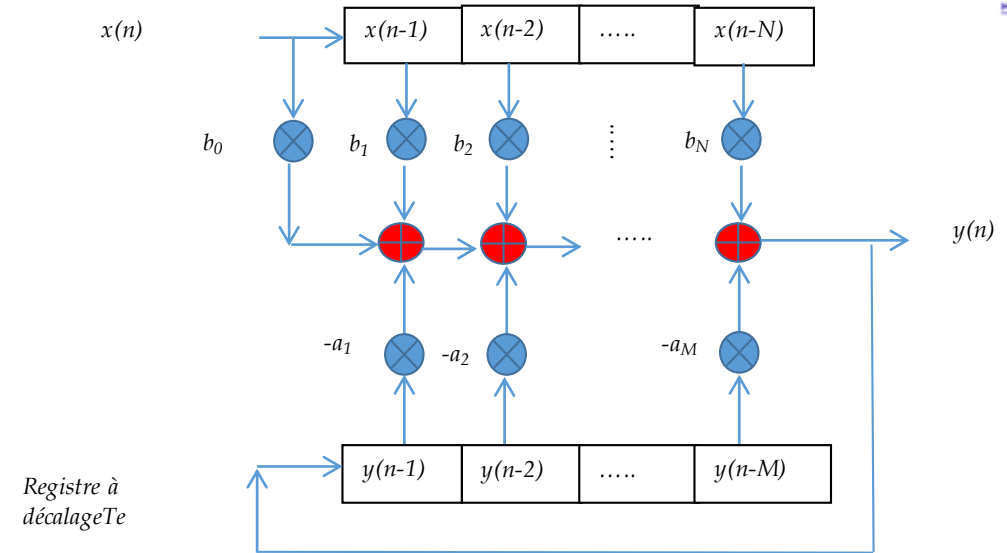


IV. Synthèse des Filtrés RII (Réponse Impulsionnelle Infinie)

I. Introduction

- Filtrage linéaire Numérique
- ✓ Fiable
- ✓ Reproductible
- ✓ Souple
- ✓ Temps réel (transmissions numériques, codage des sons MP3, synthèse de parole, télévision numérique par
- ✓ etc..
- La plupart des modèles de filtres analogiques peuvent ainsi être reproduits sous forme numérique.



II. Caractéristiques des Filtres RII

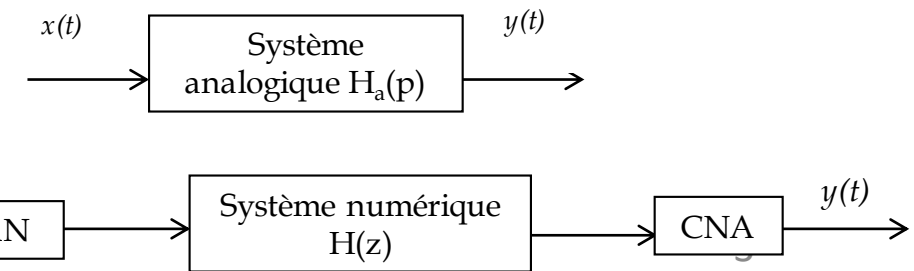
- ✓ Possibilité d'obtenir une bande de transition étroite pour un ordre raisonnable,
- ✓ Risque d'instabilité du à une grande sensibilité numérique des coefficients,
- ✓ Variation de phase fortement non linéaire.

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M a_i y(n-i) \longrightarrow H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i .z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M a_i .z^{-i}}$$

Comment ???

- ✓ Approche directe (placement des pôles et zéros)
- Approche indirecte (Synthèse d'un filtre analogique $H_a(p) \rightarrow p = \text{fct}(z) \rightarrow H(z)$)

Invariance Impulsionnelle et Transformation bilinéaire)



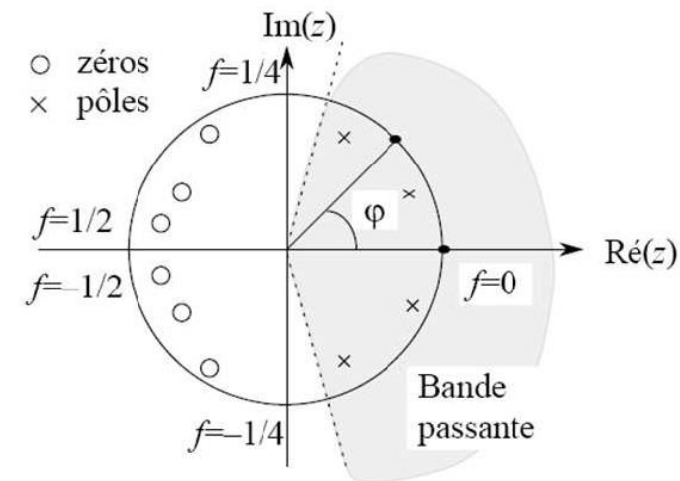
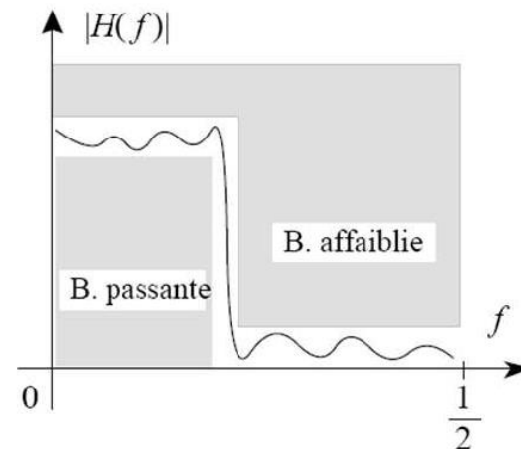
III. Méthode des pôles et zéros

Rappels

- ✓ Lorsqu'un zéro est placé sur un point donné du plan en z , la réponse fréquentielle présentera un minimum au point considéré.
- ✓ Un pôle produira un pic (un maximum) au point correspondant qui sera d'autant plus important que le pôle est proche de 1.

A partir des spécifications du filtre, placer des pôles et des zéros sur le cercle

Exemple : Passe-bas



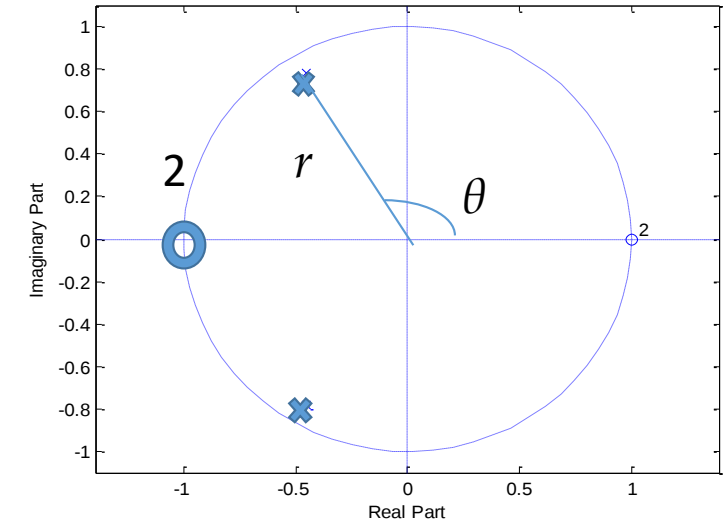
III. Méthode des pôles et zéros

Passe-bas de second ordre

$$H(z) = \frac{K(z+1)(z+1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}$$

$$\text{avec } K = \frac{1+r^2-2r \cos \theta}{4}$$

$$\theta = (f_c / f_e) \times 360^\circ \quad \text{et} \quad r = 1 - \frac{\Delta f_{3db}}{f_e} \pi$$



- ✓ Le caractère passe-bas est renforcé en complétant l'ensemble des zéros par autant de zéros que possible en $z=-1$ tout en conservant à $H(z)$ son caractère propre (degré du numérateur égal au degré du dénominateur).
- ✓ On ajuste le coefficient K pour obtenir un gain unitaire à $z=1$ pour un passe-bas.

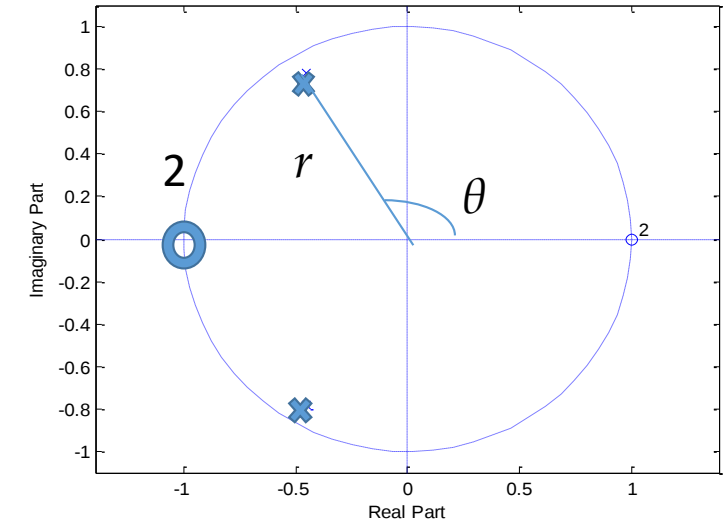
III. Méthode des pôles et zéros

Passe-bas de second ordre

$$H(z) = \frac{K(z+1)(z+1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}$$

$$\text{avec } K = \frac{1+r^2-2r \cos \theta}{4}$$

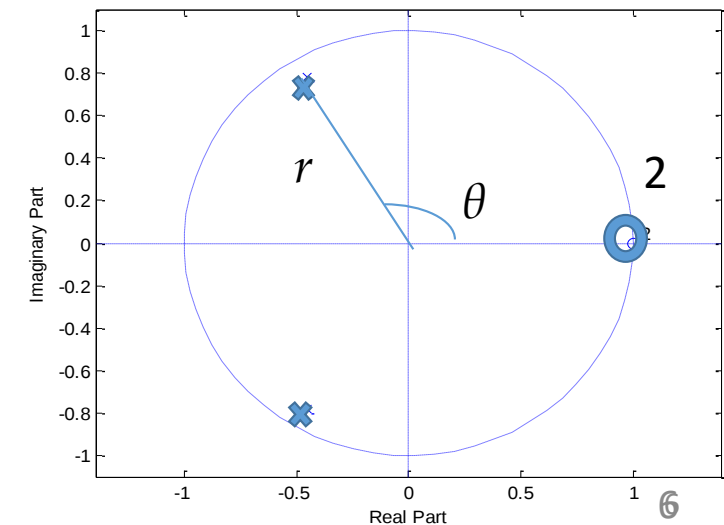
$$\theta = (f_c / f_e) \times 360^\circ \quad \text{et} \quad r = 1 - \frac{\Delta f_{3db}}{f_e} \pi$$



Passe-haut de second ordre

$$H(z) = \frac{K(z-1)(z-1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2 - 2z + 1)}{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}$$

$$\text{avec } K = \frac{1+r^2+2r \cos \theta}{4}$$



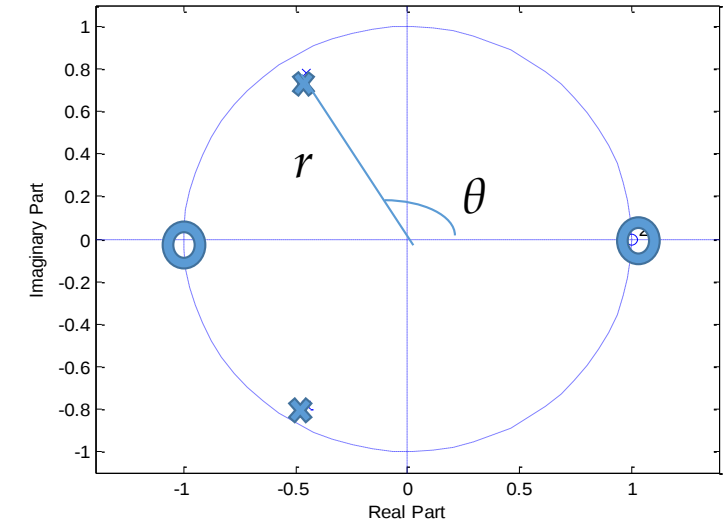
III. Méthode des pôles et zéros

Passe-bande de second ordre

$$H(z) = \frac{K(z-1)(z+1)}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2-1)}{z^2-2zr\cos\theta+r^2}$$

$$\text{avec } K = \frac{|e^{2j\theta} - 2r\cos\theta e^{j\theta} + r^2|}{|e^{2j\theta} - 1|}$$

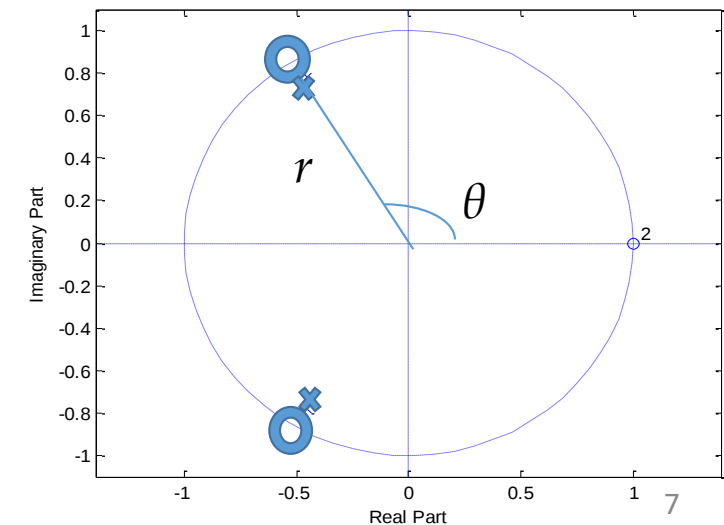
$$\theta = (f_c / f_e) \times 360^\circ \quad \text{et} \quad r = 1 - \frac{\Delta f_{3db}}{f_e} \pi$$



Coupe-bande de second ordre

$$H(z) = \frac{K(z-e^{-j\theta})(z-e^{j\theta})}{(z-re^{-j\theta})(z-re^{j\theta})} = \frac{K(z^2-2\cos\theta z+1)}{z^2-2zr\cos\theta+r^2}$$

$$\text{avec } K = \frac{1+r^2-2r\cos\theta}{2-2\cos\theta}$$



III. Méthode des pôles et zéros

Exemple : Trouver, grâce à la position des pôles et des zéros, la fonction de transfert et l'équation de récurrence d'un filtre numérique simple qui a les caractéristiques suivantes :

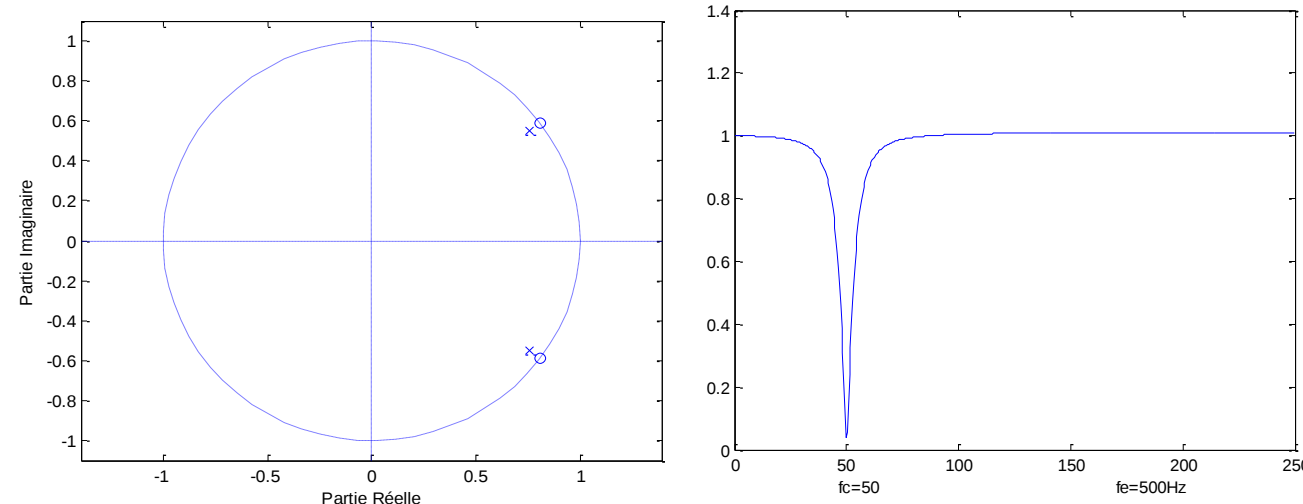
- Fréquence de coupure : 50 Hz
- Largeur de bande à 3 dB : ± 10 Hz
- Fréquence d'échantillonnage : 500Hz

$$\theta = (f_c / f_e) \times 360 = 360^\circ \times 50/500 = \pm 36^\circ$$

$$r = 1 - \frac{\Delta f_{3db}}{f_e} \pi = 0,937$$

$$H(z) = \frac{K(z - e^{-j\theta})(z - e^{j\theta})}{(z - re^{-j\theta})(z - re^{j\theta})} = K \frac{(z - e^{-j36^\circ})(z - e^{j36^\circ})}{(z - 0.937e^{-j36^\circ})(z - 0.937e^{j36^\circ})} = K \frac{1 - 1,618z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,516z^{-1} + 0.878z^{-2}}$$

- Avec $K = 0,947 \approx 1 \rightarrow y(n) \approx x(n) - 1.618x(n-1) + x(n-2) + 1.5161y(n-1) - 0.878y(n-2)$

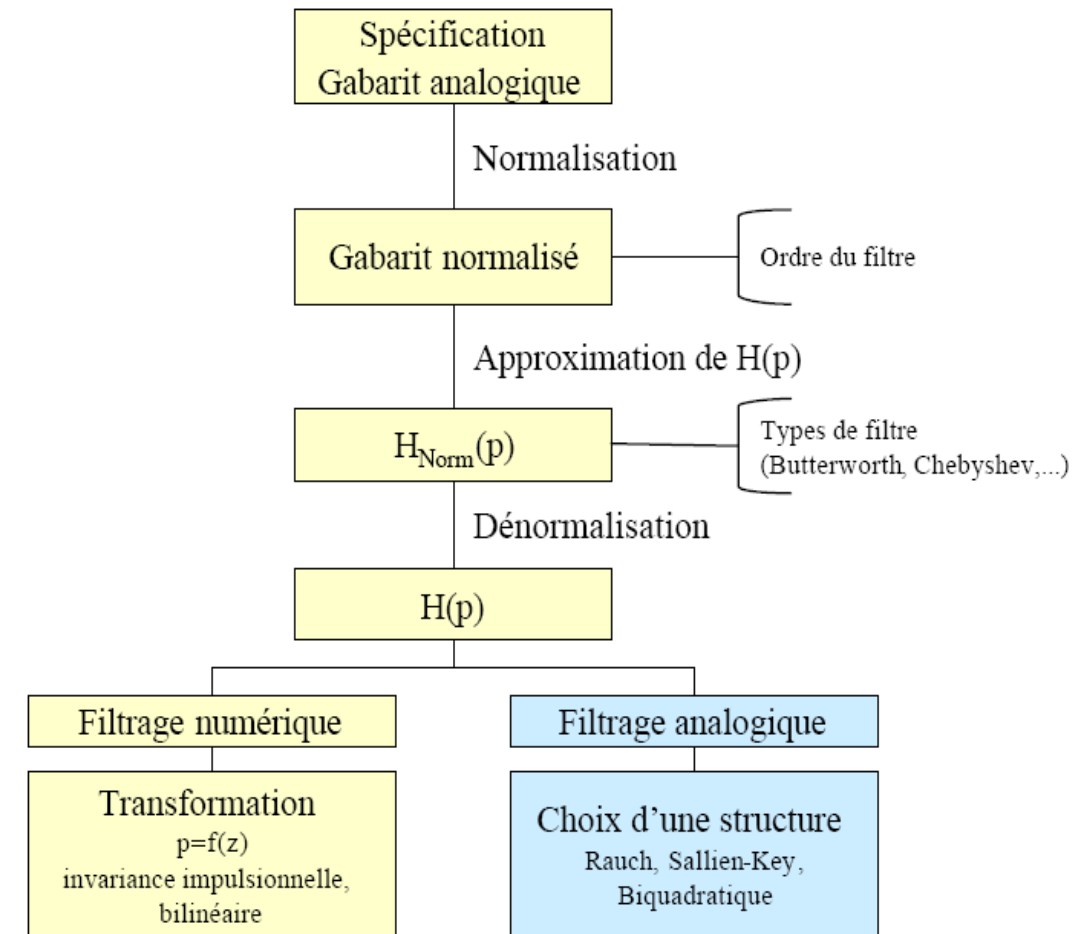


IV. Méthodes Indirectes

Synthétiser un filtre numérique récursif à partir d'un filtre analogique pris comme modèle:

$$H_a(p) \rightarrow p=fct(z) \rightarrow H(z)$$

- ✓ le filtre doit avoir une réponse impulsionnelle ou indicielle imposée : ce sont les méthodes de **l'invariance impulsionnelle** et de l'invariance indicielle.
- ✓ le filtre doit avoir une réponse fréquentielle entrant dans un gabarit donné : c'est la **transformation bilinéaire**.

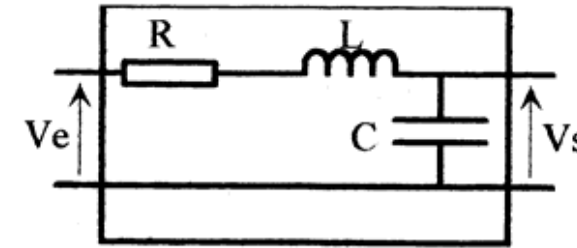
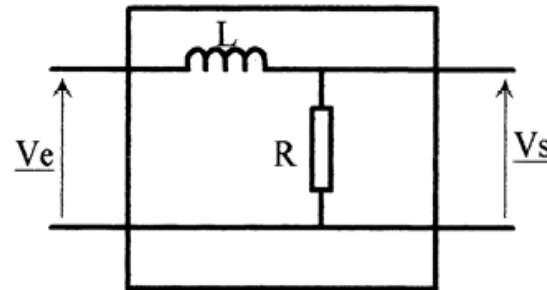
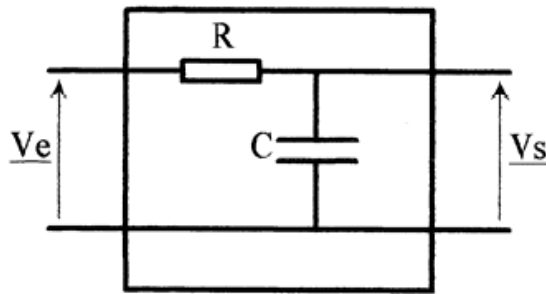


IV. Méthodes Indirectes

Rappels sur les filtres analogiques

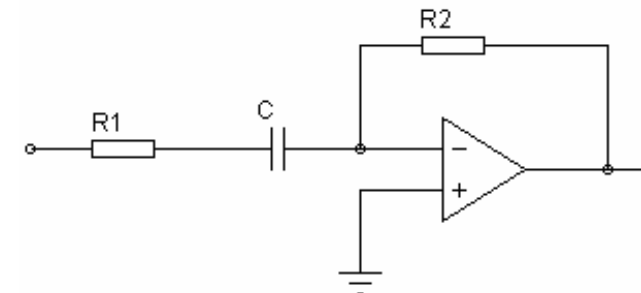
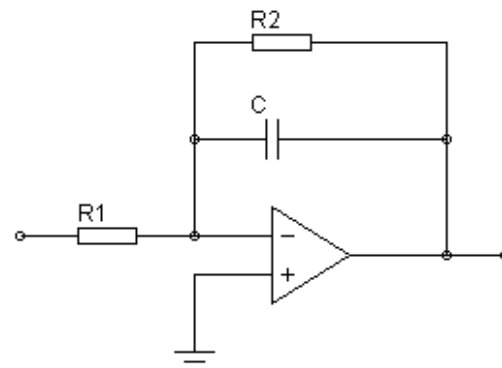
Pour concevoir un filtre analogique :

- ✓ Employer des filtres passifs en combinant résistances, condensateurs et/ou de bobines.



https://les-electroniciens.com/sites/default/files/cours/filtrage_analogique.pdf

- ✓ Utiliser des filtres actifs comportant un élément amplificateur (transistor, AIL, etc.)



IV. Méthodes Indirectes

Rappels sur les filtres analogiques

Remarques A :

- ✓ Filtres d'ordre N : Mise en cascade de filtres du premier et du deuxième ordre.
- ✓ Largeur de la zone de transition inversement proportionnelle au nbre de cellules ($+N \uparrow$ et $+\Delta f \downarrow$).
- ✓ Les filtres passe-bande ou coupe-bande ($N = 2, 4, 6, \dots$) car ils sont formés de paires de cellules : 2 RC ou RC+RL.

IV. Méthodes Indirectes

Rappels sur les filtres analogiques

Remarques B

À partir de quelques centaines de MHz, tous les composants (y compris les fils ou circuits imprimés) ont des inductances et des capacités non négligeables à ces fréquences et font parties du filtre → passe-bas.

- ✓ les filtres passifs (L,C, quartz, etc ;) sont utilisés pour les hautes fréquences
- ✓ les filtres actifs (R,C, ALI) utilisent des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) limités à 1Mhz ou les filtres à capacité commutés (R et C intégrés, ALI, Interrupteur commandé MOS) ont des fréquences programmables (<10 Mhz)
- ✓ les filtres numériques sont limités à des fréquences < 100MHz

IV. Méthodes Indirectes

Rappels sur les filtres analogiques

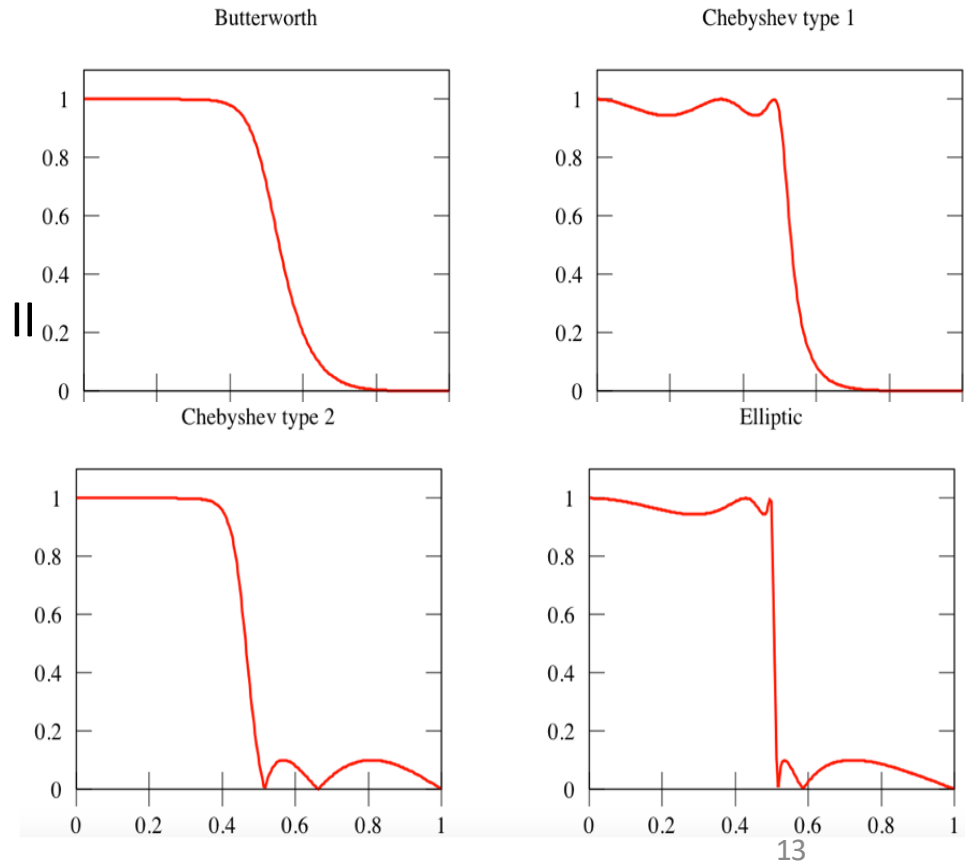
Un ensemble de filtres analogiques testés et éprouvés pour leurs propriétés en termes de pente d'atténuation et d'ondulation dans la bande passante et atténuée

Butterworth : Coupure *peu raide* mais *gain constant en bande* Passante, déphasage quasi linéaire

Tchebychev (Chebyshev) : *Raideur de coupure importante* mais *N ondulations* dans la bande passante (Cheb 1) ou atténuée (Cheb II

Cauer (dit aussi elliptiques) : *Coupure extrêmement raide* mais *ondulations* dans la bande passante et Atténuée.

Bessel : *Retard de groupe presque constant* mais *mauvaise sélectivité même pour ordre élevé*



IV. Méthodes Indirectes

Rappels sur les filtres analogiques

Butterworth : la réponse d'amplitude est maximalelement plate dans la bande passante et monotonement décroissante à partir d'une certaine fréquence (fréquence de coupure)

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

$$N \geq \frac{\log\left(10^{\frac{Aa}{10}} - 1\right)}{2 \log(\omega_a / \omega_p)}$$

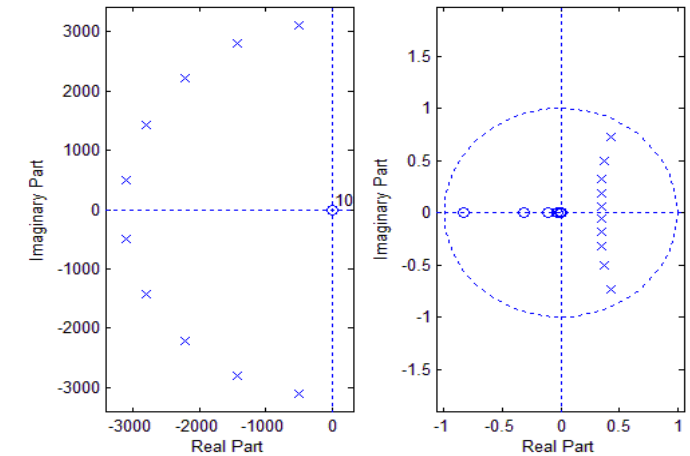
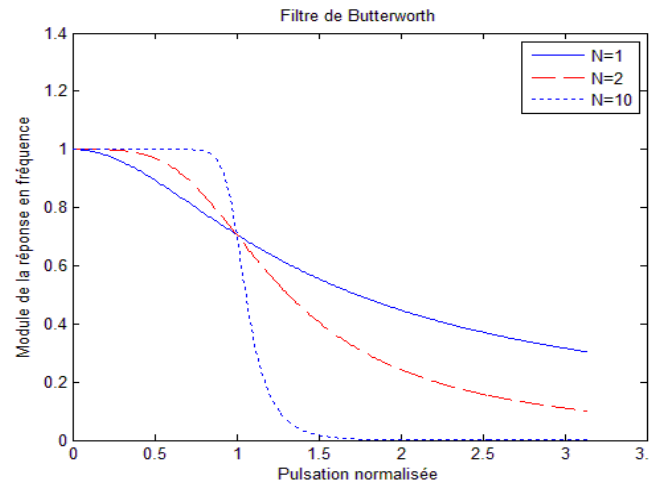
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

$$N \geq \frac{\log\left(10^{\frac{Aa}{10}} - 1\right) / \left(10^{\frac{Ap}{10}} - 1\right)}{2 \log(\omega_a / \omega_p)}$$

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)
2	$p^2 + \sqrt{2}p + 1$
3	$(p^2 + p + 1)(p + 1)$
4	$(p^2 + 1.8477p + 1)(p^2 + 0.7653p + 1)$
5	$(p^2 + 1.6180p + 1)(p^2 + 0.6180p + 1)(p + 1)$
6	$(p^2 + 1.9318p + 1)(p^2 + \sqrt{2}p + 1)(p^2 + 0.5176p + 1)$

$\omega_c = \sqrt{\omega_p \omega_a}$ pulsation de coupure et

$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{Ap}{10}} - 1}$ Paramètre de conception fixant la tolérance dans la bande passante $\delta_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$



IV. Méthodes Indirectes

Rappels sur les filtres analogiques

Tchebychev (Chebyshev) : Raideur de coupure importante mais ondulations dans la bande passante (Chebyshev 1) ou atténuée (Chebyshev 2)

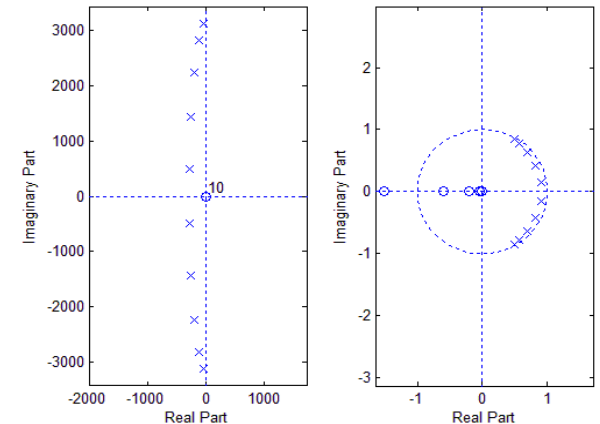
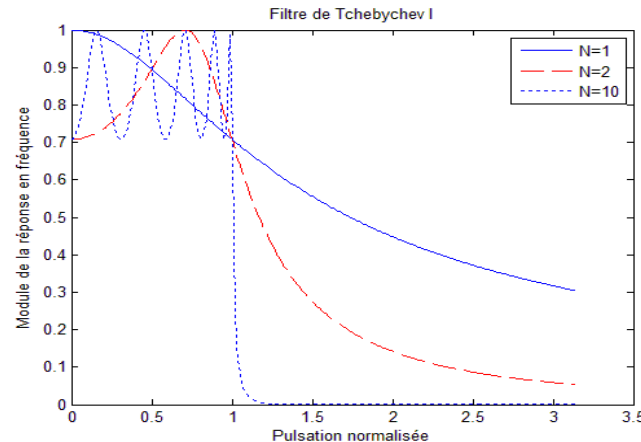
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}} \quad T_N(x) = \begin{cases} \cos[N \arccos(x)] & \text{pour } 0 \leq |x| \leq 1 \\ \cosh[N \operatorname{arccosh}(x)] & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$N \geq \frac{\log\left(\sqrt{\left(10^{\frac{Aa}{10}} - 1\right) / \left(10^{\frac{Ap}{10}} - 1\right)} + \sqrt{\left(10^{\frac{Aa}{10}} - 1\right) / \left(10^{\frac{Ap}{10}} - 1\right)} - 1\right)}{\log\left(\omega_a / \omega_p + \sqrt{(\omega_a / \omega_p)^2 - 1}\right)} \approx \frac{\log\left(2 \cdot 10^{\frac{Aa}{20}} / \sqrt{10^{\frac{Ap}{10}} - 1}\right)}{\log\left(\omega_a / \omega_p + \sqrt{(\omega_a / \omega_p)^2 - 1}\right)}$$

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad x \geq 1$$

$$N \geq \frac{\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\left(10^{\frac{Aa}{10}} - 1\right) / \left(10^{\frac{Ap}{10}} - 1\right)}\right)}{\operatorname{arccosh}(\omega_a / \omega_p)}$$

Ordre du filtre	Dénominateur (le numérateur est à 1)	$\varepsilon=1$
2	$0.9070 p^2 + 0.9956 p + 1$	
3	$(1.0058 p^2 + 0.497 p + 1)(2.023 p + 1)$	
4	$(1.0136 p^2 + 0.2828 p + 1)(3.5791 p^2 + 2.4113 p + 1)$	
5	$(2.3293 p^2 + 1.0911 p + 1)(1.0118 p^2 + 0.1610 p + 1)(3.454 p + 1)$	



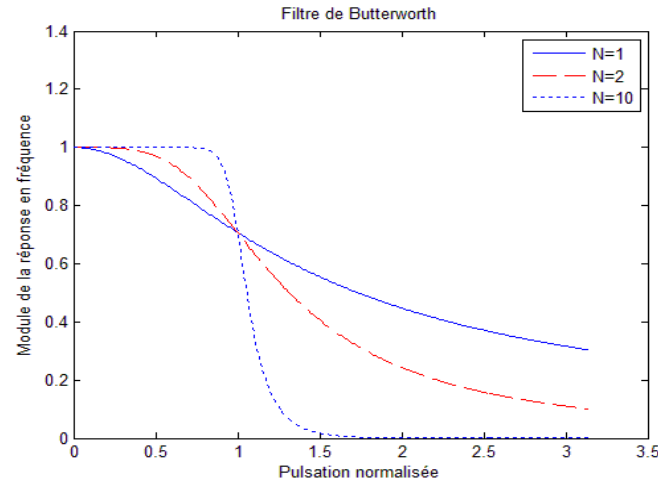
IV. Méthodes Indirectes

Rappels sur les filtres analogiques

Butterworth :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$

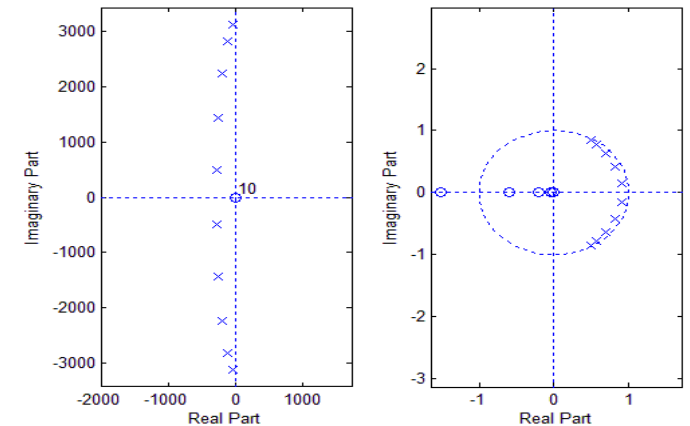
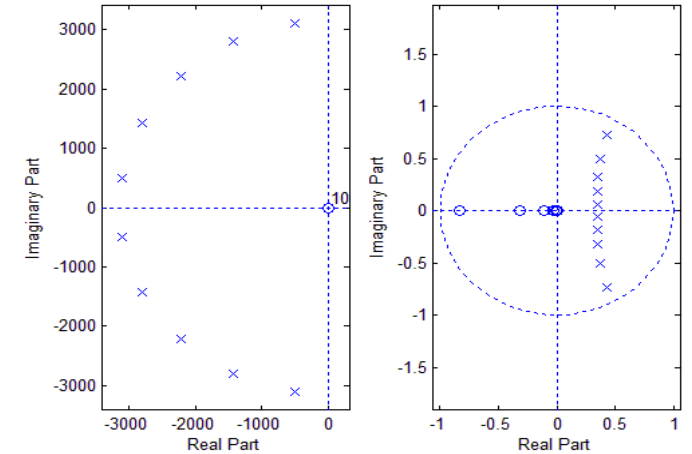
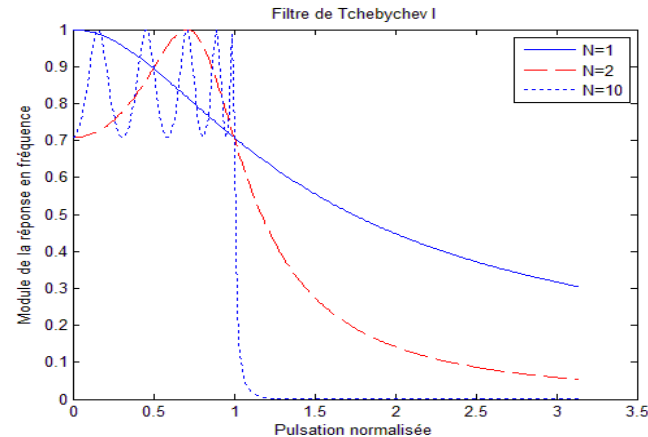
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}}$$



Tchebychev (Chebyshev) :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}}$$

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos[N \cdot \arccos(x)] & \text{pour } 0 \leq |x| \leq 1 \\ \cosh[N \cdot \operatorname{arccosh}(x)] & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases}$$



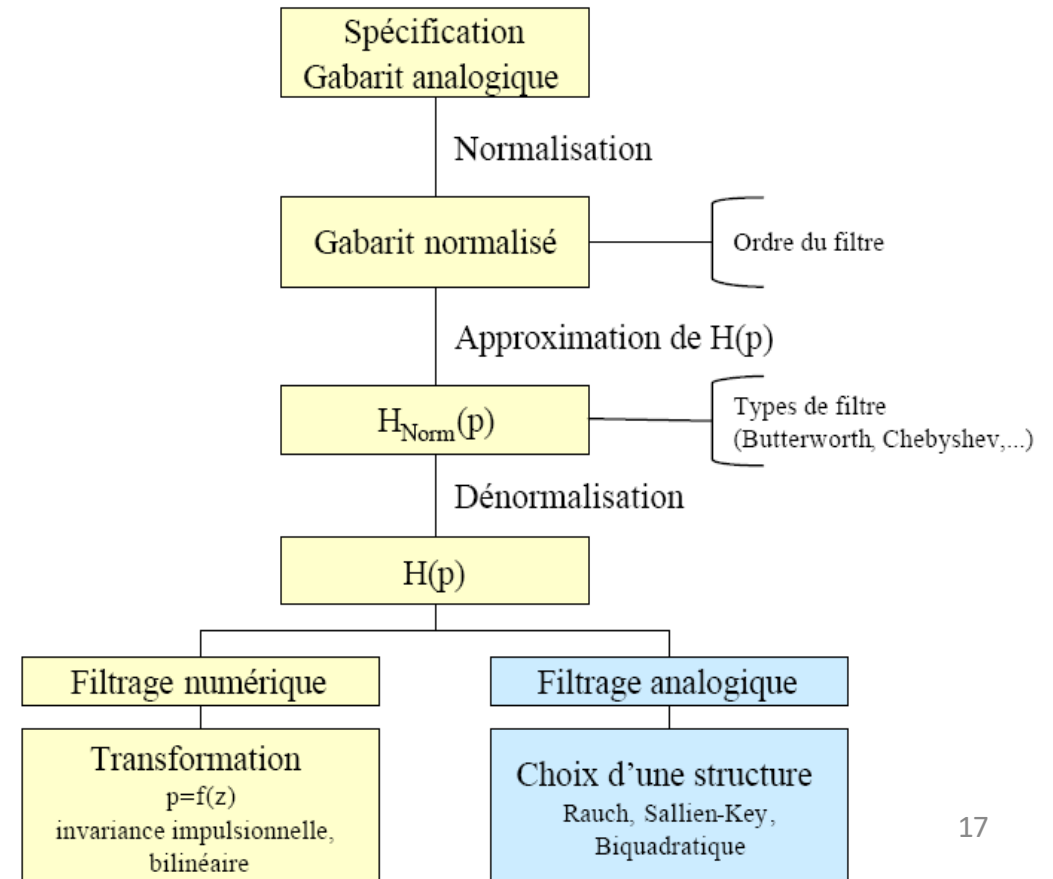
IV. Méthodes Indirectes

Dénormalisation

$H_N(p)$ des filtres analogiques polynômiaux (Butterworth, Tchebychev, Bessel, Cauer, etc.) sont données pour des *fréquences de coupure normalisées* et uniquement pour des filtres *passé-bas*

Passe-bas $p = p / \omega_A$	Passe-bande $p = \frac{1}{B} \left(\frac{p}{\omega_A} + \frac{\omega_A}{p} \right)$
Passe-haut $p = \omega_A / p$	Coupe-bande $p = \left[\frac{1}{B} \left(\frac{p}{\omega_A} + \frac{\omega_A}{p} \right) \right]^{-1}$

$$B = (\omega_{A2} - \omega_{A1}) \quad \omega_A = \sqrt{\omega_{A1} \omega_{A2}}$$



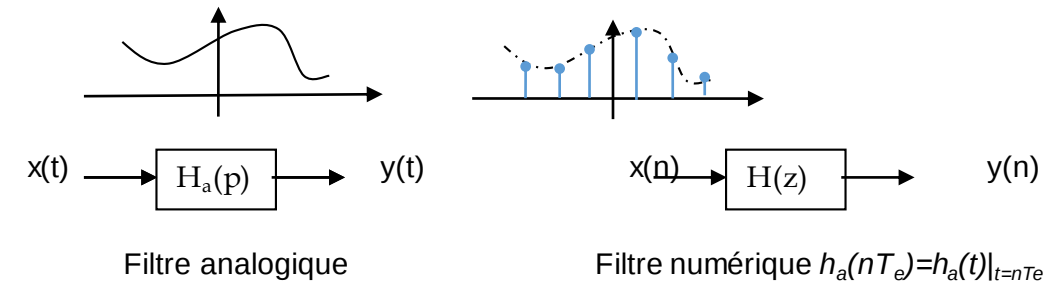
V. Méthode de l'invariance impulsionnelle

$H_a(p)$ Filtre analogique connue $\rightarrow$ la réponse impulsionnelle désirée $h_a(t)$

On échantillonne $h_a(t) \rightarrow h(n)$.

$h(n) \rightarrow$ Fonction de transfert $H(z)$

$$X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e) \Rightarrow h(n) = T_e \cdot h_a(nT_e)$$



$$H_a(p) \xrightarrow{L^{-1}} h_a(t) \xrightarrow{t=nT_e} h(n) = T_e h_a(nT_e) \xrightarrow{TZ} H(z)$$

Ou
$$H(z) = T_e \sum_{\text{pôles } p_i \text{ de } H_a(p)} \text{Résidus} \left(\frac{H_a(p)}{1 - z^{-1} e^{pT_e}} \right) \Bigg|_{p=p_i}$$

- **Remarque** : Nécessité de définir une f_e (fréquence supposée nulle au-delà) $\rightarrow$ Non applicable aux filtres passe haut ou coupe-bande (f_{max} est ∞ donc on ne peut définir $f_e > 2f_{max}$).

V. Méthode de l'invariance impulsionnelle

Exemple 1: On veut synthétiser un filtre numérique passe-bas de pulsation ω_c qui possède la même réponse impulsionnelle qu'un filtre passe-bas analogique du 1er ordre de transmittance normalisée:

$$H_N(p) = \frac{1}{(1 + p)}$$

1. On dénormalise $H_a(p) = H_N(p) \Big|_{p=p/\omega_c} = \frac{1}{1 + (p/\omega_c)} = \frac{\omega_c}{\omega_c + p}$

2. $H_a(p) \xrightarrow{L^{-1}} h_a(t) \xrightarrow{t=nT_e} h(n) = T_e h_a(nT_e) \xrightarrow{TZ} H(z)$

$$H_a(p) = \frac{\omega_c}{\omega_c + p} \longrightarrow h_a(t) = \omega_c e^{-\omega_c t} U(t) \longrightarrow h(n) = T_e \omega_c e^{-nT_e \omega_c} U(n) \longrightarrow H(z) = T_e \omega_c \frac{1}{1 - e^{-T_e \omega_c} z^{-1}} = T_e \omega_c \frac{z}{z - e^{-T_e \omega_c}}$$

$$\text{Ou} \quad H(z) = T_e \sum_{\text{pôles } p_i \text{ de } H_a(p)} \text{Résidus} \left(\frac{H_a(p)}{1 - z^{-1} e^{pT_e}} \right) \Bigg|_{p=p_i} = T_e \left((p + \omega_c) \frac{\omega_c}{p + \omega_c} \frac{1}{1 - z^{-1} e^{pT_e}} \right) \Bigg|_{p=-\omega_c} = T_e \frac{\omega_c}{1 - z^{-1} e^{-\omega_c T_e}}$$

V. Méthode de l'invariance impulsionnelle

Exemple : On considère le filtre analogique d'ordre 3 associé à la fonction d'approximation de Butterworth. Réaliser le filtre numérique passe-bas correspondant en utilisant la méthode de l'invariance impulsionnelle. La fréquence de coupure est $f_c=1$ kHz et la fréquence d'échantillonnage $f_e=10$ kHz.

Le filtre de Butterworth d'ordre 3 est formé de 2 cellules d'ordre 1 et 2

$$H_N(p) = \frac{1}{(1+p)(1+p+p^2)}$$

1. Dénormalisation

$$H(p) = \frac{1}{(1+p/\omega_c)(1+p/\omega_c+(p/\omega_c)^2)}$$

$$H(p) = \frac{\omega_c^3}{(\omega_c+p)(\omega_c^2+\omega_c p+p^2)}$$

H(p)	$T_e.H(z)$
$\frac{1}{p+a}$	$T_e \frac{1}{1-e^{-aT_e} z^{-1}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega_0^2}$	$T_e \frac{1-e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)}{1-2e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)+e^{-2aT_e} z^{-2}}$
$\frac{\omega_0}{(p+a)^2+\omega_0^2}$	$T_e \frac{e^{-aT_e} z^{-1} \sin(\omega_0 T_e)}{1-2e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)+e^{-2aT_e} z^{-2}}$

V. Méthode de l'invariance impulsionnelle

2. Décomposer

$$H(p) = \frac{\omega_c^3}{(p + \omega_c)(p^2 + \omega_c p + \omega_c^2)}$$

$$H(p) = \frac{A}{(p + \omega_c)} + \frac{Bp + C}{(p^2 + \omega_c p + \omega_c^2)}$$

$$H(p) = \frac{\omega_c}{(p + \omega_c)} - \frac{\omega_c p}{(p^2 + \omega_c p + \omega_c^2)}$$

$$H(p) = \frac{\omega_c}{(p + \omega_c)} - \frac{\omega_c p}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}} = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \omega_c \frac{p + \frac{\omega_c}{2} - \frac{\omega_c}{2}}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}}$$

$$H(p) = \frac{\omega_c}{(p + \omega_c)} - \omega_c \frac{p + \frac{\omega_c}{2}}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}} + \frac{\omega_c}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}\omega_c}{2}}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}}$$

$$p_1 = -\omega_c = -2000\pi \quad p_{2,3} = -\omega_c \frac{1 \pm \sqrt{3}j}{2} = -1000\pi(1 \pm \sqrt{3}j) \quad T_e p_{2,3} = -1000\pi(1 \pm \sqrt{3}j) \cdot 10^{-4} = -\frac{\pi}{10}(1 \pm \sqrt{3}j) = -a \pm j\omega_0$$

$$H(z) = T_e \omega_c \frac{1}{1 - e^{-\omega_c T_e} z^{-1}} - T_e \omega_c \frac{1 - e^{-\pi/10} \cos(\pi\sqrt{3}/10) z^{-1}}{1 - 2e^{-\pi/10} \cos(\pi\sqrt{3}/10) z^{-1} + e^{-\pi/5} z^{-2}} + T_e \omega_c \frac{e^{-\pi/10} \sin(\pi\sqrt{3}/10)}{1 - 2e^{-\pi/10} \cos(\pi\sqrt{3}/10) z^{-1} + e^{-\pi/5} z^{-2}}$$

$$H(z) = \pi/5 \left(\frac{1}{1 - 0.5335z^{-1}} - \frac{0.781 - 0.625z^{-1}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.5335z^{-2}} \right)$$

H(p)	T _e .H(z)
$\frac{1}{p + a}$	$T_e \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}}$
$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega_0^2}$	$T_e \frac{1 - e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e)}{1 - 2e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2aT_e} z^{-2}}$
$\frac{\omega_0}{(p + a)^2 + \omega_0^2}$	$T_e \frac{e^{-aT_e} z^{-1} \sin(\omega_0 T_e)}{1 - 2e^{-aT_e} z^{-1} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2aT_e} z^{-2}}$

VI. Méthode de la Transformation bilinéaire

Objectif : Faire coïncider au mieux les *domaines analogique et numérique*

Filtre analogique $H(p) \rightarrow$ Filtre numérique $H(z)$ avec $z = e^{2\pi j f T_e} = e^{p T_e} \Rightarrow p = \ln(z)/T_e$.

Relation non linéaire entre les fréquences analogiques f_A et les fréquences numériques f_N

$\rightarrow$ Approximation de $\ln(z)$ pour conserver le caractère polynomiale de $H(z)$

une approximation de $\ln(z)$ par les séries de Laurent :

$$\ln(z) \approx 2 \left(\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^5 + \dots \right) \rightarrow p = \frac{\ln(z)}{T_e} \approx \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$$

$$p = j\omega_A = \frac{\ln(z)}{T_e} = \frac{2}{T_e} \frac{e^{j\omega_N T_e} - 1}{e^{j\omega_N T_e} + 1} = \frac{2}{T_e} \frac{e^{j\omega_N T_e/2} (e^{j\omega_N T_e/2} - e^{-j\omega_N T_e/2})}{e^{j\omega_N T_e/2} (e^{j\omega_N T_e/2} + e^{-j\omega_N T_e/2})} = \frac{2}{T_e} \frac{j \sin(\omega_N T_e / 2)}{\cos(\omega_N T_e / 2)}$$

$$\rightarrow \omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_N T_e}{2} \right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi f_N}{f_e} \right)$$

VI. Méthode de la Transformation bilinéaire

- ✓ A partir des spécifications du filtre numérique, calculer la pulsation analogique

$$\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_N T_e}{2} \right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi f_N}{f_e} \right)$$

- ✓ Déterminer le gabarit du filtre analogique $H_N(p)$ normalisée d'ordre n .
- ✓ Dénormaliser le filtre en fonction de $\omega_A \rightarrow H(p)$

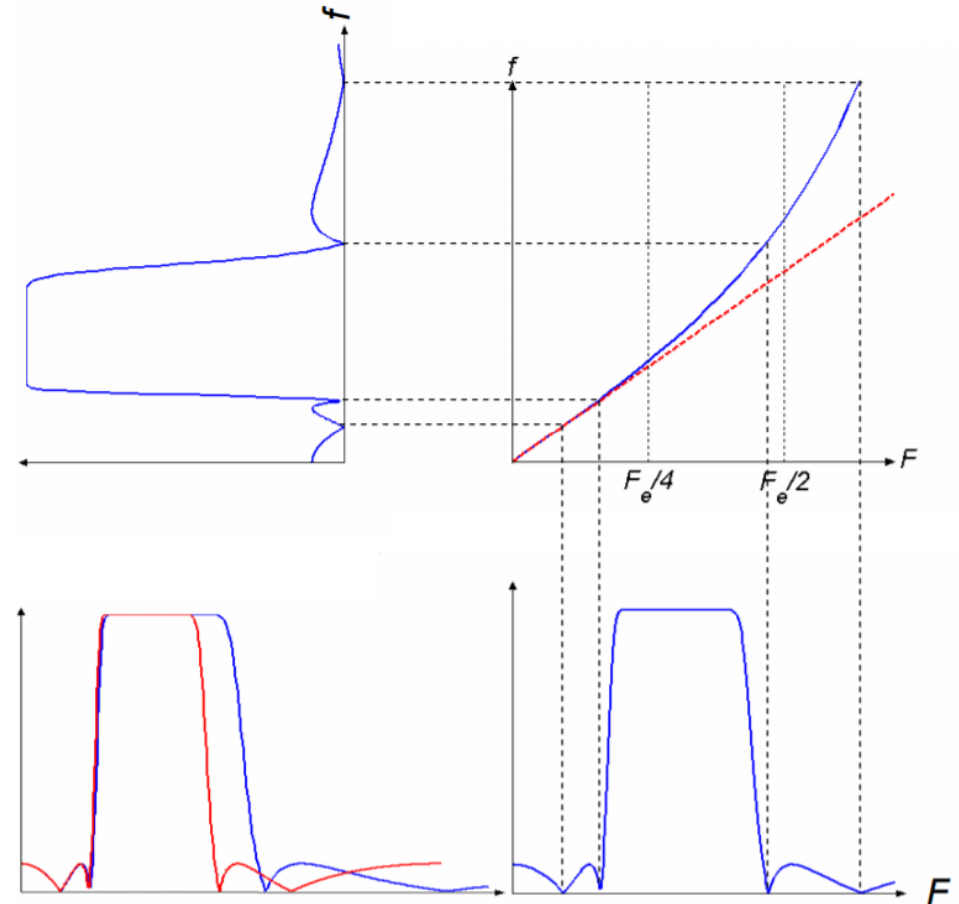
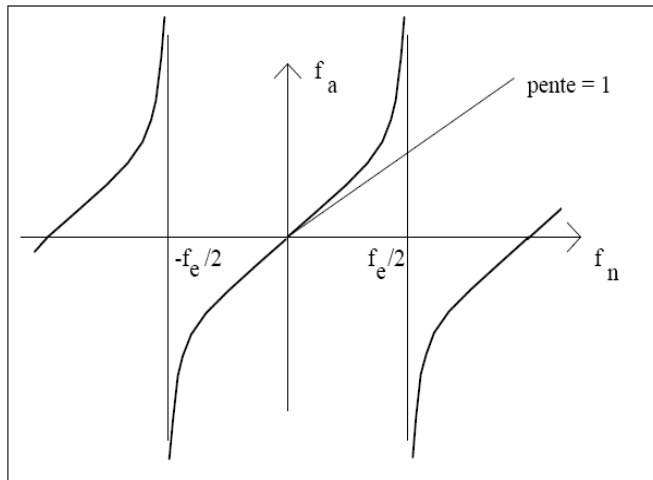
- ✓ $H(p) \rightarrow H(z) = H(p)$ où

$$p = \frac{\ln(z)}{T_e} \approx \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T_e} \frac{z - 1}{z + 1}$$

VI. Méthode de la Transformation bilinéaire

Remarque : Distorsion sur l'axe des fréquences

$$\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_N T_e}{2} \right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi f_N}{f_e} \right)$$



<https://perso.esiee.fr/~venardo/doc/FiltresNumeriques.pdf>

VI. Méthode de la Transformation bilinéaire

Exemple 1 : On désire concevoir un filtre passe-bas numérique de premier ordre à partir d'une fonction de transfert d'un filtre RC dans le domaine continu ($H_N(p)=1/(1+p)$). La fréquence de coupure désirée est $f_N=30$ Hz et la fréquence d'échantillonnage est $f_e=150$ Hz

- ✓ Calcul de $\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_N T_e}{2}\right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi f_N}{f_e}\right) \Rightarrow \omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{2}{T_e} 0.7265$
- ✓ Dénormaliser le filtre en fonction de $\omega_A \Rightarrow H(p) = \frac{1}{(1+p)} \Big|_{p=p/\omega_A} = \frac{\omega_A}{p + \omega_A} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.7265}{p + \frac{2}{T_e} 0.7265}$
- ✓ Déterminer $H(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.7265}{\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} + \frac{2}{T_e} 0.7265} = \frac{0.7265(z+1)}{(z-1) + 0.7265(z+1)} = \frac{0.7265(z+1)}{1.7265z - 0.2735}$

Remarque $f_A = \frac{2}{T_e(2\pi)} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{f_e}{\pi} 0.7265 = 34.69 \neq f_N = 30$

VI. Méthode de la Transformation bilinéaire

Exemple 2 : On désire réaliser un filtre numérique passe-bas du second ordre avec les caractéristiques suivantes : fréquence de coupure $f_N = 500$ Hz (gain de 1), fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ kHz,

✓ Calcul de $\omega_A = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_N T_e}{2}\right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{2}{T_e} 0.325$

✓ Dénormaliser $H_N(p) = \frac{0.1075}{p^2 + 0.1075p + 1} \Rightarrow H(p) = H_N(p = p / \omega_A) = \frac{0.1075 \omega_A^2}{p^2 + 0.1075 p \omega_A + \omega_A^2} = \frac{\frac{4}{T_e^2} 0.1056}{p^2 + \frac{2}{T_e} 0.035 p + \frac{4}{T_e^2} 0.1056}$

✓ Déterminer $H(z) = H(p) \Big|_{p = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{4}{T_e^2} 0.1056}{\left(\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \frac{2}{T_e} 0.035 \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} + \frac{4}{T_e^2} 0.1056} = \frac{0.1056}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 0.035 \frac{z-1}{z+1} + 0.1056}$

$$H(z) = \frac{0.1056(z+1)^2}{(z-1)^2 + 0.035(z-1)(z+1) + 0.1056(z+1)^2} = \frac{0.1056(z+1)^2}{1.14z^2 - 1.7888z + 1.0706}$$

V. Filtrage Multi-Cadences