_{a,b}\| = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|^2 dt = \|\psi\|^2 \quad \forall a$

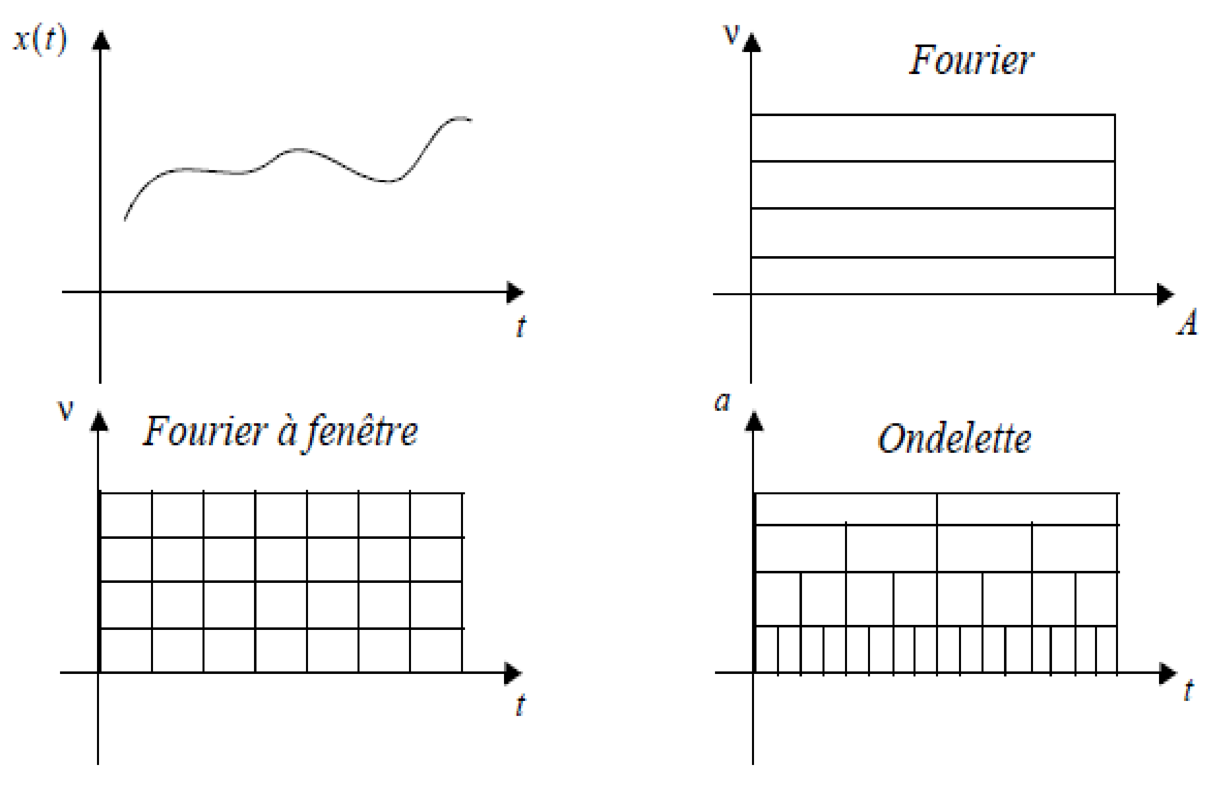
Ondelettes continues

- L'analyse par ondelettes commence avec une fenêtre d'analyse ***a*** de largeur très fine, la translate sur tout le signal puis recommence en augmentant l'échelle.

- Ses coefficients mesurent, en un certain sens, les fluctuations du signal $x(t)$ autour du point $t = b$, à l'échelle fournie par a.

- En diminuant a, le support de $\psi_{a,b}$ réduit en temps et donc couvre une plage en fréquence plus grande et vice versa.

- Donc $1/a$ est proportionnel à une fréquence.



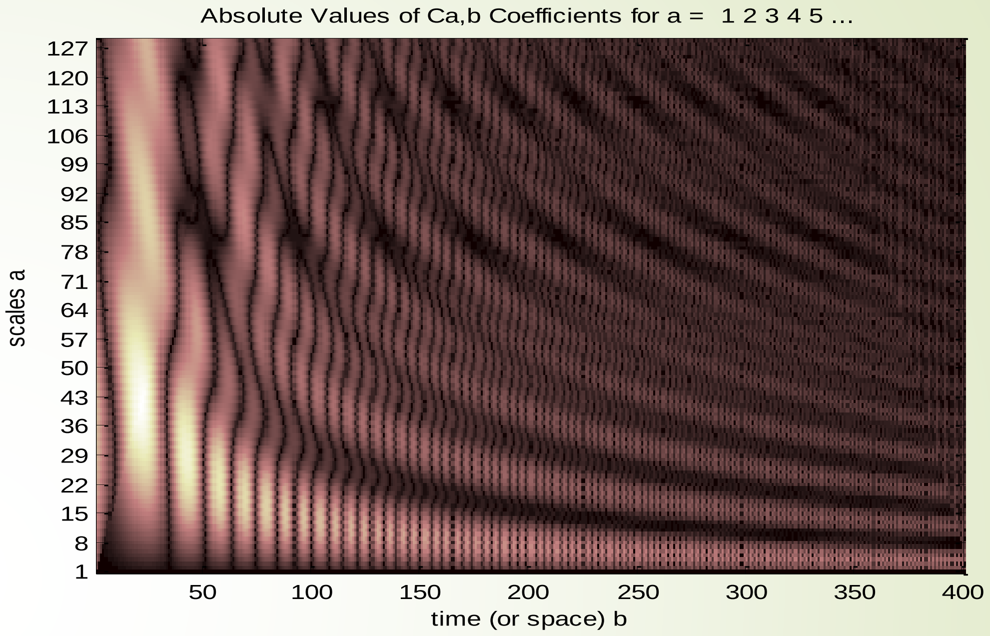
Ondelettes continues

- L’analyse par ondelettes commence avec une fenêtre d’analyse ***a*** de largeur très fine, la translate sur tout le signal puis recommence en augmentant l’échelle.

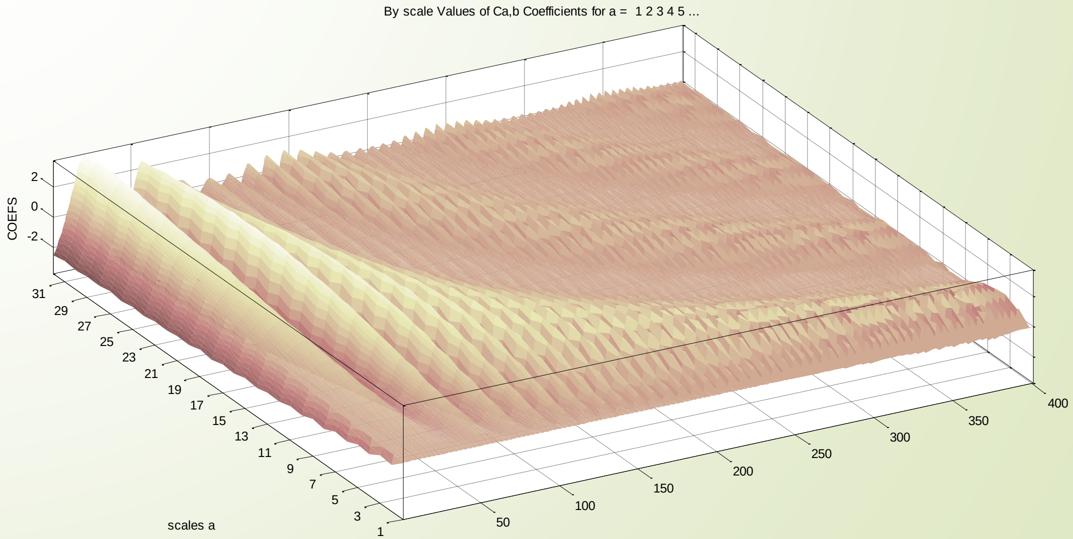
- Ses coefficients mesurent, en un certain sens, les fluctuations du signal $x(t)$ autour du point $t = b$, à l’échelle fournie par a.

- En diminuant a, le support de $\psi_{a,b}$ réduit en temps et donc couvre une plage en fréquence plus grande et vice versa.

- Redondances $\Rightarrow$ Ondelettes discrètes

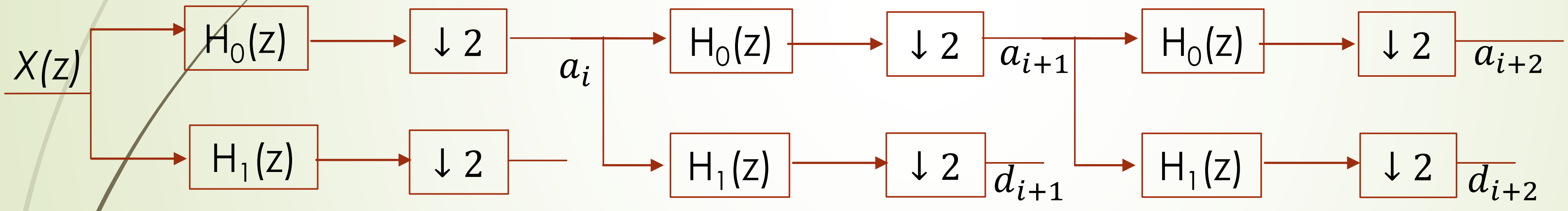


Analyse du signal chirp avec l’ondelette de Haar



Ondelettes discrètes dyadiques

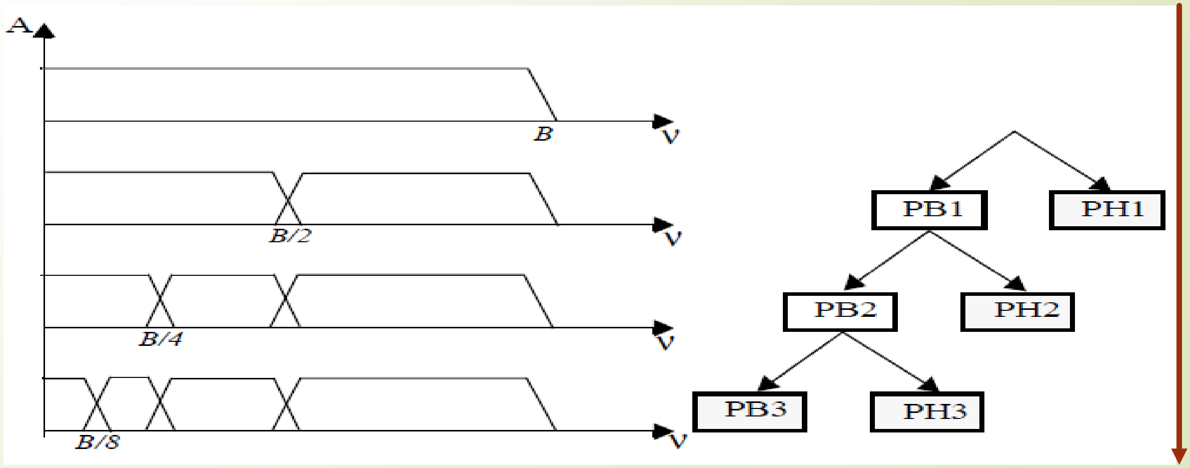
- Quantité d'information à traiter importante ⇒ Optimiser les calculs et la taille des données.
- L'analyse multirésolution développée par Meyer et Mallat permet d'analyser un signal à différentes échelles à travers des opérateurs linéaires à des niveaux de résolutions correspondant à différentes bandes de fréquences spatiales.
- Elle se prête bien à une décomposition/reconstruction par banc de filtres



Décomposition

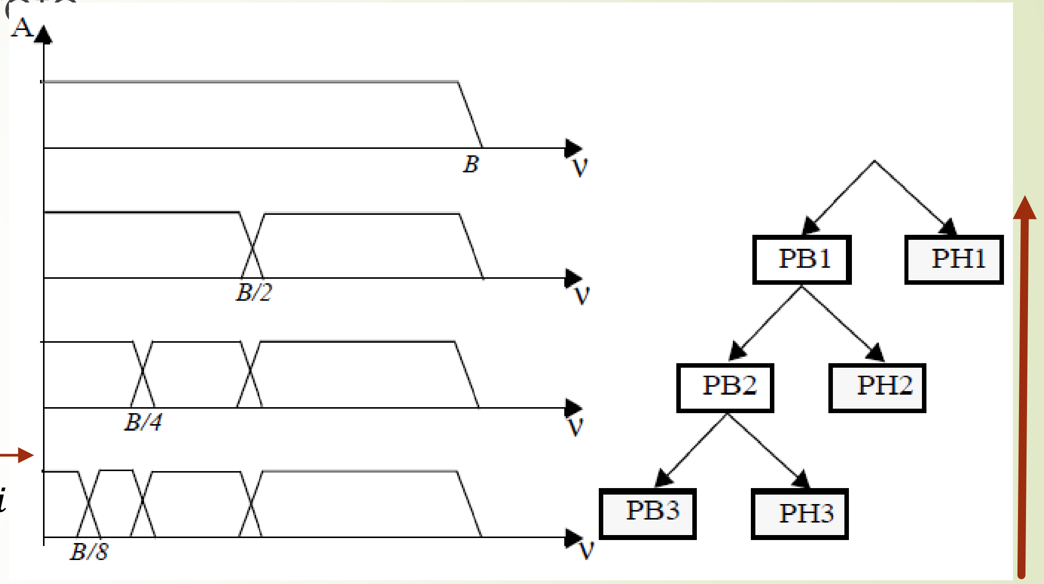
$$a_{i+1}[n] = \sum_k h_0[2n-k]a_i[k]$$

$$d_{i+1}[n] = \sum_k h_1[2n-k]a_i[k]$$



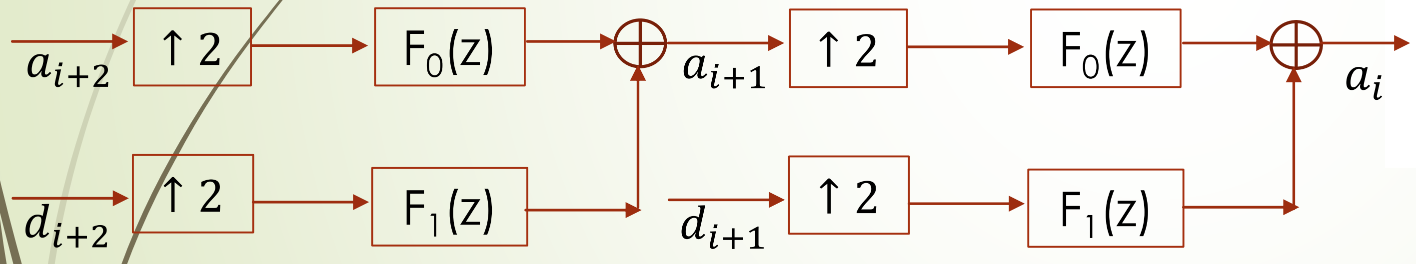
Ondelettes discrètes dyadiques

- La multirésolution est basée sur une transformation discrète qui diffère de la précédente d'un facteur 2 (transformation dyadique) : a=2^{-j} b=k 2^{-j}

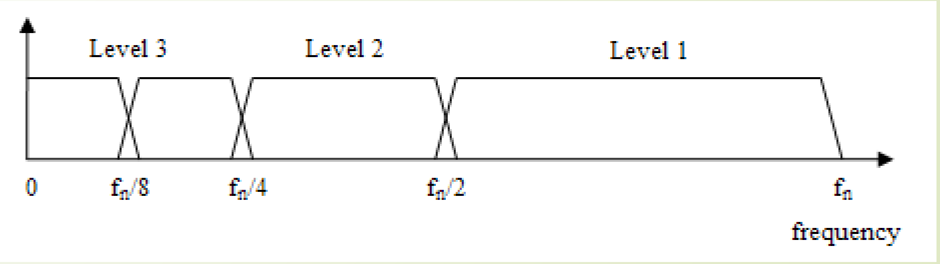


Reconstruction

$$a_i[n] = \sum_k \{f_0[n-k]a_{i+1}[k] + f_1[n-k]d_{i+1}[k]\}$$



Reconstruction



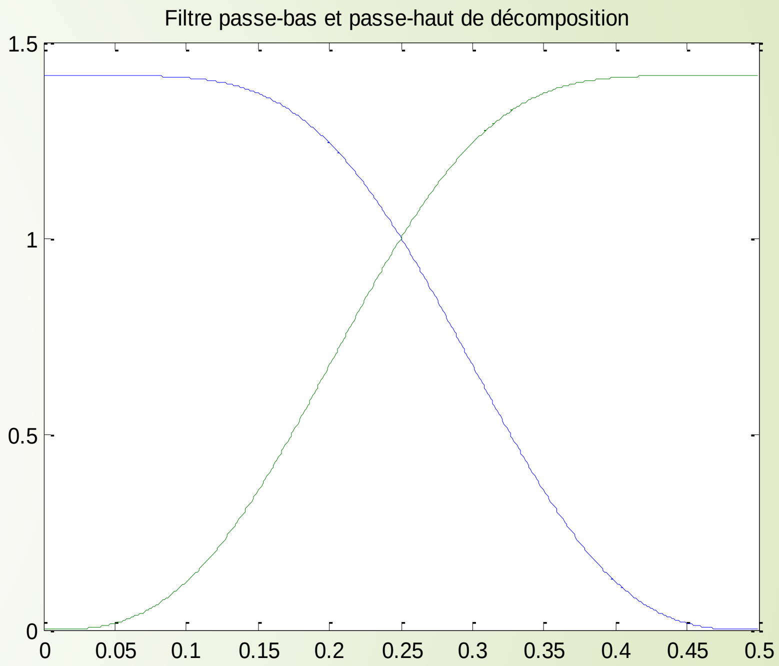
Ondelettes discrètes dyadiques

- L'ondelette doit être très compacte $\Rightarrow$ Filtres à réponse impulsionnelle finie (ex Daubechies, Haar)
- Reconstruction parfaite $\Rightarrow$ Filtres miroirs conjugués.

$H_1(z) = -H_0(-z^{-1})z^{-(L-1)}$ soit $h_1(n) = (-1)^n h_0(L-1-n)$

$F_0(z) = H_1(-z) = H_0(z^{-1})z^{-(L-1)}$ soit $f_0(n) = h_0(L-1-n)$

$F_1(z) = -H_0(-z)$ soit $f_1(n) = -(-1)^n h_0(n)$



- **Exemple 1**

$$H_0(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}$$

$$\Rightarrow H_1(z) = -(b_0 - b_1 z^{1} + b_2 z^{2} - b_3 z^{3})z^{-3} = b_3 - b_2 z^{-1} + b_1 z^{-2} - b_0 z^{-3}$$

$$\Rightarrow F_0(z) = (b_0 + b_1 z^{1} + b_2 z^{2} + b_3 z^{3})z^{-3} = b_3 + b_2 z^{-1} + b_1 z^{-2} + b_0 z^{-3}$$

$$\Rightarrow F_1(z) = -(b_0 - b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} - b_3 z^{-3}) = -b_0 + b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}$$

Ondelettes discrètes dyadiques

Exemple 3

- **Exemple 2** : Ondelette à 6 coefficients

Sous matlab Il commence à 1

$H_1(z) = H_0(-z^{-1})z^{-(L-1)}$ soit $h_1(n) = -(-1)^n h_0(L-1-n)$

h_0= [0.2352 0.5706 0.3252 -0.0955 -0.0604 0.0249]

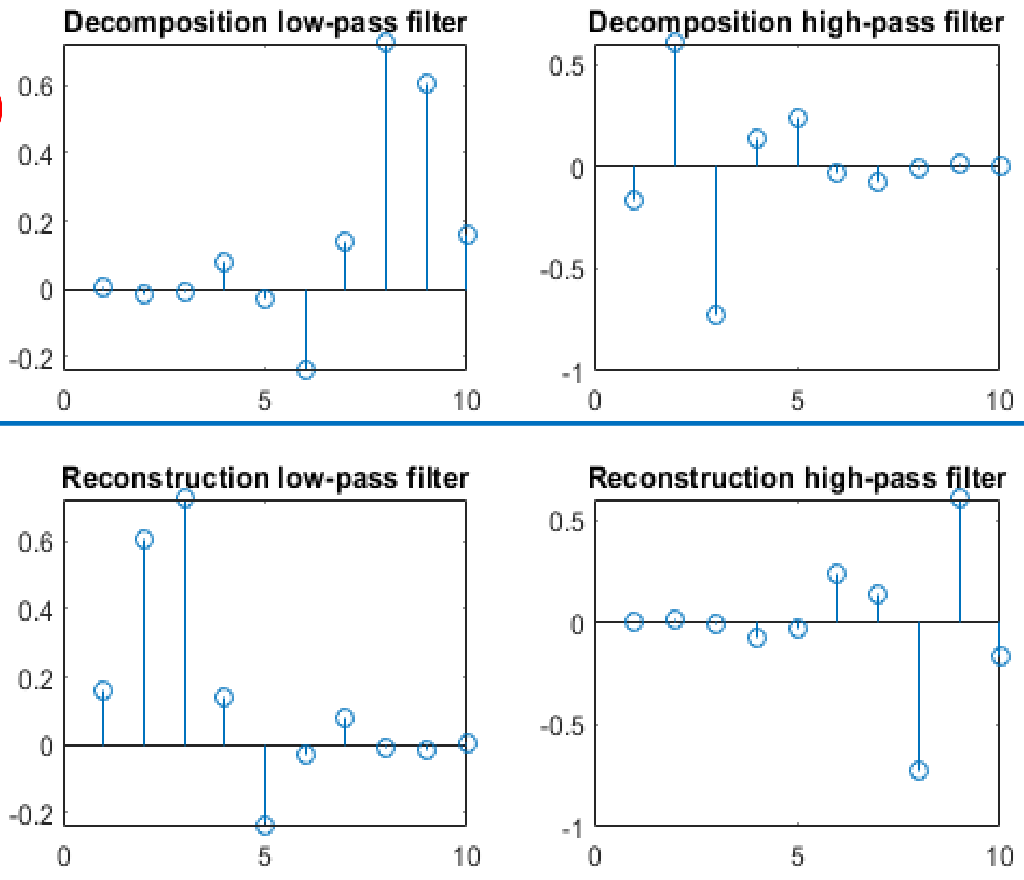
- h_1 est obtenu en retournant h dans le temps et en inversant le signe des coefficients impairs

h_1= [-0.0249 -0.0604 0.0955 0.3252 -0.5706 0.2352]

- Filtres de reconstruction identiques aux filtres d'analyse mais retournés dans le temps):

  f_0= [0.0249 -0.0604 -0.0955 0.3252 0.5706 0.2352],

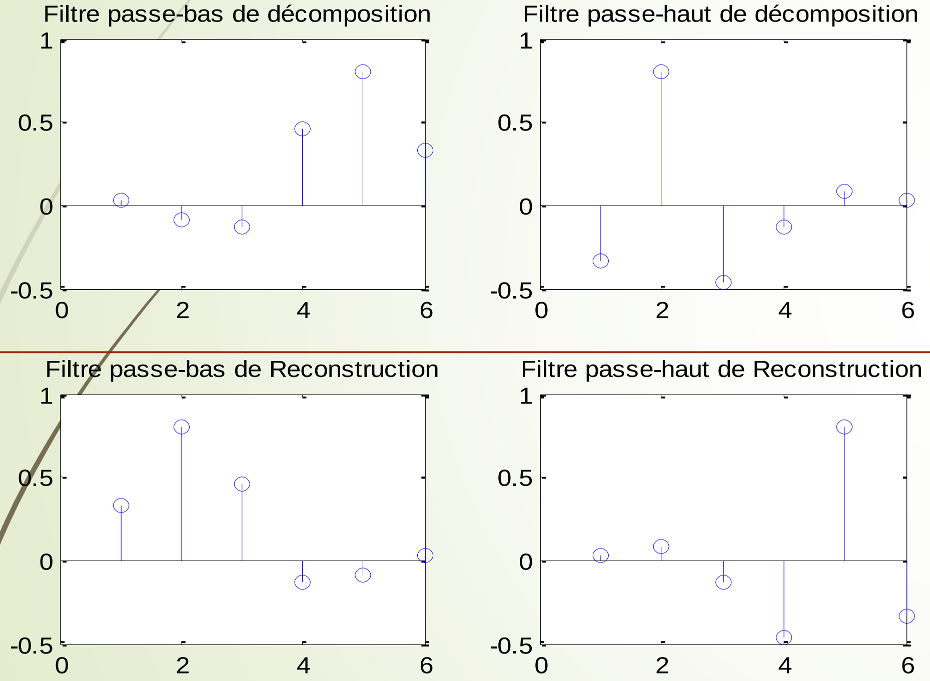
  f_1= [0.2352 -0.5706 0.3252 0.0955 -0.0604 -0.0249]

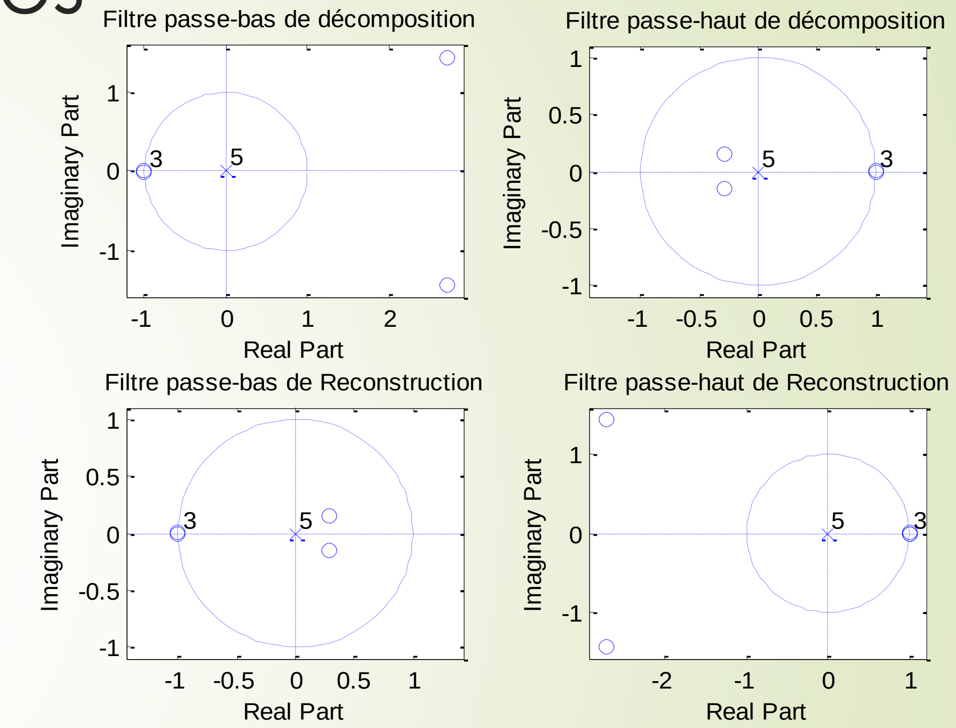


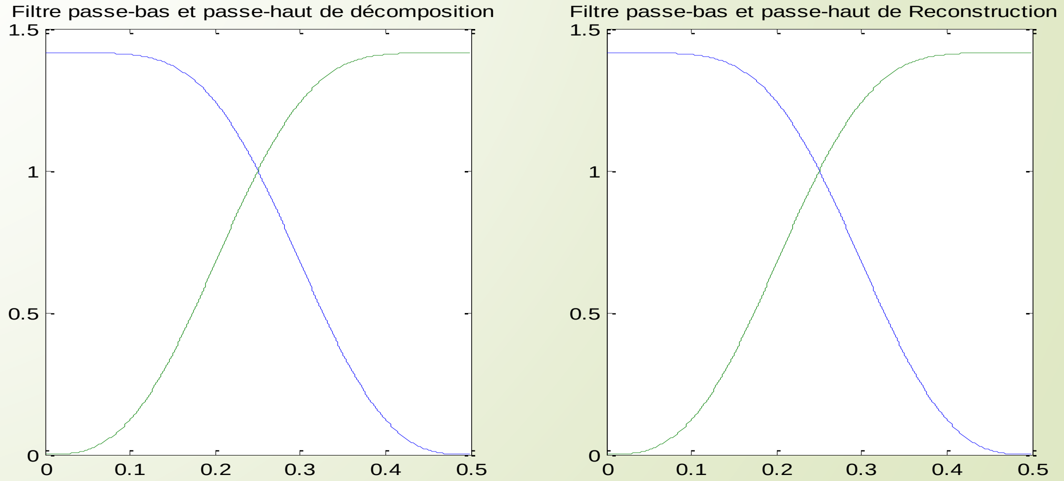
The four filters for db5

Ondelettes discrètes dyadiques

- **Exemple 4** : Ondelette de Daubechies 3







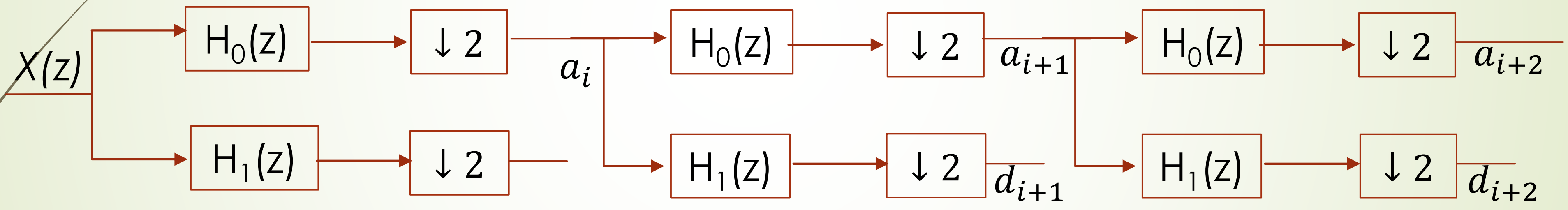
Ondelettes discrètes dyadiques

- **Exemple d'application 1**

On suppose que le signal à analyser est une rampe et que l'ondelette est celle de Haar.

Filtres de **Décomposition** $\boldsymbol{h_0}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\boldsymbol{h_1}=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,Filtres de **Reconstruction** $\boldsymbol{f_0}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\boldsymbol{f_1}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

- Décomposition



Décomposition

Remarque on convolue

$$a_{i+1}[n] = \sum_k h_0[2n - k]a_i[k]$$

$$d_{i+1}[n] = \sum_k h_1[2n - k]a_i[k]$$

	Approximation h_0[-k]= $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$	**Détail** h_1[-k]= $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$
Niveau 0	0,1,2,3,4,5,6,7	
Niveau 1	$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{13}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ondelettes discrètes dyadiques

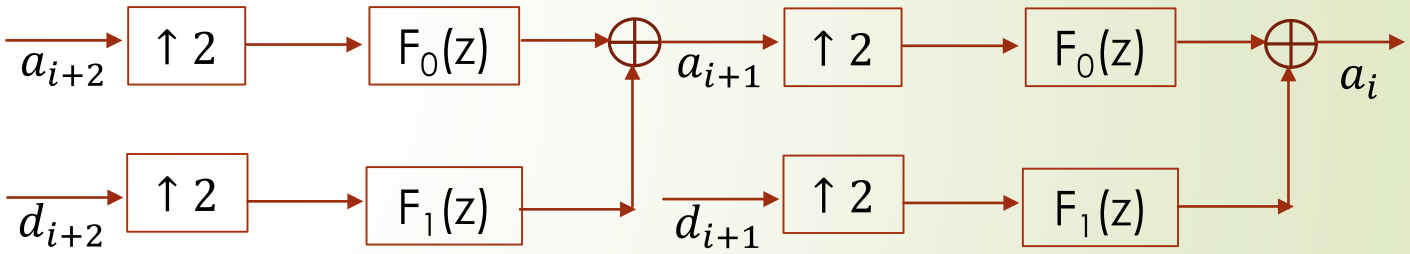
- **Exemple d'application 1**

On suppose que le signal à analyser est une rampe et que l'ondelette est celle de Haar.

Filtres de **Décomposition** $\boldsymbol{h_0}$= $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\boldsymbol{h_1}$=$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,Filtres de **Reconstruction** $\boldsymbol{f_0}$=$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\boldsymbol{f_1}$=$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

- Reconstruction

$$a_i[n] = \sum_k \{f_0[n-k]a_{i+1}[k] + f_1[n-k]d_{i+1}[k]\}$$



Reconstruction

	Approximation $\boldsymbol{f_0[-k]}$=$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$	Détail $\boldsymbol{f_1}$[-k]=$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$
Niveau 1	$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{13}{\sqrt{2}}$ $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{5}{\sqrt{2}}, 0, \frac{9}{\sqrt{2}}, 0, \frac{13}{\sqrt{2}},$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{13}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0$ $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
Niveau 0	0,1,2,3,4,5,6,7	

Ondelettes discrètes dyadiques

- **Exemple d'application 2**

Signal original : 11, 9, 5, 7

h_0={0.5, 0.5} $\Rightarrow$ h_1={-0.5, 0.5} ,

f_0=2*{0.5, 0.5} , f_1=2*{0.5, -0.5}

- Decomposition

$$a_{i+1}[n] = \sum_k h_0[2n - k]a_i[k]$$

$$d_{I+1}[n] = \sum_k h_1[2n - k]a_i[k]$$

- Reconstruction

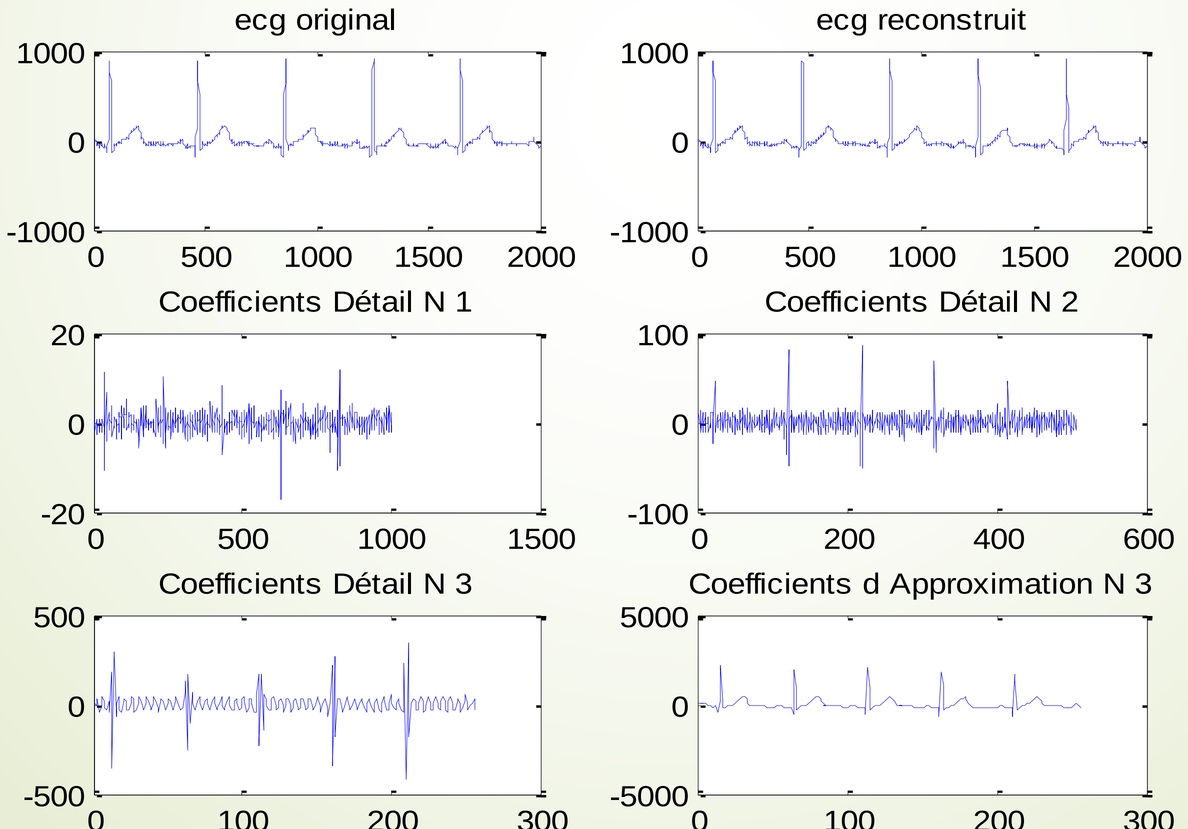
$$a_i[n] = \sum_k\{f_0[n - k]a_{i+1}[k] + f_1[n - k]d_{i+1}[k]\}$$

	Approximation h_0[-k]={0.5, 0.5}	Détail h_1[-k]={0.5, -0.5}
Niveau 0	11, 9, 5, 7	
Niveau 1	10, 6	1, -1
Niveau 2	8	2
Signal décomposé	8, 2, 1, -1	

	Approximation f_0[-k]={1, 1}	Détail f_1[-k]={-1, 1}
Niveau 2	8 0, 8, 0 [8, 8] +	2 0, 2, 0 [2, -2]
Niveau 1	10, 6 0,10, 0, 6, 0 [10,10,6,6] +	1, -1 0, 1, 0, -1, 0 [1,-1,1,-1]
Signal reconstruit	11, 9, 5, 7	

Ondelettes discrètes dyadiques

- **Exemple d'application 3**
- Les ondelettes sont bien adaptées au débruitage des signaux. On décompose le signal bruité et l'on force à zéro les coefficients qui ne passent pas un seuil. Puis l'on reconstruit le signal
- De la même façon on peut compresser le signal.

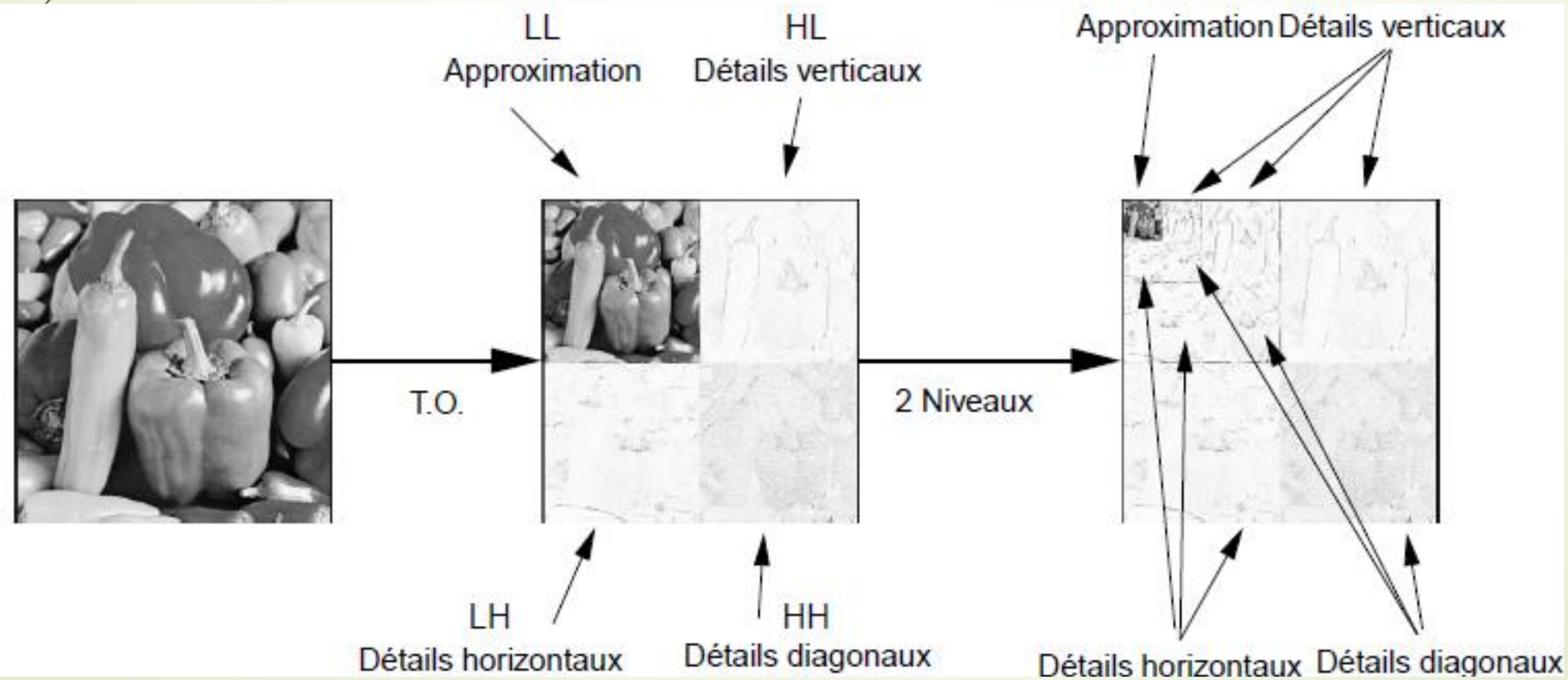


Ondelettes discrètes dyadiques

- **Exemple d'application imae**

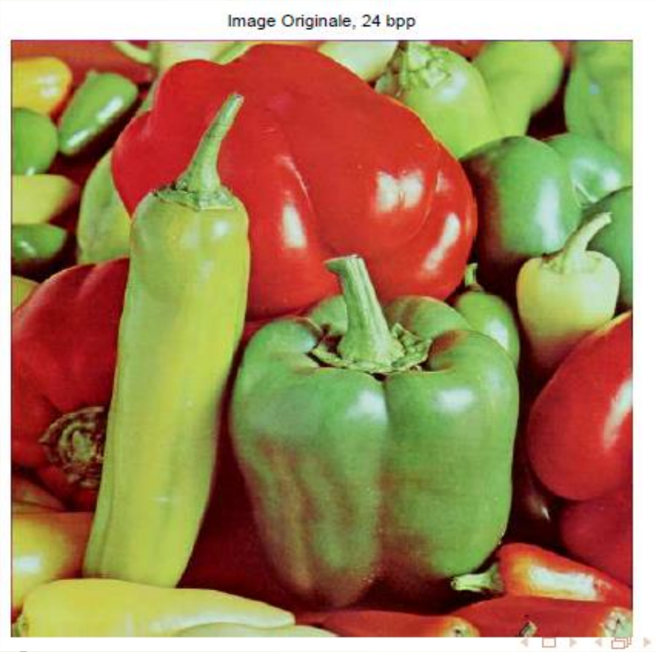
Pour une image : 2 filtres le long des lignes l'un passe-haut (H), l'autre passe-bas (L), ensuite, on ne considère qu'une colonne sur deux et on applique à nouveau les 2 filtres. En ne considérant qu'une ligne sur deux, on obtient 4 images de taille réduite de moitié.

En réitérant ce processus sur l'image d'approximation (LL), on obtient une pyramide d'images.



Ondelettes discrètes dyadiques

- **Exemple d'application 4**



compression jpeg et jpeg2000 (Ondelettes) avec un bpp de 0.2