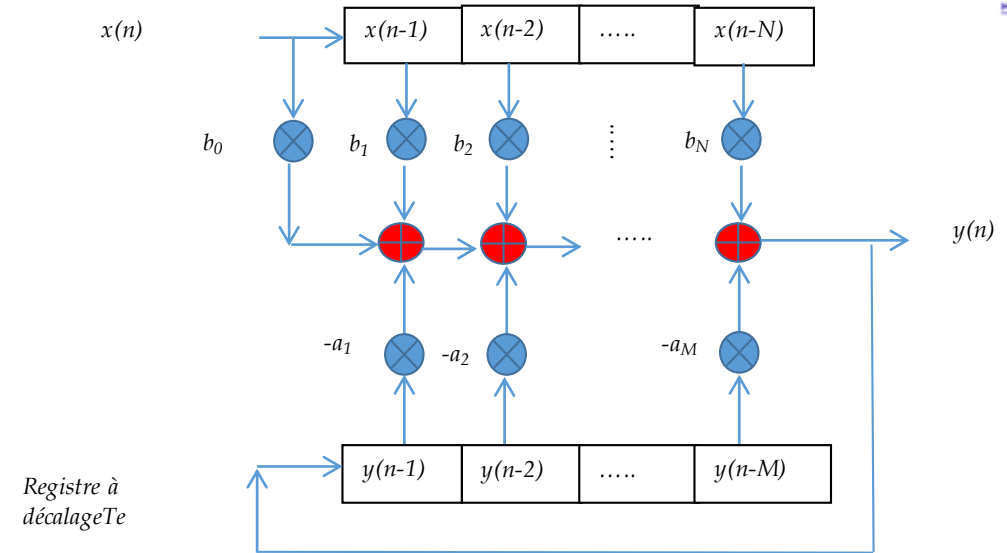


III. Synthèse des Filtrés RIF (Réponse Impulsionnelle Finie)

I. Introduction

- Filtrage linéaire Numérique
- ✓ Fiable
- ✓ Reproductible
- ✓ Souple
- ✓ Temps réel (transmissions numériques, codage des sons MP3, synthèse de parole, télévision numérique par
- ✓ etc..
- La plupart des modèles de filtres analogiques peuvent ainsi être reproduits sous forme numérique.

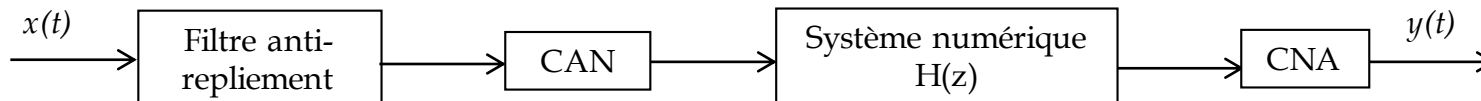
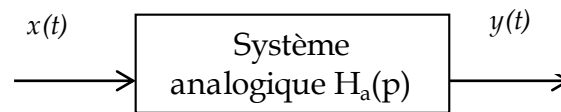


II. Synthèse des FNs et Gabarit Analogique

1. Définition des Caractéristiques du Filtre (Réponse en fréquence souhaitée ou réponse impulsionnelle).
2. Détermination de ses coefficients (Meilleure approximation respectant contraintes de stabilité, rapidité, précision, déphasage linéaire, etc.) .
3. Réalisation informatique et/ou électronique du filtre.

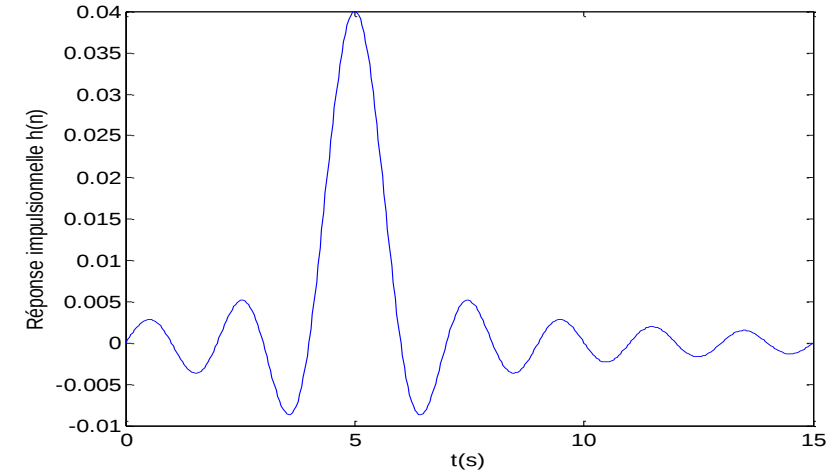
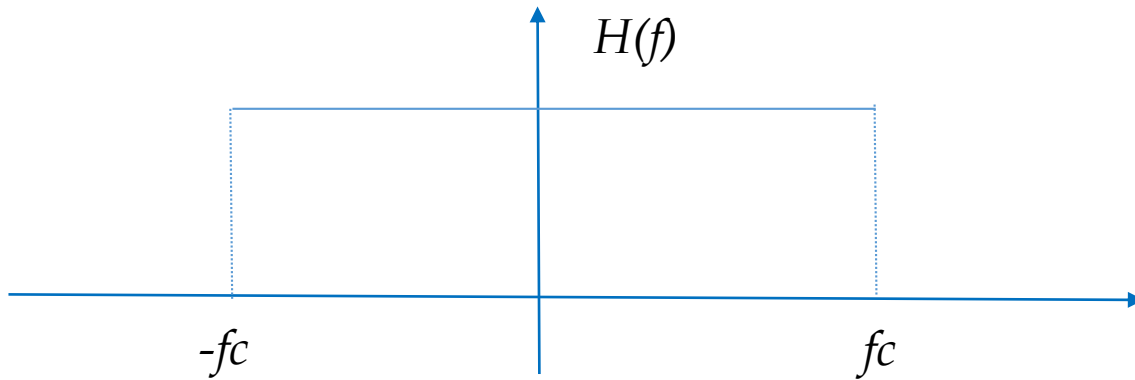
Comment ???

- ✓ Approche directe
- ✓ Approche indirecte



II. Synthèse des FNs et Gabarit Analogique

✓ Filtre Idéal



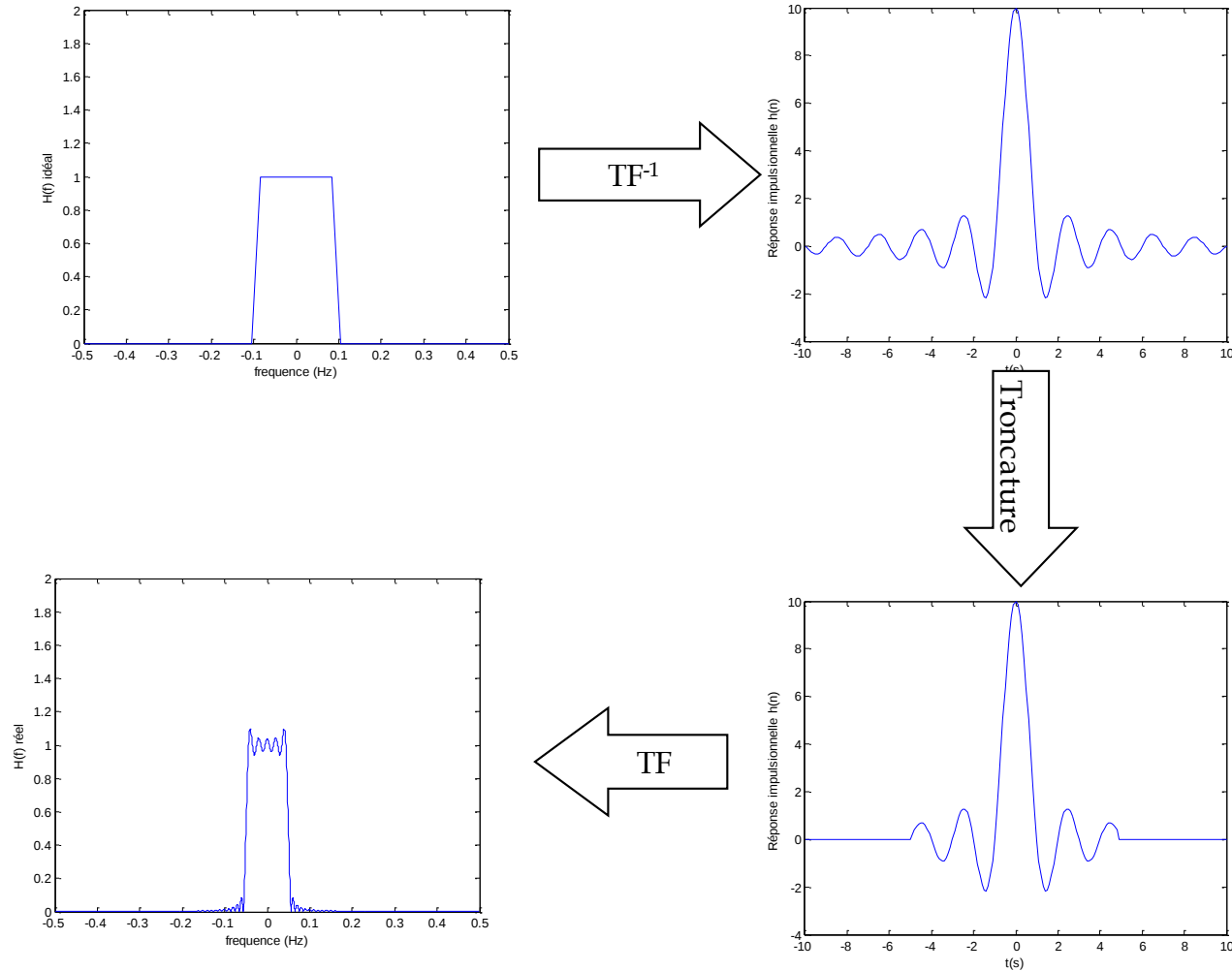
✓ Filtre Réel $\longrightarrow$ Causal

$$\prod_{2f_c}(f)e^{-2\pi jfT_0} \quad TF^{-1} \Rightarrow \text{sinc}(2f_c(t - T_0))$$

$-\infty$ à $+\infty$ Infinie $\Rightarrow$ Limiter

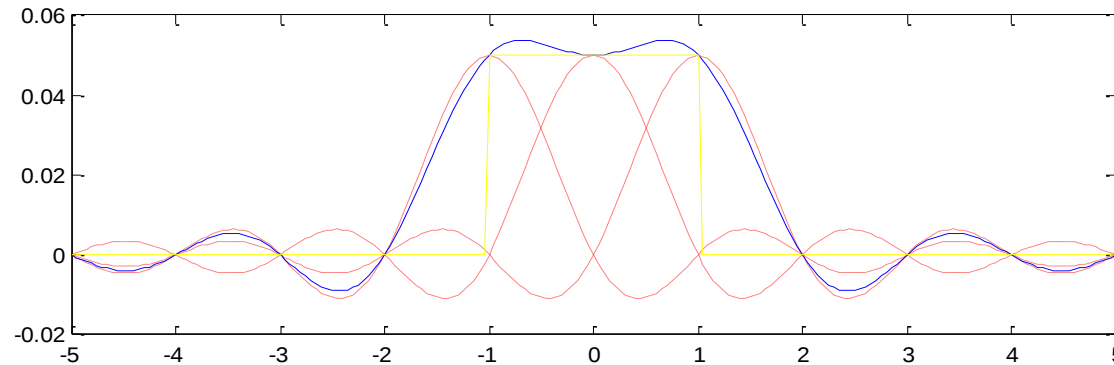
II. Synthèse des FNs et Gabarit Analogique

Filtre Réel



II. Synthèse des FNs et Gabarit Analogique

Filtre Réel : Troncature sur $N T_e$ points dans le domaine temporel $\Rightarrow$ Convolution avec sinc qui s'annule tous les $1/N T_e = f_e/N$ dans le domaine fréquentiel



II. Synthèse des FNs et Gabarit Analogique

Gabarit d'un filtre

- La bande passante de 0 à f_p
- La bande atténuée (ou coupée BA) de f_a jusqu'à $f_e/2$
- Le gain du filtre dans la bande passante.
- La largeur $\Delta f = f_a - f_p$ de la zone de transition

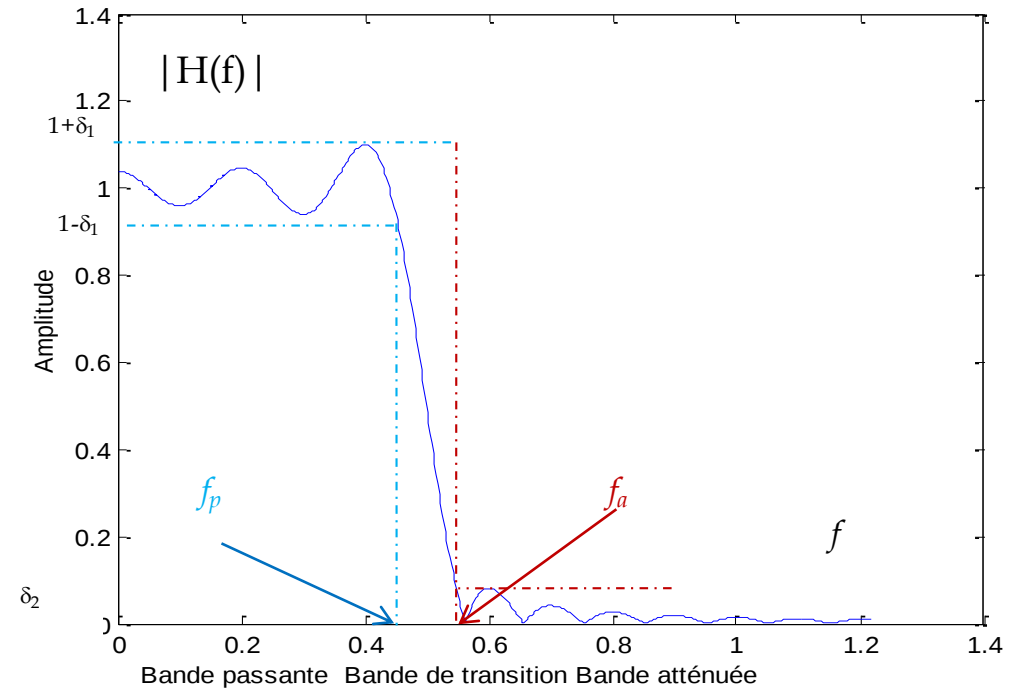
$$f_c = f_p + \Delta f/2 = (f_a + f_p)/2$$

- L'amplitude des oscillations en bande passante

$$\delta_1 \Rightarrow A_p = 20 \log(1 + \delta_1)$$

- L'amplitude des ondulations en bande atténuée

$$\delta_2 \Rightarrow A_a = -20 \log(\delta_2)$$

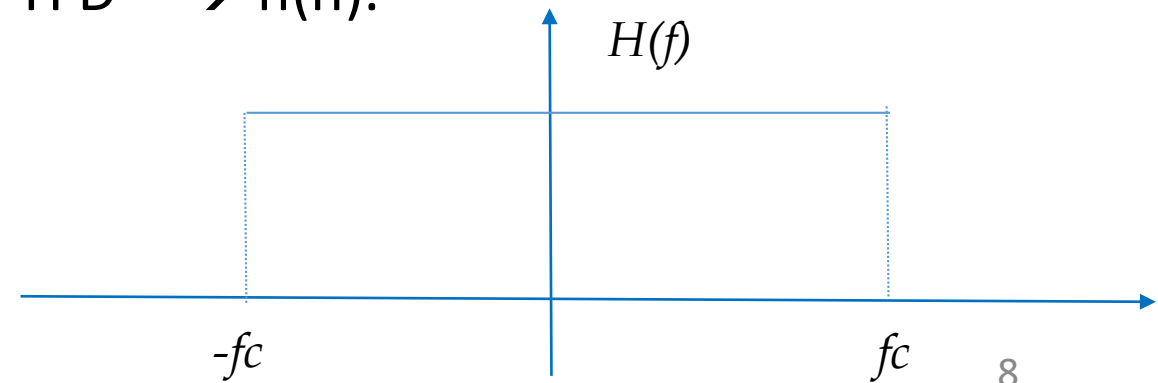


III. Synthèse des Filtres RIF

$$\text{RIF : } y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) \Rightarrow H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} = \frac{b_0 \prod_{i=1}^N (z-z_i)}{z^N}$$

Un filtre RIF possède une fonction de transfert polynomiale (non rationnelle), il ne peut être obtenu par transposition d'un filtre continu.

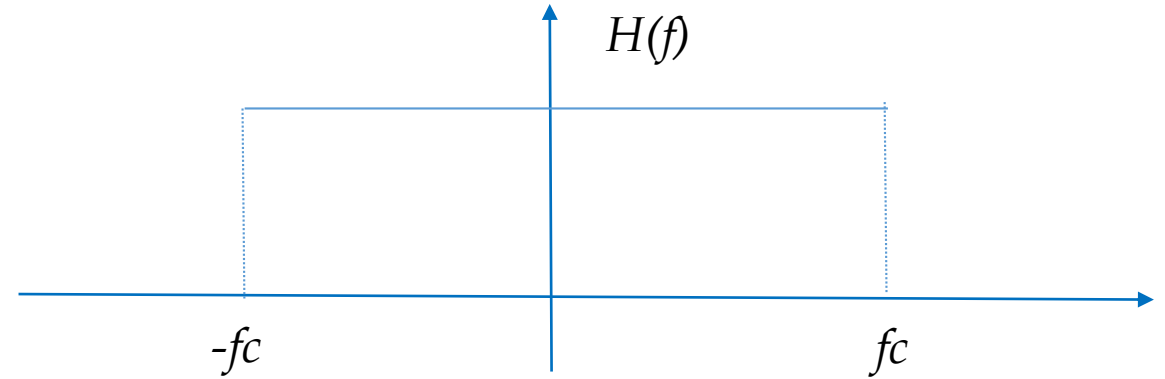
- ✓ $H(f) \rightarrow \text{TFTD}^{-1} \rightarrow h(n)$ (méthode des fenêtres)
- ✓ $H(f) \rightarrow \text{Echantillonnage fréquentielle } H(k) \rightarrow \text{TFD}^{-1} \rightarrow h(n)$.
- ✓ Autres méthodes (itératives, d'optimisation)



IV. Méthode des fenêtres

$$\text{RIF : } y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)$$

$$\checkmark H(f) \rightarrow \text{TFTD}^{-1} \rightarrow h(n)$$



$$h(n) = \frac{1}{f_e} \int_{-f_c/2}^{f_e/2} H(f) e^{2\pi j f n T_e} df$$

$$h(n) = \frac{1}{f_e} \int_{-f_c}^{f_c} e^{2\pi j f n T_e} df = \frac{1}{2\pi j n T_e f_e} \left[e^{2\pi j f n T_e} \right]_{-f_c}^{f_c}$$

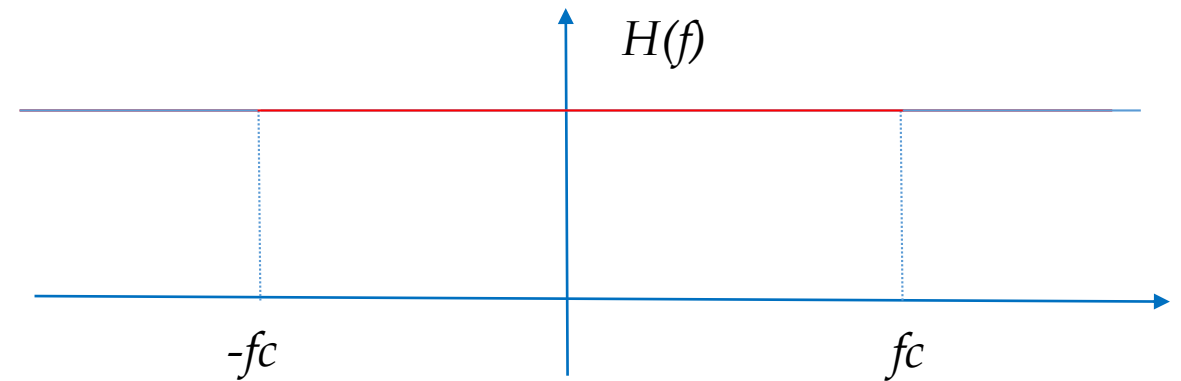
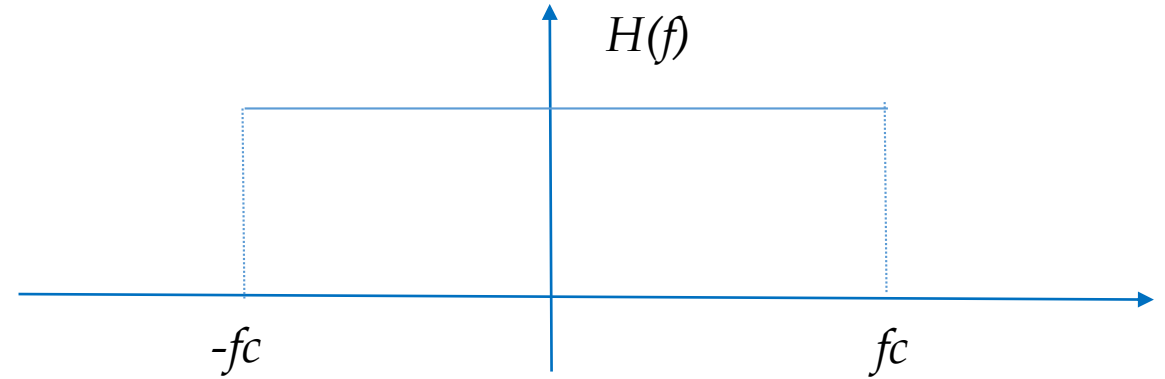
$$h(n) = \frac{1}{2\pi j n} \left[e^{2\pi j f_c n T_e} - e^{-2\pi j f_c n T_e} \right] = \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi f_c n T_e) = 2f_c T_e \text{sinc}(2f_c n T_e)$$

IV. Méthode des fenêtres

On pose $f_c = \frac{f_c}{f_e/2} = 2f_cT_e$

$$h(n) = 2f_cT_e \text{sinc}(2f_cnT_e) = f_c \text{sinc}(nf_c)$$

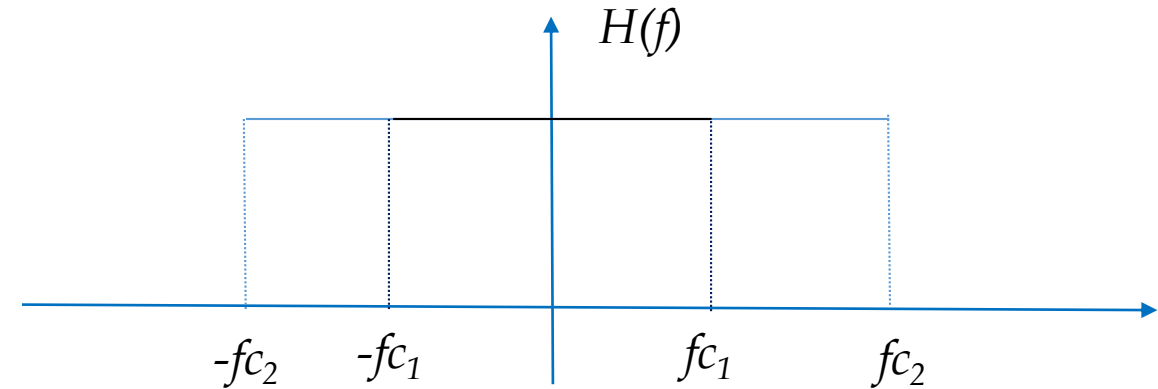
➤ Passe haut $\rightarrow H_h(f) = 1 - H_b(f) \rightarrow h(n) = \delta(n) - f_c \text{sinc}(nf_c)$



IV. Méthode des fenêtres

On pose $f_c = \frac{f_c}{f_e/2} = 2f_cT_e$

$$h(n) = 2f_cT_e \text{sinc}(2f_cnT_e) = f_c \text{sinc}(nf_c)$$



➤ Passe haut $\rightarrow H_h(f) = 1 - H_b(f) \rightarrow h(n) = \delta(n) - f_c \text{sinc}(nf_c)$

➤ Passe bande $\rightarrow H_{bd}(f) = H_{b2}(f) - H_{b1}(f) \rightarrow h(n) = f_{c2} \text{sinc}(nf_{c2}) - f_{c1} \text{sinc}(nf_{c1})$

➤ Coupe bande $\rightarrow H_h(f) = 1 - H_{bd}(f) \rightarrow h(n) = \delta(n) - f_{c2} \text{sinc}(nf_{c2}) + f_{c1} \text{sinc}(nf_{c1})$

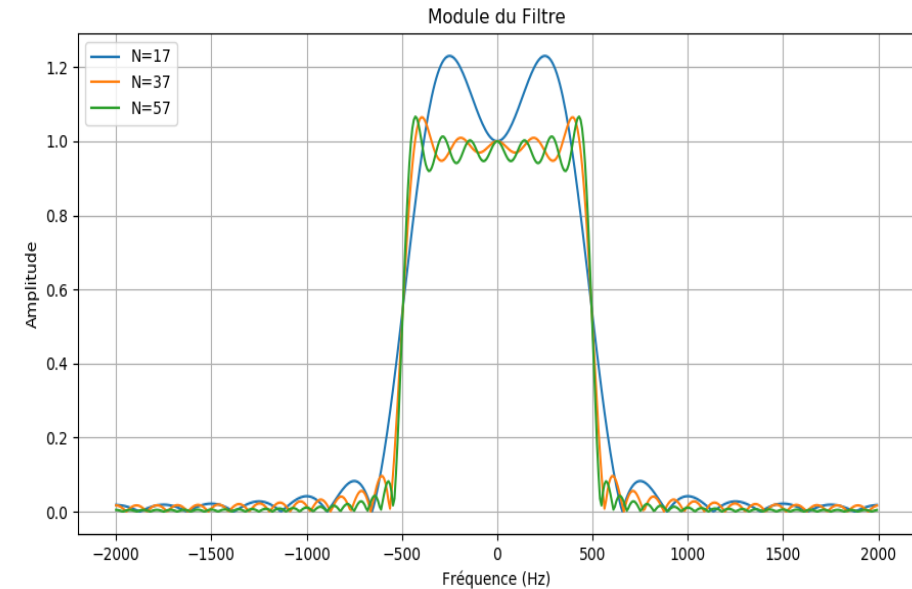
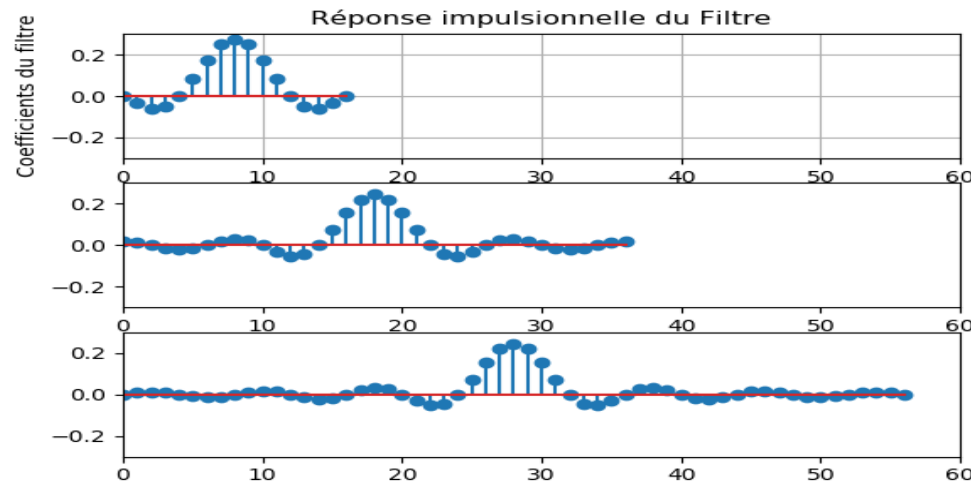
IV. Méthode des fenêtres

$$h(n) = 2f_c T_e \text{sinc}(2f_c n T_e) = f_c \text{sinc}(n f_c)$$

$-\infty$ à $+\infty$ Infinie $\Rightarrow$ Limiter

✓ Limiter le nombre d'échantillons de $h(n)$ à N

$$h'_N(n) = h(n) \cdot w(n)$$

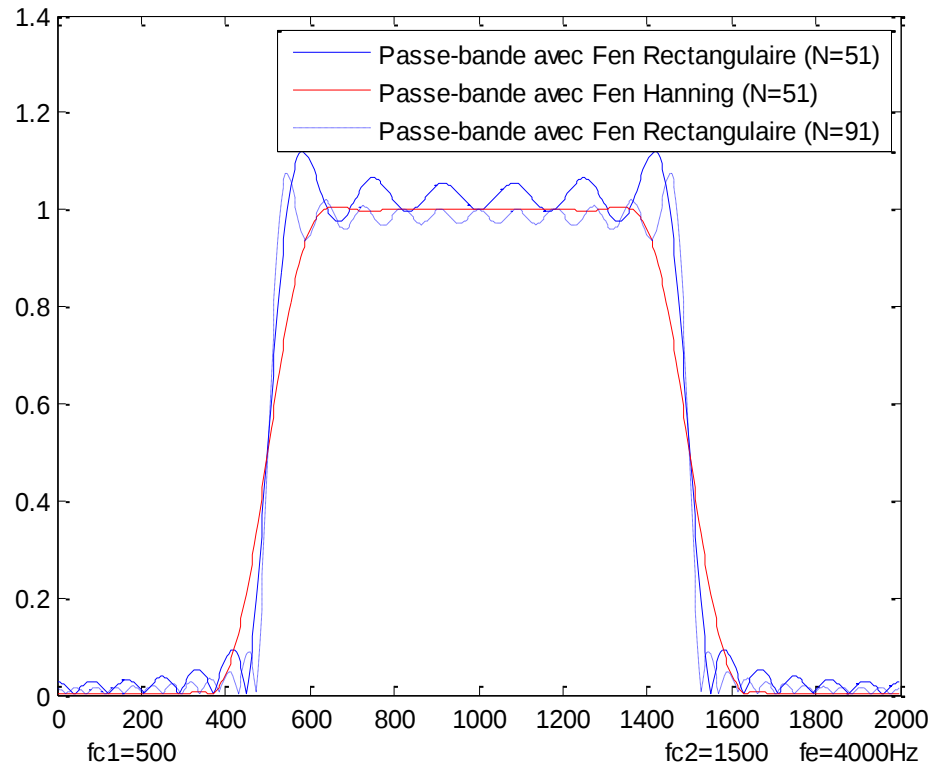


✓ Décaler la réponse de $N/2$ pour la rendre causale

IV. Méthode des fenêtres

✓ Emploi d'autres fenêtres

$$h'_N(n) = h(n) \cdot w(n)$$



2

3

1

Fenêtres $w_N(n)$	Largeur de Transition $\Delta f = (2\Delta f / f_e)$	Atténuation en bande atténuée A_a
$w_{\text{Rect}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	1.8/N	21
$w_{\text{Han}}(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	6.2/N	44
$w_{\text{Ham}}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	6.6/N	53
$w_{\text{Black}}(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	11/N	74

$$\delta_1 \Rightarrow A_p = 20 \log(1 + \delta_1)$$

IV. Méthode des fenêtres

Exemple : On veut synthétiser un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = f_e/10$ avec $\Delta f = f_e/5$ et une ondulation en bande atténuée > 50 db

1. Normaliser les fréquences

- $f_c / (f_e/2) \Rightarrow f_c = 0.2$
- $\Delta f / (f_e/2) \Rightarrow \Delta f = 0.4$

$$h(n) = f_c \text{sinc}(nf_c) = 0.2 \text{sinc}(0.2n)$$

2. Choix de la fenêtre en fonction de L'ondulation permise en bande atténuée

Hamming $\rightarrow$ Détermination de N: $N = 6.6/\Delta f = 16,5$ on prend $N = 17$

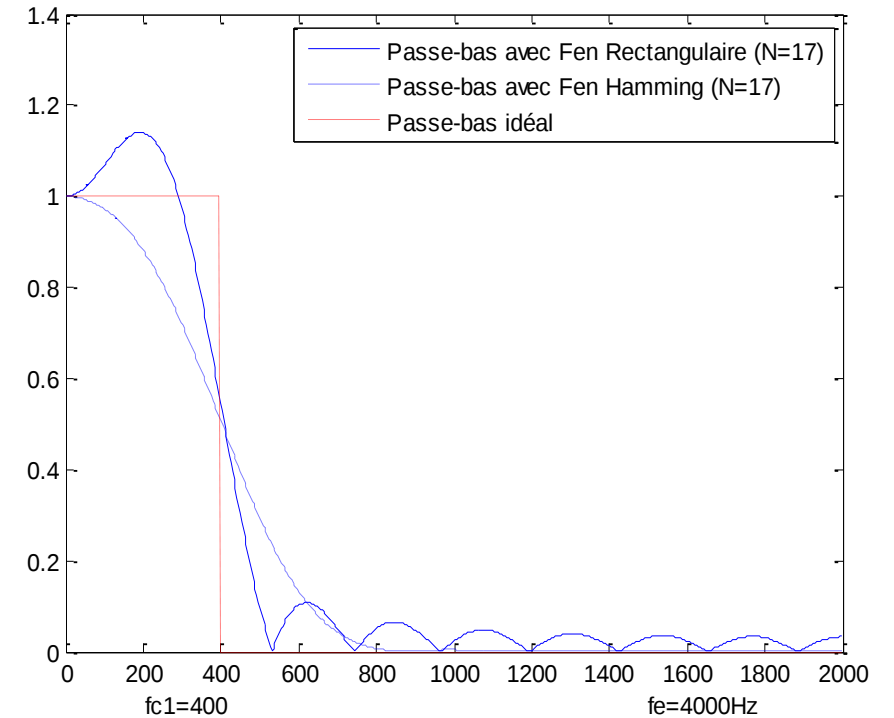
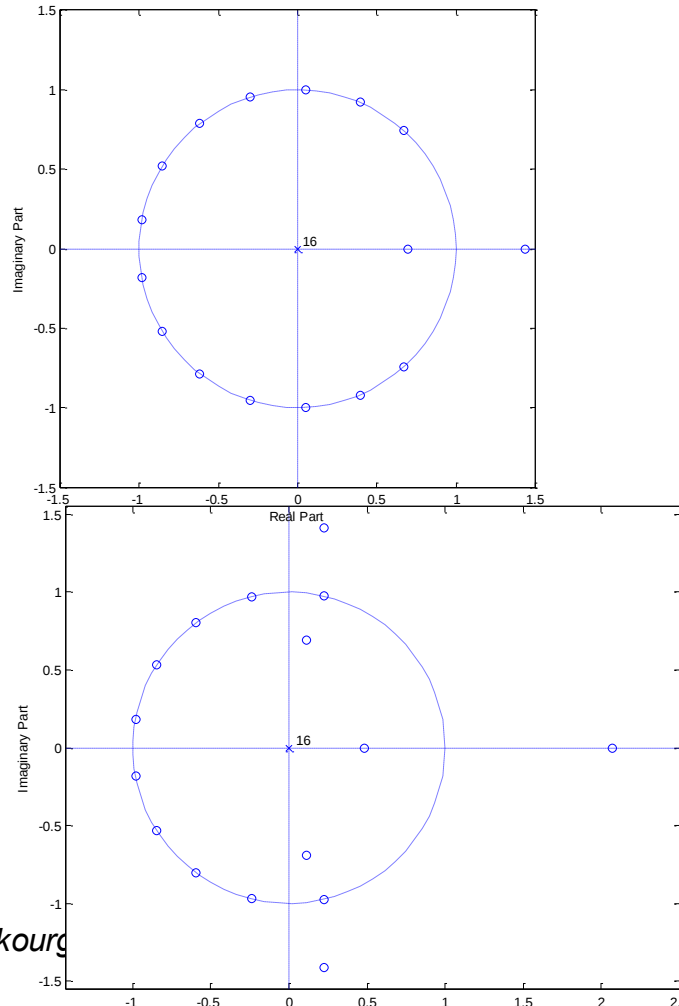
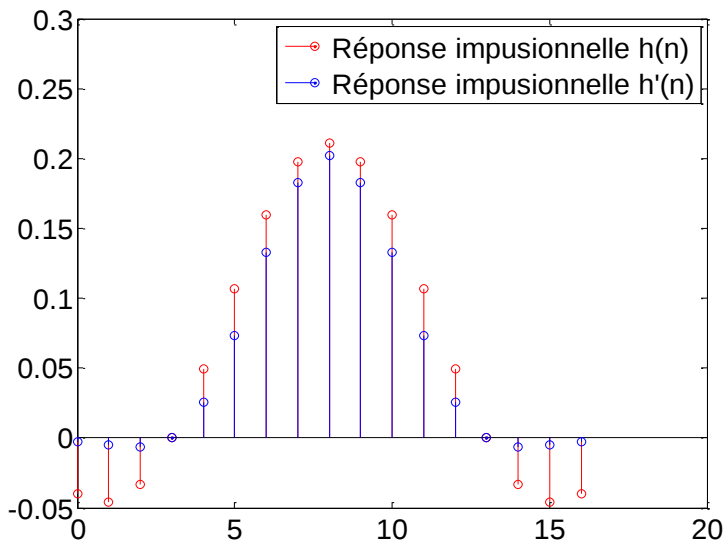
3. Calcul de $h'_N(n) = 0.2 \text{sinc}(0.2n) \left[0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{16}\right) \right]$ pour $-8 \leq n \leq 8$

4. Décaler les indices n de 8 pour avoir une réponse impulsionnelle causale

Fenêtres $w_N(n)$	Largeur de Transition $\Delta f = (2\Delta f / f_e)$	Atténuation en bande atténuée Aa
$w_{\text{Rect}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	1.8/N	21
$w_{\text{Han}}(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	6.2/N	44
$w_{\text{Ham}}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	6.6/N	53
$w_{\text{Black}}(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & \text{pour } n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	11/N	74

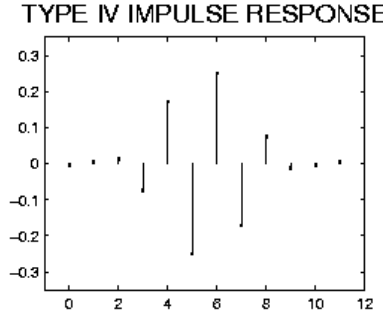
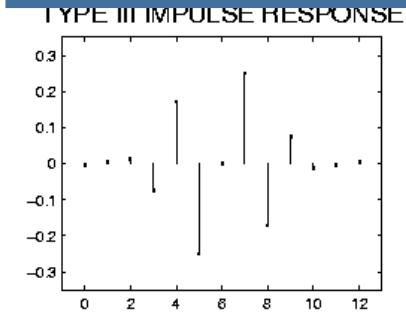
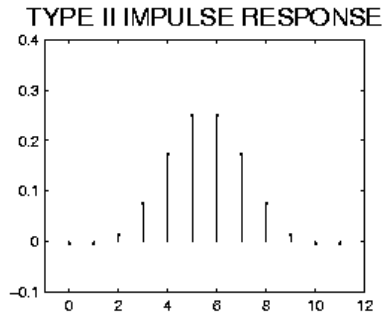
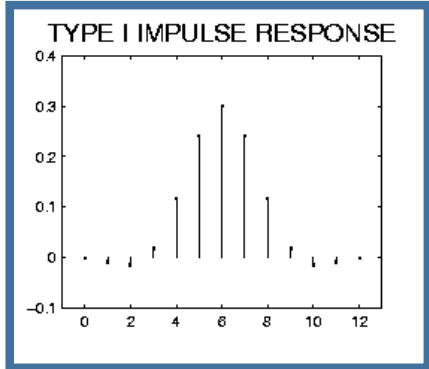
IV. Méthode des fenêtres

Exemple : On veut synthétiser un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = f_e/10$ avec $\Delta f = f_e/5$ et une ondulation en bande atténuée > 50 db



IV. Méthode des fenêtres

Types de Filtres



https://cnx.org/contents/1prPUN_Y@4.38:ScWn0u94@3/Zero-Locations-of-Linear-Phase-FIR-Filters

$$\text{Type I (N impair)} \Rightarrow H(f) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n e^{-2\pi j f n T_e}$$

$$H(f) = b_0 + b_1 e^{-2\pi j f T_e} + \dots + \frac{b_{N-1}}{2} e^{-2\pi j f \frac{N-1}{2} T_e} + \dots + b_1 e^{-2\pi j f (N-2) T_e} + b_0 e^{-2\pi j f (N-1) T_e}$$

$$H(f) = 2e^{-2\pi j f \frac{N-1}{2} T_e} (b_0 \cos(2\pi f \frac{N-1}{2} T_e) + b_1 \cos(\dots) + \dots + b_{(N-1)/2})$$

$$H(f) = 2e^{-\pi j f (N-1) T_e} (b_0 \cos(\pi f (N-1) T_e) + b_1 \cos(\dots) + \dots + 0.5 b_{(N-1)/2})$$

Exemple

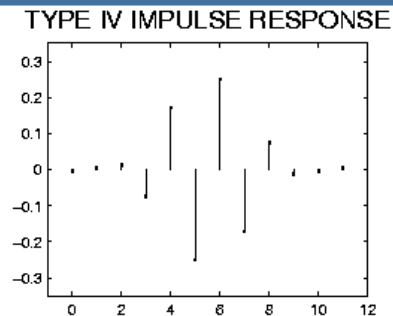
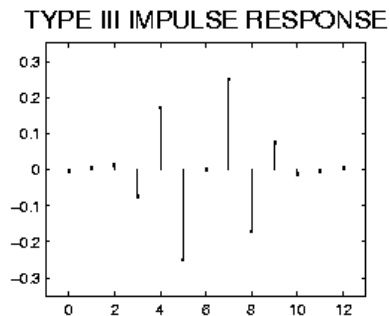
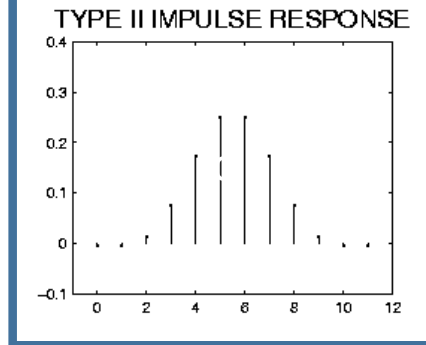
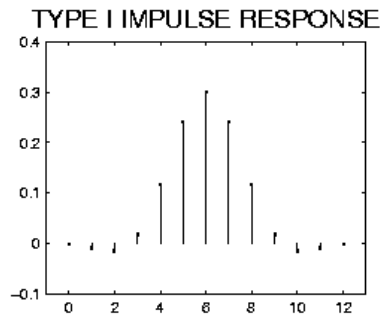
$$H(f) = b_0 + b_1 e^{-2\pi j f T_e} + b_2 e^{-4\pi j f T_e} + b_1 e^{-6\pi j f T_e} + b_0 e^{-8\pi j f T_e}$$

$$H(f) = e^{-4\pi j f T_e} (b_0 e^{4\pi j f T_e} + b_1 e^{2\pi j f T_e} + b_2 + b_1 e^{-2\pi j f T_e} + b_0 e^{-4\pi j f T_e})$$

$$H(f) = 2e^{-4\pi j f T_e} (b_0 \cos 4\pi f T_e + b_1 \cos 2\pi f T_e + 0.5 b_2)$$

IV. Méthode des fenêtres

Types de Filtres



https://cnx.org/contents/1prPUN_Y@4.38:ScWn0u94@3/Zero-Locations-of-Linear-Phase-FIR-Filters

Type II (N pair) $\Rightarrow H(f) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n e^{-2\pi j f n T_e}$

$$H(f) = b_0 + b_1 e^{-2\pi j f T_e} + \dots + \dots + b_1 e^{-2\pi j f (N-2) T_e} + b_0 e^{-2\pi j f (N-1) T_e}$$

$$H(f) = 2e^{-2\pi j f \frac{N-1}{2} T_e} (b_0 \cos(\pi f N T_e) + b_1 \cos(\dots) + \dots + b_{\frac{N}{2}-1} \cos(\dots))$$

$$H(f) = 2e^{-\pi j f (N-1) T_e} (b_0 \cos(\pi f (N-1) T_e) + b_1 \cos(\dots) + \dots + b_{\frac{N}{2}-1} \cos(\dots))$$

Exemple

$$H(f) = b_0 + b_1 e^{-2\pi j f T_e} + b_1 e^{-4\pi j f T_e} + b_0 e^{-6\pi j f T_e}$$

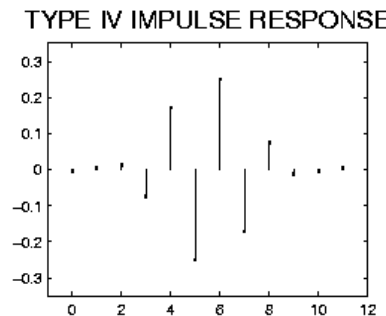
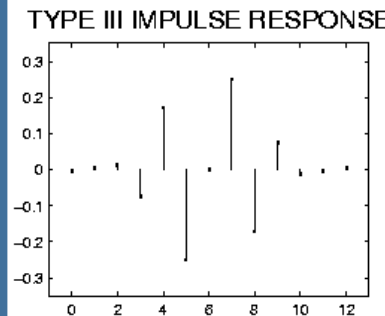
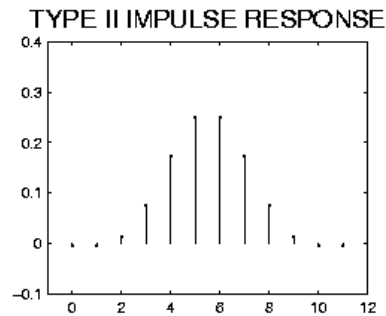
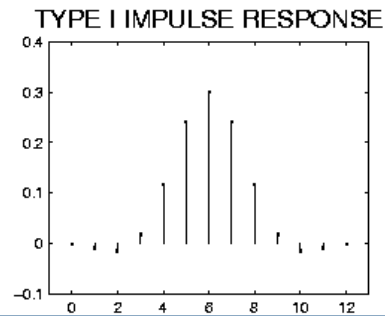
$$H(f) = e^{-3\pi j f T_e} (b_0 e^{3\pi j f T_e} + b_1 e^{\pi j f T_e} + b_1 e^{-\pi j f T_e} + b_0 e^{-3\pi j f T_e})$$

$$H(f) = 2e^{-3\pi j f T_e} (b_0 \cos 3\pi f T_e + b_1 \cos \pi f T_e)$$

$$H\left(\frac{f_e}{2}\right) = 2e^{-\frac{3\pi}{2} j} (b_0 \cos 3\pi / 2 + b_1 \cos \pi / 2)$$

IV. Méthode des fenêtres

Types de Filtres



https://cnx.org/contents/1prPUN_Y@4:38:ScWn0u94@3/Zero-Locations-of-Linear-Phase-FIR-Filters

Type III (N impair) $\Rightarrow H(f) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n e^{-2\pi j f n T_e}$

$$H(f) = b_0 - b_1 e^{-2\pi j f T_e} + \dots - \dots + 0 - \dots + b_1 e^{-2\pi j f (N-2) T_e} - b_0 e^{-2\pi j f (N-1) T_e}$$

$$H(f) = 2j e^{-2\pi j f \frac{N-1}{2} T_e} (b_0 \sin(2\pi f \frac{N-1}{2} T_e) - b_1 \sin(\dots) + \dots - \dots + \dots - \dots)$$

$$H(0) = 0$$

Exemple

$$H(f) = b_0 - b_1 e^{-2\pi j f T_e} + 0 + b_1 e^{-6\pi j f T_e} - b_0 e^{-8\pi j f T_e}$$

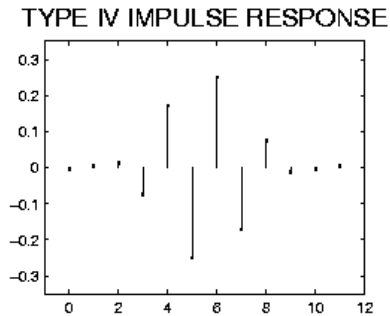
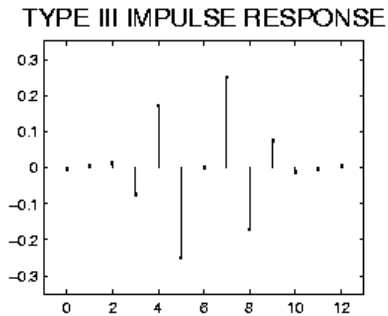
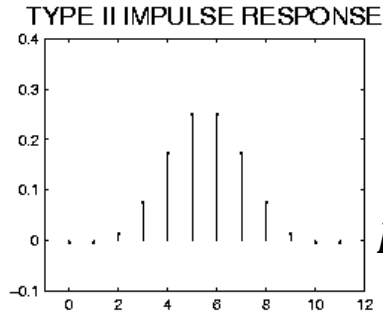
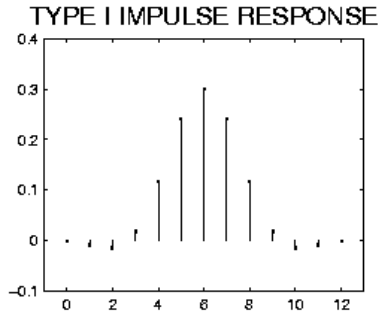
$$H(f) = e^{-4\pi j f T_e} (b_0 e^{4\pi j f T_e} - b_1 e^{2\pi j f T_e} + b_1 e^{-2\pi j f T_e} - b_0 e^{-4\pi j f T_e})$$

$$H(f) = 2j e^{-4\pi j f T_e} (b_0 \sin 4\pi f T_e - b_1 \sin 2\pi f T_e)$$

$$H(\frac{f_e}{2}) = 2j e^{-2\pi j} (b_0 \sin 2\pi + b_1 \sin \pi) = 0$$

IV. Méthode des fenêtres

Types de Filtres



Type VI (N pair) $\Rightarrow H(f) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n e^{-2\pi j f n T_e}$

$$H(f) = 2j e^{-2\pi j f \frac{N-1}{2} T_e} (b_0 \sin(\pi f (N-1) T_e) - b_1 \sin(\pi f (N-2) T_e) + \dots - \dots + \dots - \dots)$$

$$H(0) = 0$$

Exemple

$$H(f) = b_0 - b_1 e^{-2\pi j f T_e} + b_1 e^{-4\pi j f T_e} - b_0 e^{-6\pi j f T_e}$$

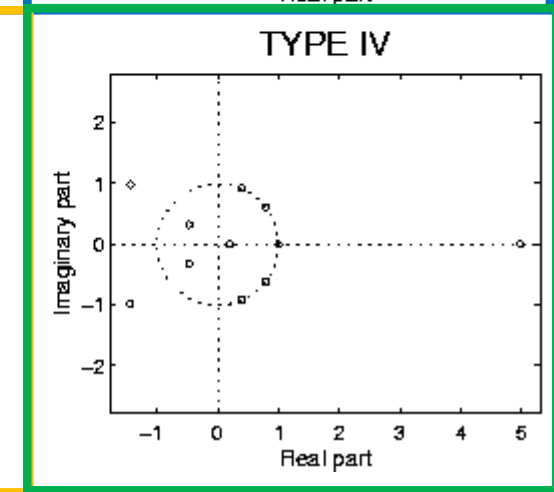
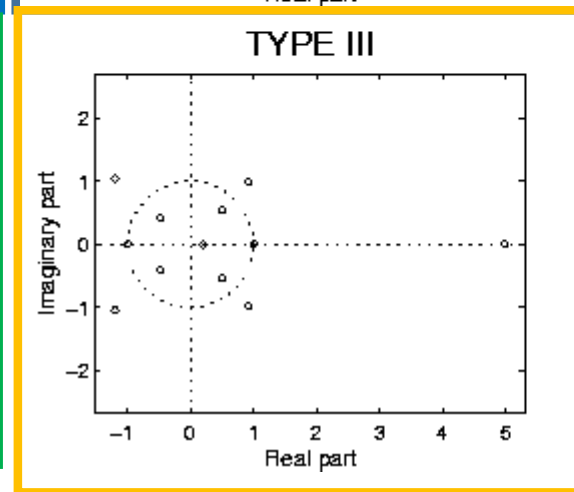
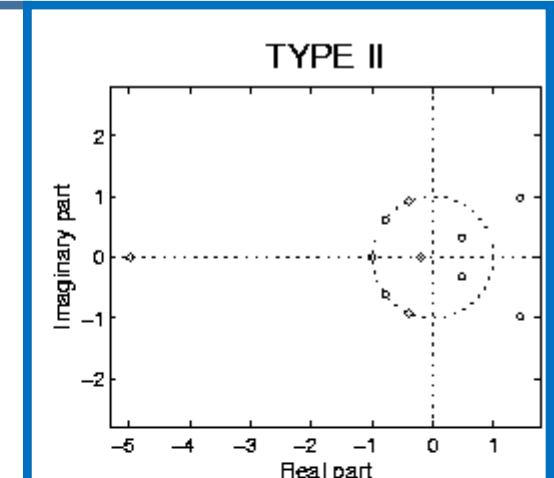
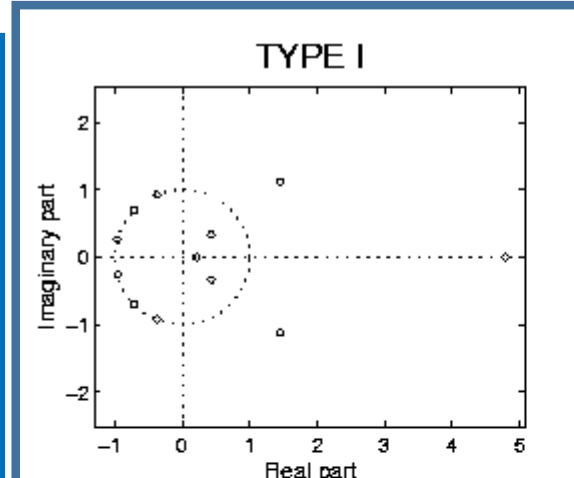
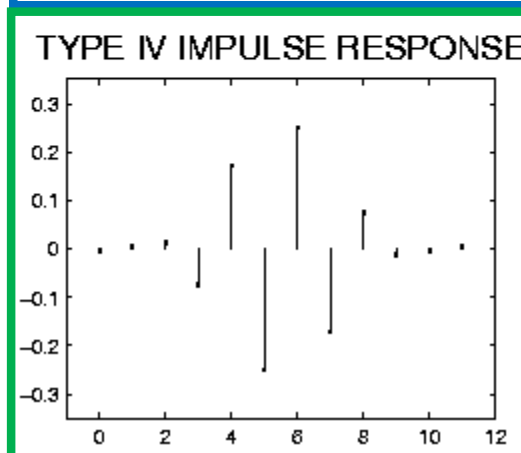
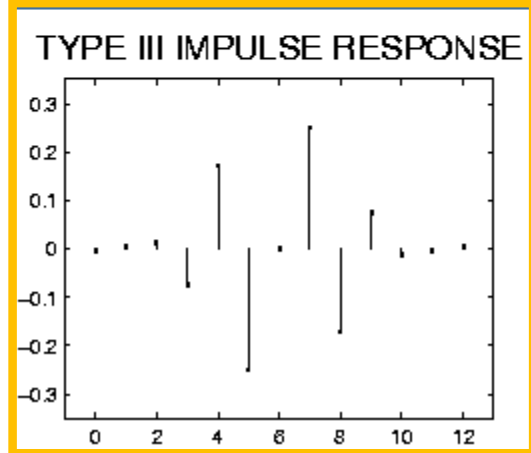
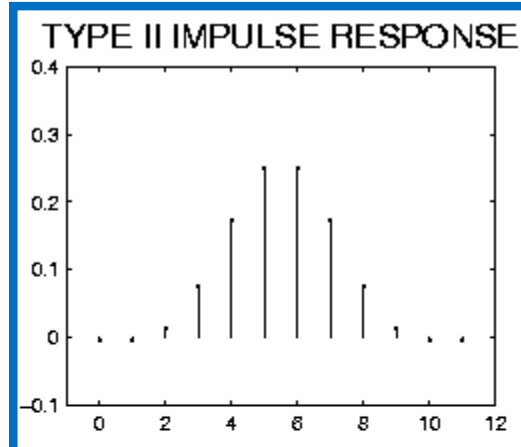
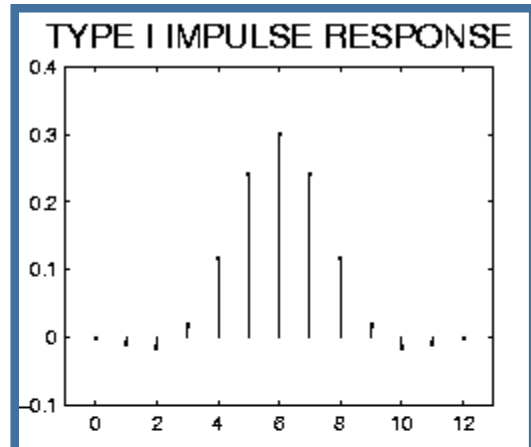
$$H(f) = e^{-3\pi j f T_e} (b_0 e^{3\pi j f T_e} - b_1 e^{\pi j f T_e} + b_1 e^{-\pi j f T_e} - b_0 e^{-3\pi j f T_e})$$

$$H(f) = 2j e^{-4\pi j f T_e} (b_0 \sin 3\pi f T_e - b_1 \sin \pi f T_e)$$

https://cnx.org/contents/1prPUN_Y@4.38:ScWn0u94@3

IV. Méthode des fenêtres

Types de Filtres



IV. Méthode des fenêtres

Types de Filtres

- ✓ Le filtre de type I est le plus employé
- ✓ Le filtre de type II possède un zéro en -1 (Nombre de zéros est impair donc répartition de zéros en paires conjuguées + un zéro en $\pi/2$ puisque une somme de cosinus), il ne peut donc être employé pour un passe-haut ou un coupe-bande.
- ✓ Les filtres de type III (N impair) et IV (N pair) permettent d'obtenir une réponse impulsionnelle anti-symétrique avec déphasage linéaire également (somme de sinus au lieu de cosinus).
Ils possèdent tous deux des zéros en 1 (sin en $f=0$ est nulle), leur utilisation n'est donc pas adaptée aux filtres passe-bas. En outre le filtre de type III possède également un 0 en -1 , on ne peut l'employer que pour un passe-bande.

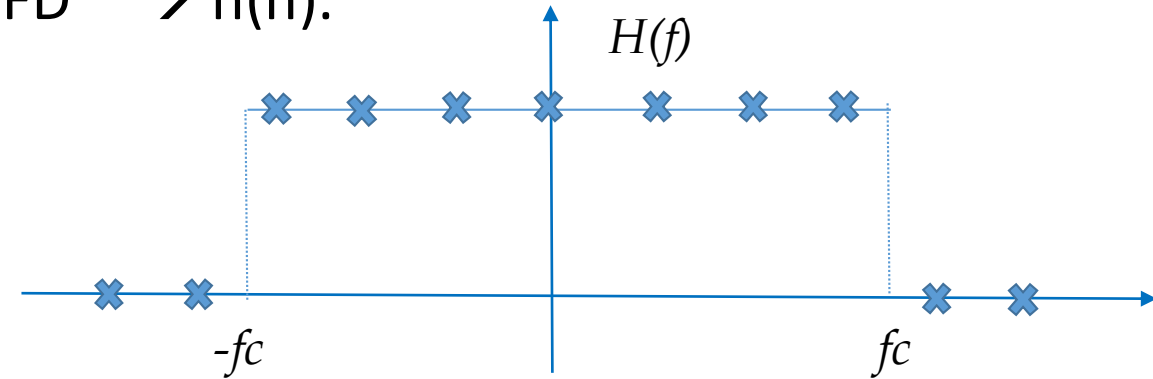
V. Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

$$\text{RIF : } y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) \Rightarrow H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} = \frac{b_0 \prod_{i=1}^N (z-z_i)}{z^N}$$

✓ $H(f) \rightarrow$ Echantillonnage fréquentielle $H(k) \rightarrow \text{TFD}^{-1} \rightarrow h(n)$.

$$H(k) = H(f) \Big|_{f=k/N} \quad k = -(N-1)/2 \text{ à } (N-1)/2$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} H(k) e^{2\pi j k n / N}$$



$$H(k) = H(-k) \Rightarrow h(n) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{(N-1)/2} H(k) (e^{2\pi j k n / N} + e^{-2\pi j k n / N}) \right) \rightarrow h(n) = \frac{1}{N} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H(k) \cos\left(\frac{2\pi n k}{N}\right) \right)$$

☺ Synthétiser toutes formes de filtres

☹ La valeur de $H(f)$ n'est pas maîtrisée entre les points

V. Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

Exemple : Synthétiser un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = f_e/10$ avec $\Delta f < f_e/16$.

1. On prend donc $N=17$, ce qui nous donne $\Delta f = 0.0588$ et $f_c = 0.1$

2. $H(0) = H(-1) = H(1) = 1$

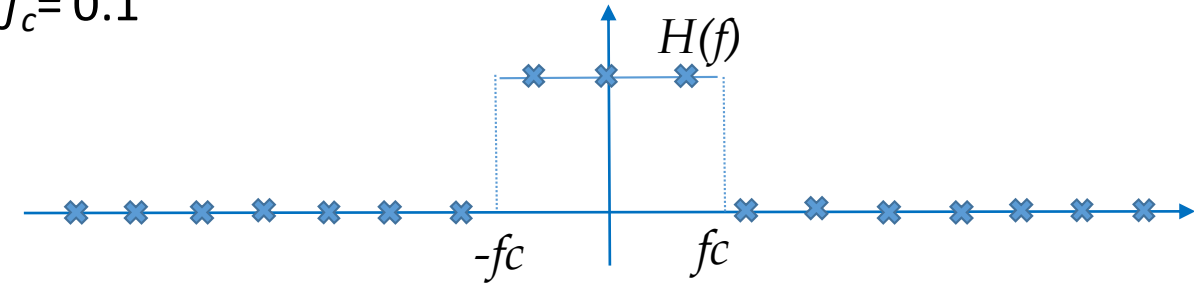
$H(2) = H(-2) = \dots = H(8) = H(-8) = 0$.

$$3. \quad h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} H(k) e^{2\pi j k n / N}$$

$$h(n) = \frac{1}{17} \left(H(0) + H(1)e^{2\pi j n / 17} + H(-1)e^{-2\pi j n / 17} + H(2)\dots + H(-2)\dots + H(8)\dots + H(-8)\dots \right)$$

$$h(n) = \frac{1}{17} \left(1 + e^{-2\pi j n / 17} + e^{2\pi j n / 17} \right) = \frac{1}{17} \left(1 + 2 \cos(2\pi n / 17) \right) \quad \text{pour } -8 \leq n \leq 8$$

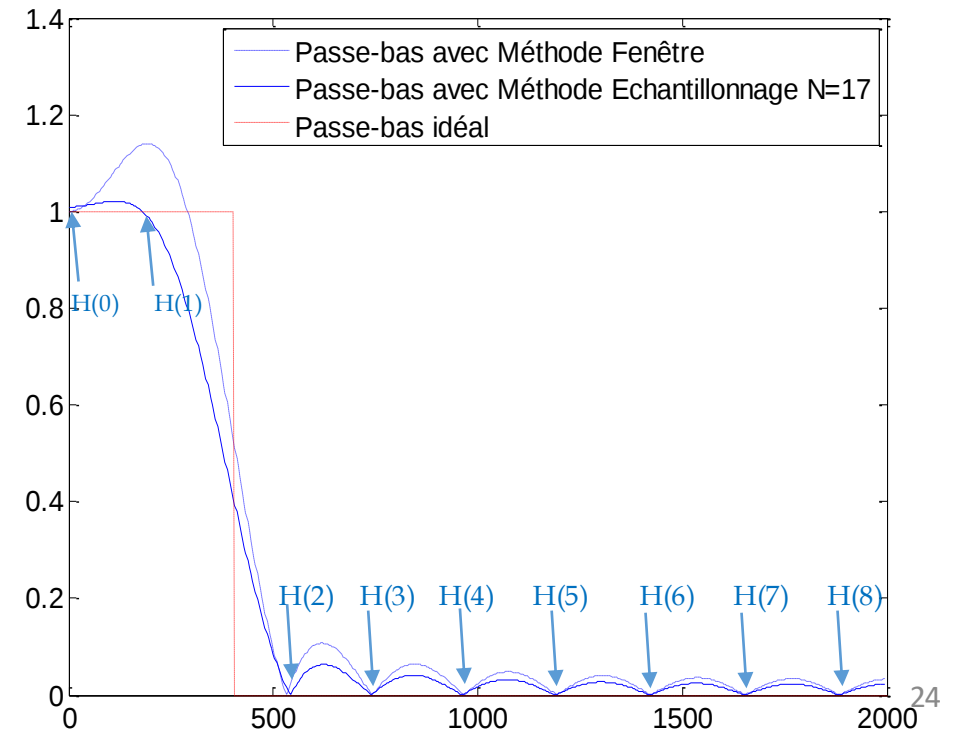
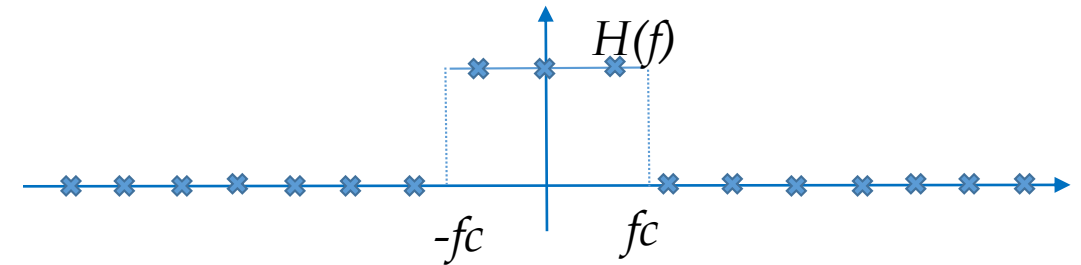
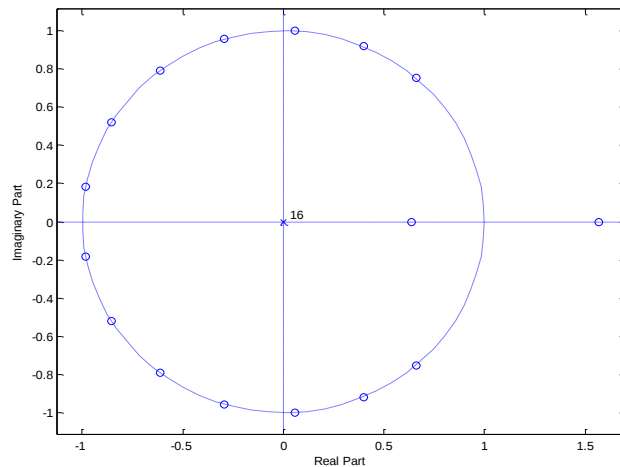
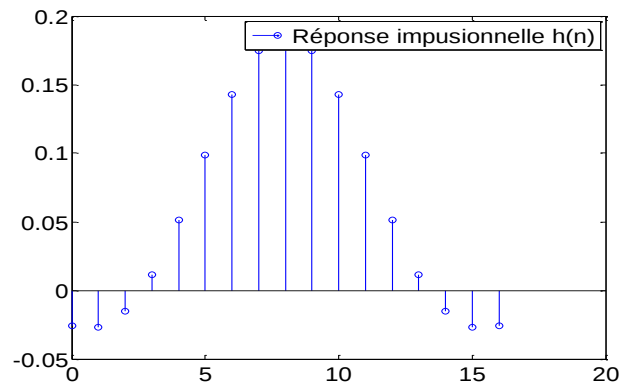
4. On translate la réponse de 8 pour la rendre causale



- 1. $\Delta f = 0.0588 < f_c \rightarrow H(1) = H(-1) = 1$
- 2. $\Delta f = 0.1176 > f_c \rightarrow H(2) = H(-2) = 0$
-
- 8. $\Delta f = 0.4704 > f_c \rightarrow H(8) = H(-8) = 0$

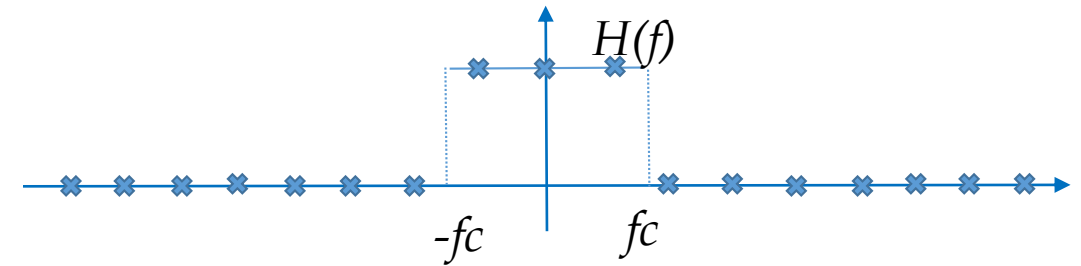
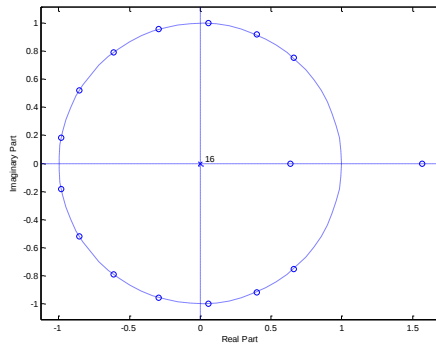
V. Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

Exemple : Synthétiser un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = f_e/10$ avec $\Delta f < f_e/16$.

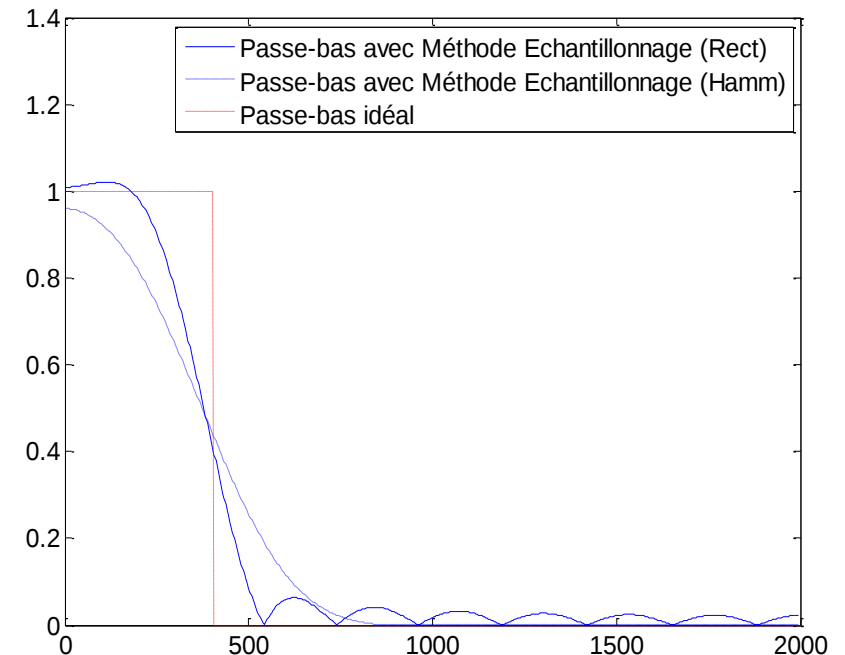
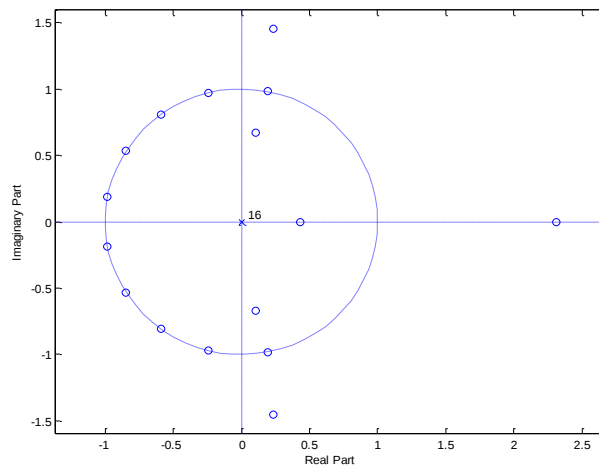


V. Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

Exemple : Synthétiser un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = f_e/10$ avec $\Delta f < f_e/16$



Fenêtrage



V. Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

Exemple : Synthétiser un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = f_e/10$ avec $\Delta f < f_e/16$.

On introduira 0.5 entre 1 et 0 $\rightarrow N=33 \rightarrow \Delta f = 0.0303$

1. $\Delta f = 0.0303 < f_c \rightarrow H(1) = H(-1) = 1$

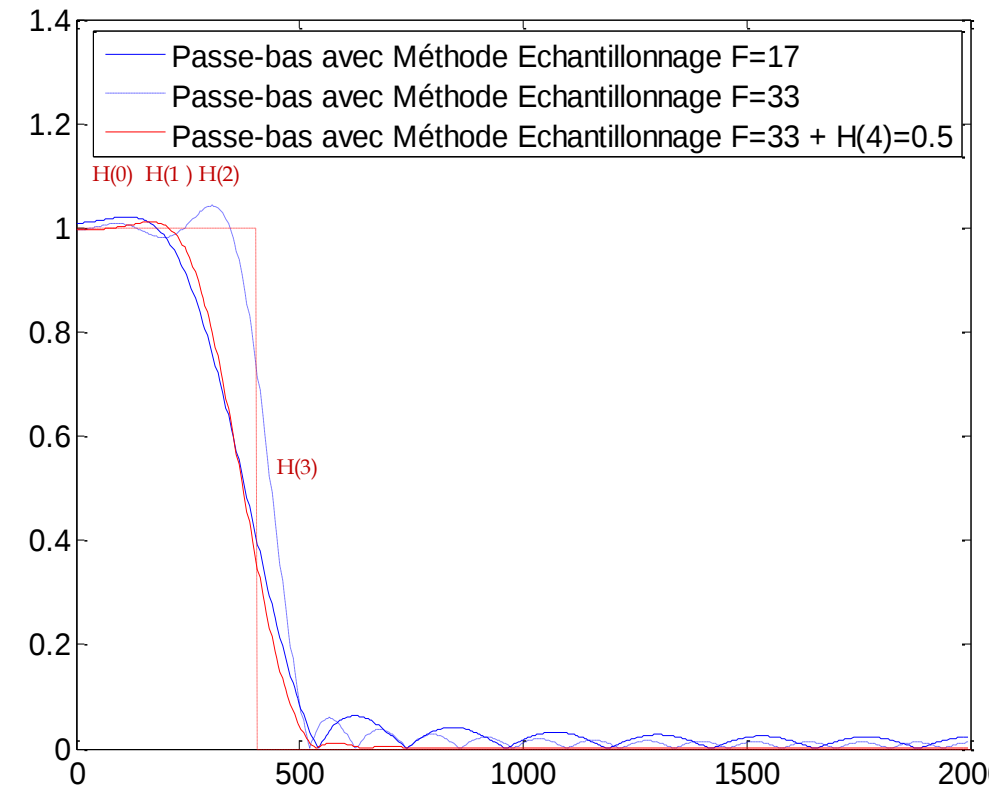
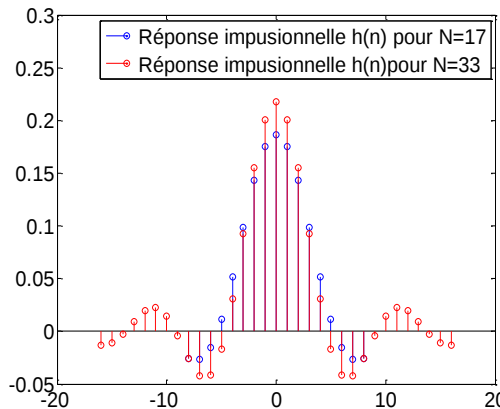
2. $\Delta f = 0.0606 < f_c \rightarrow H(2) = H(-2) = 1$

3. $\Delta f = 0.0909 < f_c \rightarrow H(3) = H(-3) = 0.5$

4. $\Delta f = 0.1212 > f_c \rightarrow H(4) = H(-4) = 0$

.....

16. $\Delta f = 0.4848 > f_c \rightarrow H(16) = H(-16) = 0$



$$h(n) = \frac{1}{N} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H(k) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right)$$

$$h(n) = \frac{1}{33} (1 + 2 \cos(2\pi n / 33) + 2 \cos(4\pi n / 33) + \cos(6\pi n / 33)) \quad \text{pour } -16 \leq n \leq 16$$

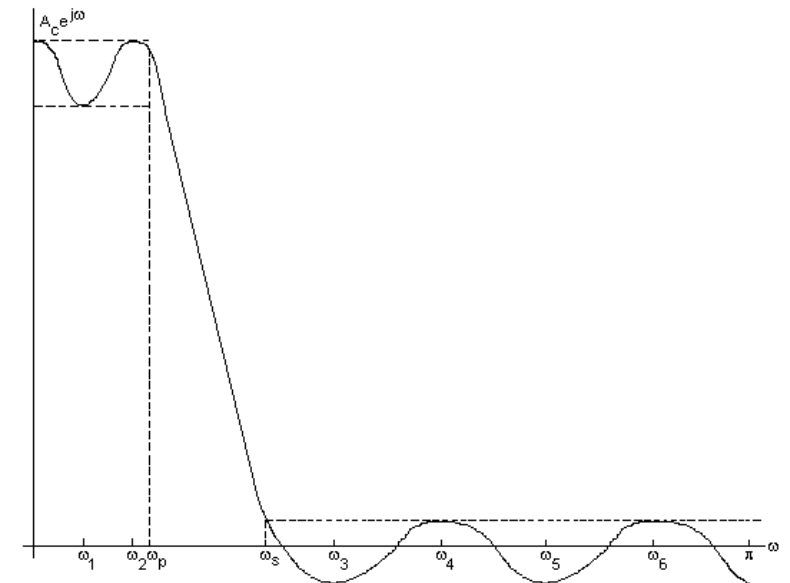
VI. Méthode de Parks-McClellan (Remez)

But : Réduire l'effet du phénomène de Gibbs afin d'obtenir l'ordre N le plus bas pour un niveau d'erreur donné dans la bande passante (equiripple filter).

Le procédé est optimal dans le sens où on minimise le maximum des amplitudes des ondulations dans la bande passante et atténuée.

Principe : Le gabarit du filtre est supposé connu. On cherche les N coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre RIF dont la réponse en fréquence $H(f)$ entre dans le Gabarit.

1. Supposer que les positions des extrema sont espacés uniformément dans la bande passante et d'atténuation.
2. Effectuer une interpolation polynomiale et réestimer les positions des extrema locaux.
3. Déplacer les extrema vers de nouvelles positions et Ré-itérer jusqu'à l'arrêt des déplacements d'extrema

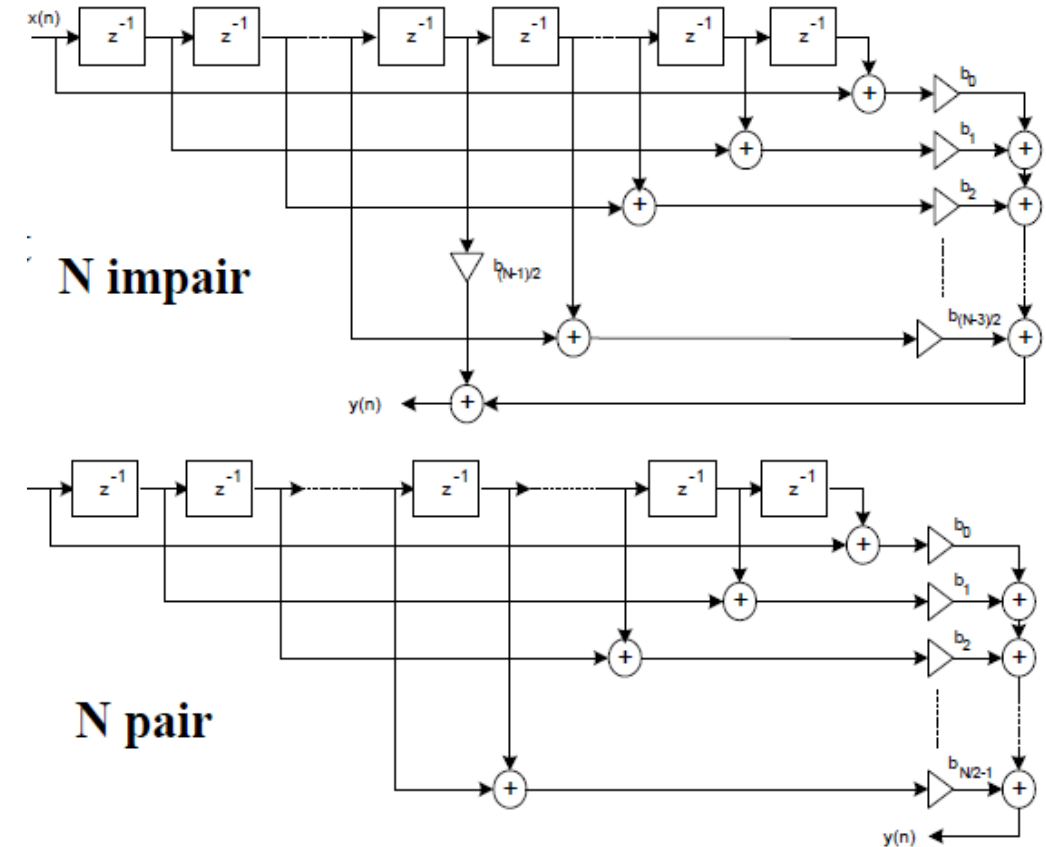


il y a six fréquences extremes, $+ω_p + ω_a$

VII. Constitution et réalisation des filtres RIF

- ✓ logique câblée (assemblage d'organes logiques tels que portes, mémoires, etc ...)
- ✓ logique programmée (organisation autour d'un processeur de traitement du signal (DSP) ou utilisation d'un microprocesseur (micro-ordinateur) standard)
- ✓ Pour un filtre à retard de groupe constant :

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n - 1) + \dots + b_1 x(n - N + 2) + b_0 x(n - N + 1)$$



Synthèse des Filtres RII