

# I. Analyse fréquentielle des SLID (TFTD, TFD et Fenêtrage)

# I. Introduction

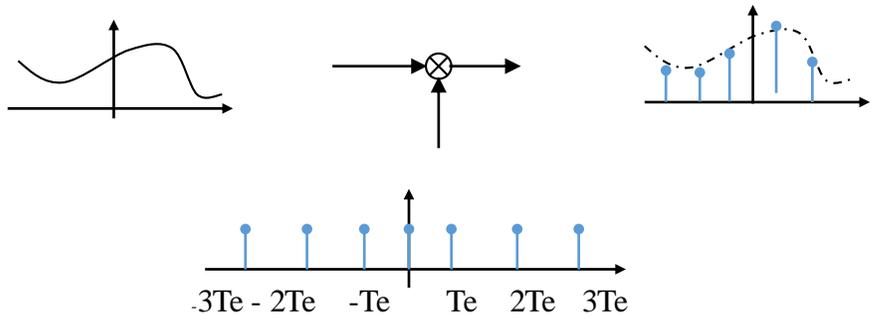
- But de la transformée de Fourier : Mettre en évidence des caractéristiques du signal non évidentes dans la représentation temporelle soit les propriétés fréquentielles (spectrales).
- Description fréquentielle permet de caractériser simplement les filtres linéaires, et faciliter leur étude.
- Problème : Comment calculer la transformée de Fourier  $X(f)$  d'un signal  $x(t)$  à l'aide d'un ordinateur

$$TF\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

- ⇒ Discrétiser le signal (échantillonnage)
- ⇒ Tronquer temporellement ce signal
- ⇒ Discrétiser sa transformée de Fourier.

# II. Rappels

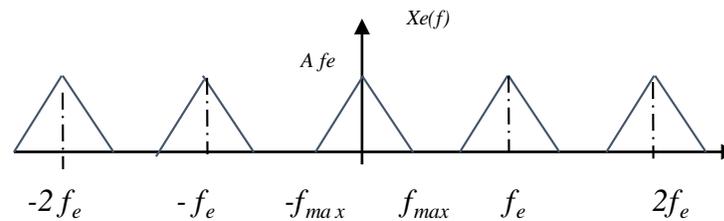
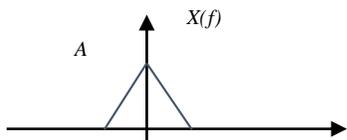
## Echantillonnage idéal



$$x_e(t) = x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT_e)$$

$$x_e(t) = \sum_n x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

$$X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e)$$

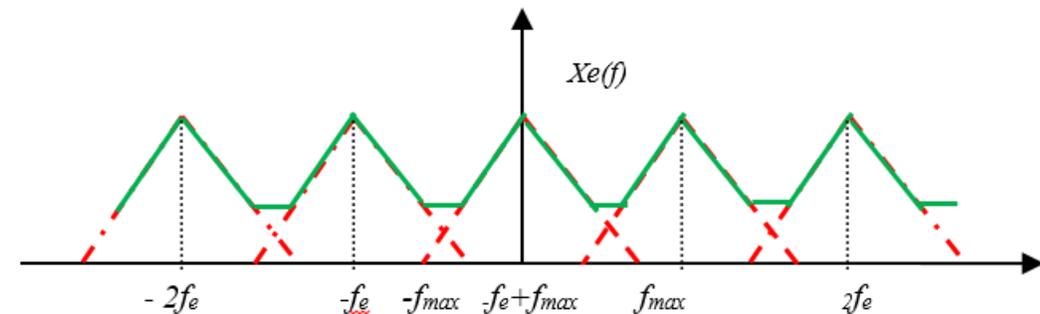
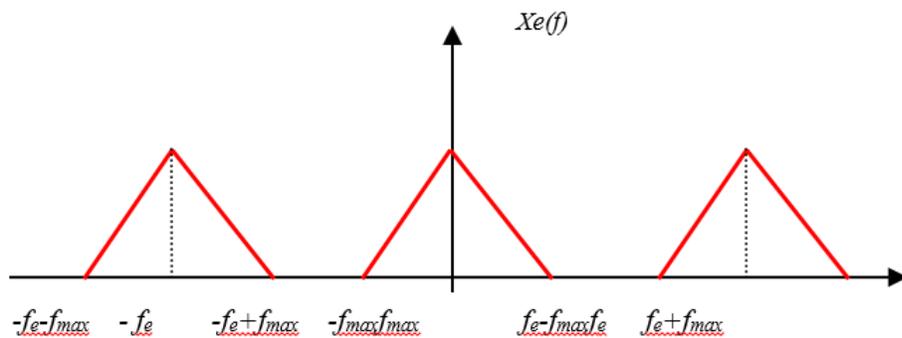


# II. Rappels

## Echantillonnage idéal

2 Cas :

- $f_e > 2 f_{max} \Rightarrow$  motifs disjoints  $\Rightarrow$  Extraire  $X(f)$  grâce à un filtre passe-bas idéal  $\Rightarrow$  reconstitution parfaite le signal  $x(t)$  à partir des  $x_e(t)$ .



- $f_e > 2 f_{max} \Rightarrow$  motifs élémentaires de  $|X_e(f)|$  se recouvrent (Repliement de spectres)  $\Rightarrow$  Impossible de récupérer le spectre  $X(f)$  par un filtrage approprié

$\Rightarrow$  une fréquence d'échantillonnage égale à la fréquence de Nyquist ( $f_e/2 > f_{max}$ )

## II. Rappels

Remarques :

- ✓ Dans la pratique, on prend une fréquence d'échantillonnage supérieure à la fréquence de Nyquist ( $f_e/2 > f_{max}$ ) car on ne peut réaliser un filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure très nette.

Exemple : Spectre de la Voix est compris entre 300Hz et 3400Hz. Numériser la parole dans le réseau téléphonique  $f_e = 8\text{kHz}$

- ✓ Signaux réels sont rarement à support fréquentiel borné ( $f_{max} = \text{infinie}$ )  $\Rightarrow \forall f_e$  il y aura repliement du spectre.

$\Rightarrow$  Utiliser à l'entrée du système numérique un filtre passe-bas appelé filtre anti-repliement ou anti-aliasing (Filtre analogique : gain de 1 et  $f_c = f_e$ )

# III. Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

Le signal échantillonné :  $x_e(t) = \sum_n x(nT_e)\delta(t - nT_e)$

□ Sachant que  $TF\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi jft} dt$

$$\Rightarrow X_e(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t)e^{-2\pi jft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)e^{-2\pi jft} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)e^{-2\pi jfnT_e}$$

□ Or  $X_e(f) = f_e \sum_n X(f - nf_e)$   $\Rightarrow$  Signal Périodique de période  $f_e$   
 $\Rightarrow$  Décomposable en Série de Fourier

$$\Rightarrow X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-2\pi jnT_e f} \quad x(nT_e) = C_n = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} X_e(f) e^{2\pi jnT_e f} df$$

# III. Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

La TFTD :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-2\pi j f n T_e}$$

La TFTD<sup>-1</sup>

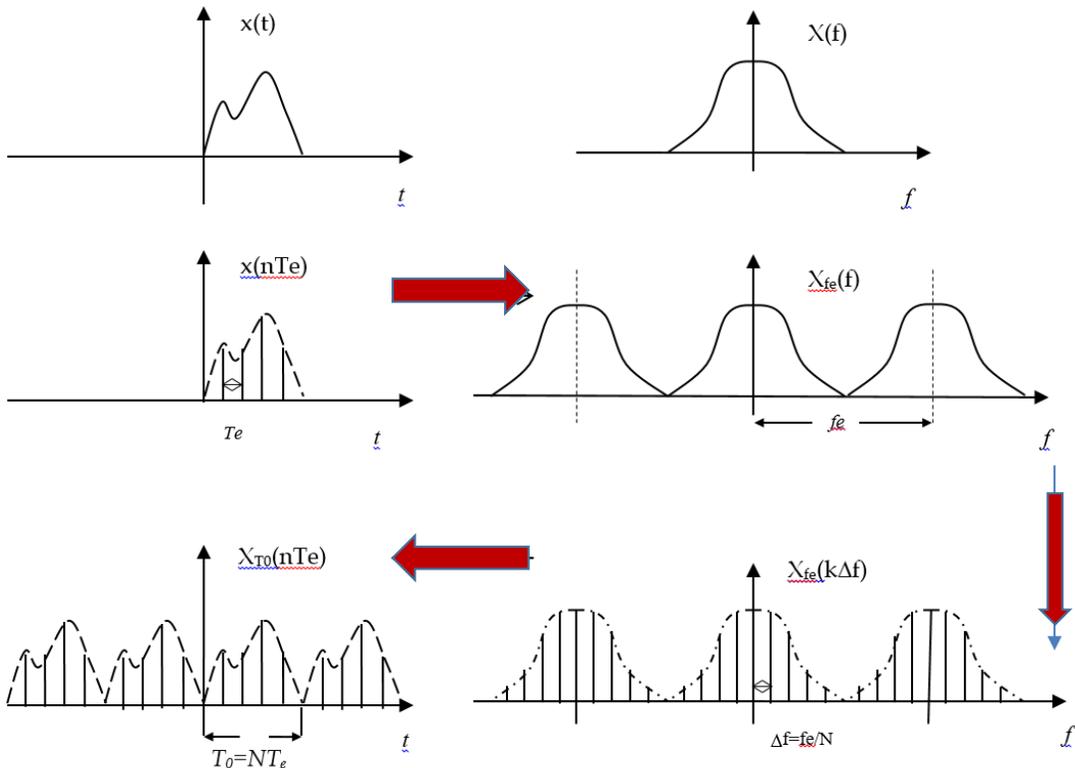
$$x(nT_e) = C_n = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} X(f) e^{2\pi j n T_e f} df$$

- Le calcul de la TF nécessite une infinité de points de mesures  $x(n)$
- Le calculateur ne peut calculer une TFTD car sa réponse fréquentielle est aussi forcément discrète = un nombre fini de points fréquentiel alors que  $f$  varie continûment.

**Solution :** Limiter la durée de  $x(n)$  i.e. considérer un nombre fini  $N$  de points temporels et de discrétiser la fréquence (considérer un nombre fini  $L$  de points fréquentiels) d'où la **TFD**.

# IV. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

- La numérisation du signal  $X(f)$  passe par l'échantillonnage de  $X(f)$ .
  - On divise l'intervalle  $f_e$  par  $N$ , ainsi  $X(f)$  est échantillonné à la cadence  $\Delta f = f_e / N = 1 / NT_e$ .
- ➔ périodicité du signal temporel de  $T_0 = 1 / \Delta f = NT_e$ .



$$f_e = N \cdot \Delta f \Rightarrow f \text{ devient } k\Delta f \Rightarrow$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-2\pi j f n T_e}$$

$$X(kf_e / N) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n T_e k f_e / N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n k / N} = X(k)$$

$$x(nT_e) = C_n = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} X(f) e^{2\pi j n T_e f} df$$

$$x(n) = \frac{1}{f_e} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k) e^{2\pi j n k / N} \cdot \Delta f = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k) e^{2\pi j n k / N}$$

# IV. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

- La numérisation du signal  $X(f)$  passe par l'échantillonnage de  $X(f)$ .
- On divise l'intervalle  $f_e$  par  $N$ , ainsi  $X(f)$  est échantillonné à la cadence  $\Delta f = f_e / N = 1 / NT_e$ .
- ➔ périodicité du signal temporel de  $T_0 = 1 / \Delta f = NT_e$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n k / N} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k) e^{2\pi j n k / N} \end{array} \right.$$

$$f_e = N \cdot \Delta f \Rightarrow f \text{ devient } k \Delta f \Rightarrow$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-2\pi j f n T_e}$$

$$X(kf_e / N) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n T_e k f_e / N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n k / N} = X(k)$$

$$x(nT_e) = C_n = \frac{1}{f_e} \int_{-f_e/2}^{f_e/2} X(f) e^{2\pi j n T_e f} df$$

$$x(n) = \frac{1}{f_e} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k) e^{2\pi j n k / N} \cdot \Delta f = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k) e^{2\pi j n k / N}$$

# IV. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

## Exemple

Soit le signal  $x(n) = 1$  pour  $n = 0$  et  $n = 3$  et 0 ailleurs

✓ TFTD 
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) e^{-2\pi j f n T_e} = 1 + e^{-6\pi j f T_e} = 2 \cos(3\pi f T_e) e^{-3\pi j f T_e}$$

✓ TFD

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-2\pi j n k / 4} = \begin{cases} X(1) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^0 = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 2 \\ X(1) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-\pi j n / 2} = x(0) + x(1) e^{-\pi j / 2} + x(2) e^{-\pi j} + x(3) e^{-3\pi j k / 2} = 2 \cos(3\pi / 4) e^{-3\pi j / 4} \\ X(2) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-\pi j n} = 2 \cos(3\pi / 2) e^{-3\pi j / 2} \\ X(3) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-3\pi j n / 2} = 2 \cos(9\pi / 4) e^{-9\pi j / 4} \end{cases}$$

# IV. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

## Exemple

Soit le signal  $x(n) = 1$  pour  $n = 0$  et  $n = 3$  et 0 ailleurs

✓ TFTD  $X(f) = 2 \cos(3\pi f T_e) e^{-3\pi j f T_e}$

✓ TFD

$$X(k) = \begin{cases} X(0) = 2 \\ X(1) = 2 \cos(3\pi / 4) e^{-3\pi j / 4} \\ X(2) = 2 \cos(3\pi / 2) e^{-3\pi j / 2} \\ X(3) = 2 \cos(9\pi / 4) e^{-9\pi j / 4} \end{cases}$$

✓ Modules des 4 échantillons de  $X(k)$ :  $2, \sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$

✓ Phase des 4 échantillons de  $X(k)$ :

# IV. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

## Exemple

Soit le signal  $x(n) = 1$  pour  $n = 0$  et  $n = 3$  et 0 ailleurs

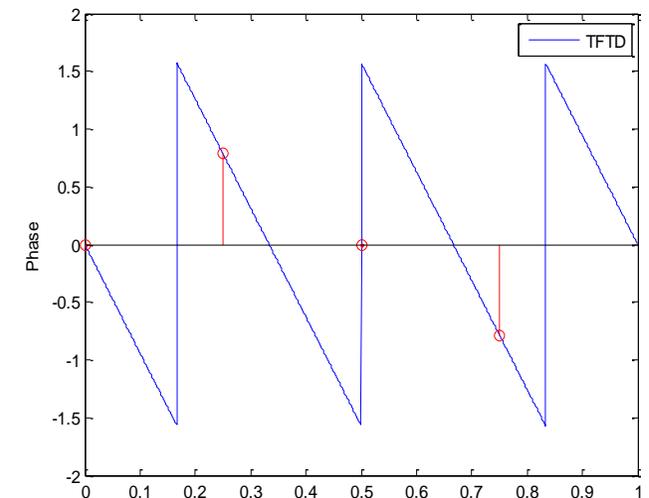
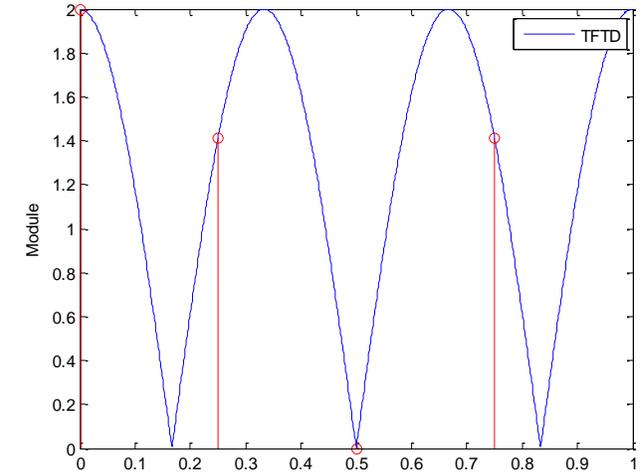
✓ TFTD  $X(f) = 2 \cos(3\pi f T_e) e^{-3\pi j f T_e}$

✓ TFD

$$X(k) = \begin{cases} X(0) = 2 \\ X(1) = 2 \cos(3\pi / 4) e^{-3\pi j / 4} \\ X(2) = 2 \cos(3\pi / 2) e^{-3\pi j / 2} \\ X(3) = 2 \cos(9\pi / 4) e^{-9\pi j / 4} \end{cases}$$

✓ Modules des 4 échantillons de  $X(k)$ :  $2, \sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$

✓ Phase des 4 échantillons de  $X(k)$ :



TFD n'est que l'échantillonnage de la TFTD limitée à N.

# IV. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

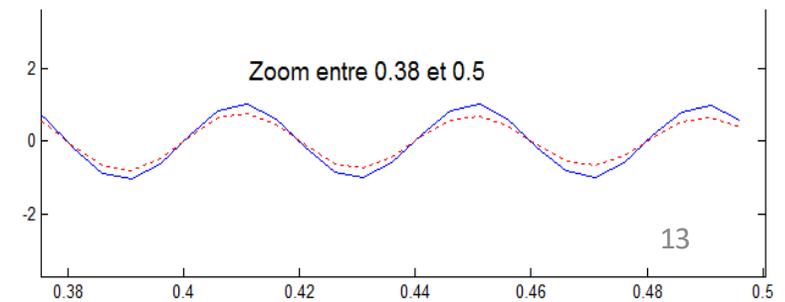
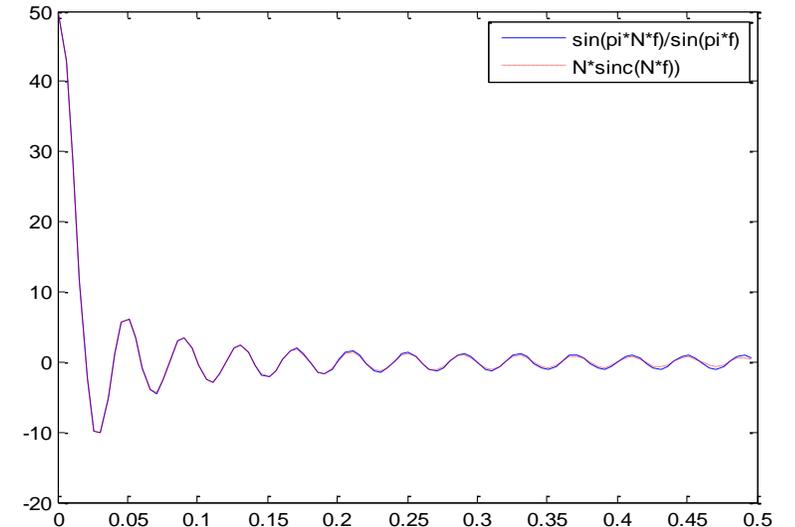
## Augmenter Précision (Zéro Padding)

$x(n)$  et  $X(k)$  sont calculés sur le même nombre de points  $N$ . On peut augmenter la précision, par la technique du zéro-padding : on calcule la TFD sur un nombre  $NF$  pouvant être bien plus grand que le nombre de points  $N$  disponible du signal ( $NF \gg N$ ).

$$x(n) = \text{Rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

✓ **TFTD**  $X(f) = \frac{\sin(\pi N f T_e)}{\sin(\pi f T_e)} e^{-\pi j(N-1)fT_e} \approx N \text{sinc}(NfT_e) e^{-\pi j(N-1)fT_e}$

✓ **TFD**  $X(k) = \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k / N)} e^{-\pi jk(N-1)/N} \approx N \text{sinc}(k) e^{-\pi jk(N-1)/N}$



# IV. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

## Augmenter Précision (Zéro Padding)

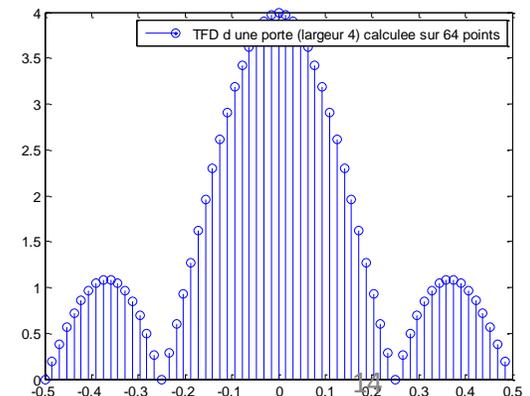
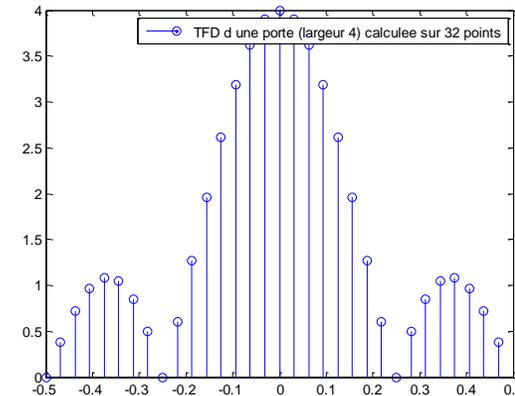
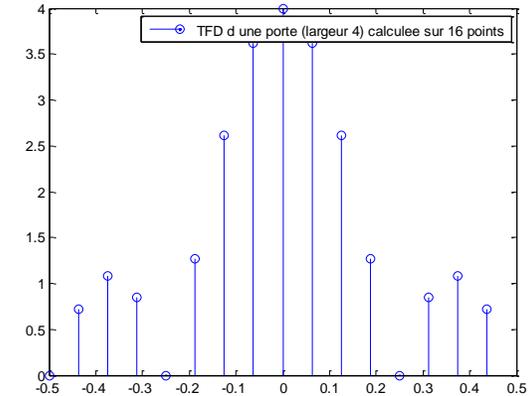
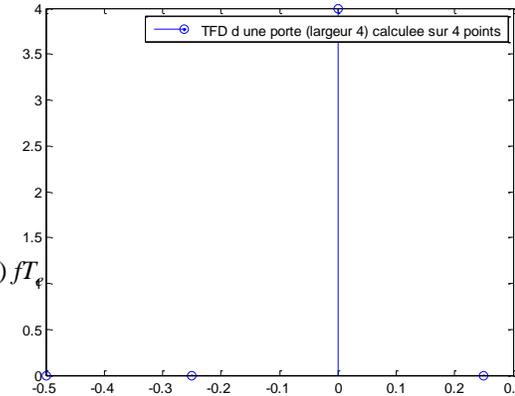
$x(n)$  et  $X(k)$  sont calculés sur le même nombre de points  $N$ . On peut augmenter la précision, par la technique du zéro-padding : on calcule la TFD sur un nombre  $NF$  pouvant être bien plus grand que le nombre de points  $N$  disponible du signal ( $NF \gg N$ ).

$$x(n) = \text{Rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

✓ **TFTD**  $X(f) = \frac{\sin(\pi N f T_e)}{\sin(\pi f T_e)} e^{-\pi j(N-1)fT_e} \approx N \text{sinc}(NfT_e) e^{-\pi j(N-1)fT_e}$

✓ **TFD**  $X(k) = \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k / N)} e^{-\pi jk(N-1)/N} \approx N \text{sinc}(k) e^{-\pi jk(N-1)/N}$

$$X(k) = 4 \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k / 4)} e^{-3\pi jk/4}$$

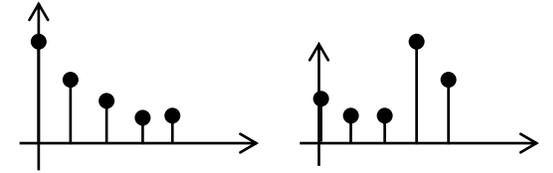


# IV. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

## Propriétés

- ✓  $x(n)$  est périodique de période  $N$  et  $X(k)$  est aussi périodique de période  $N$

$$x(n + N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi(n+N)k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi nk}{N}} e^{j \frac{2\pi Nk}{N}} = s_n$$



- ✓ Linéarité  $ax_1(n) + bx_2(n) \xrightarrow{TFD} aX_1(k) + bX_2(k)$

- ✓ Décalage temporel  $x(n - m) \xrightarrow{TFD} X(k) e^{-j \frac{2\pi k m}{N}}$

- ✓ Décalage fréquentiel  $x(n) e^{j \frac{2\pi k_0 n}{N}} \xrightarrow{TFD} X(k - k_0)$

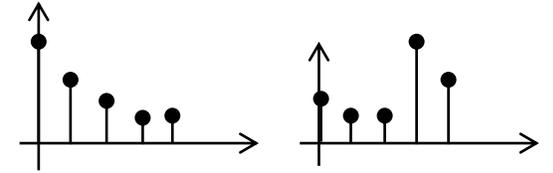
- ✓ Dualité temps-fréquence  $x(n) \xrightarrow{TFD} X(k) \Rightarrow X(n) \xrightarrow{TF} N \cdot x(-k)$

# IV. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

## Propriétés

- ✓  $x(n)$  est périodique de période  $N$  et  $X(k)$  est aussi périodique de période  $N$

$$x(n + N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi(n+N)k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi nk}{N}} e^{j \frac{2\pi Nk}{N}} = x(n)$$



- ✓ Changement d'échelle  $x(an) \xrightarrow{TFD} \frac{1}{|a|} X(k/a)$

- ✓ Convolution périodique  $x(n) * h(n) \xrightarrow{TFD} X(k) \cdot H(k)$

- ✓ Conservation de l'Énergie  $\sum_0^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} |X(k)|^2$

$$\delta(n) \xrightarrow{TFD} 1$$

$$\delta(n - m) \xrightarrow{TFD} e^{-2\pi jmk / N}$$

# V. Transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT)

Le calcul direct de la TFD sur N points nécessite  $N^2$  opérations complexes. L'algorithme proposé réduit à  $N \log_2(N)$  le nombre d'opérations (Si  $N=1024$ ,  $N_{op}/100$ ).

Exemple : TFD pour 8 points

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^7 s_n e^{-j \frac{2\pi nk}{8}}$$

✓ On pose  $W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$  alors  $S_k = \sum_{n=0}^7 s_n W_8^{nk}$

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix}$$

✓ Propriétés  $W_N^{nN} = 1$ ,  $W_N^{N/2} = -1$ ,  $W_N^{n+N} = W_N^n$

# V. Transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT)

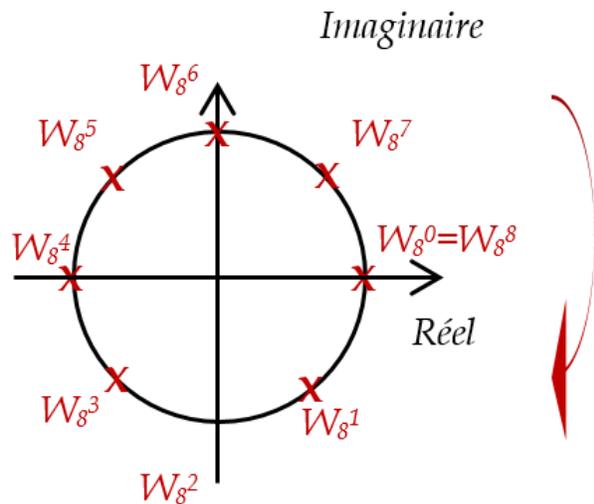
Le calcul direct de la TFD sur N points nécessite  $N^2$  opérations complexes. L'algorithme proposé réduit à  $N \log_2(N)$  le nombre d'opérations.

Exemple : TFD pour 8 points

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^7 s_n e^{-j \frac{2\pi nk}{8}}$$

✓ On pose  $W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$  alors

$$S_k = \sum_{n=0}^7 s_n W_8^{nk}$$



$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{bmatrix}$$

✓ Propriétés  $W_N^{nN} = 1, W_N^{N/2} = -1, W_N^{n+N} = W_N^n$

# V. Transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT)

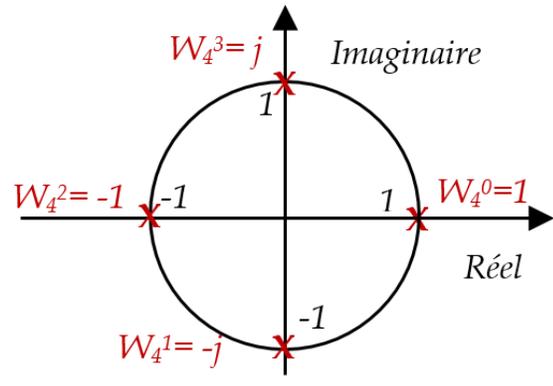
Exemple : TFD pour 4 points

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^3 s_n e^{-j \frac{2\pi nk}{4}}$$

✓ On pose  $W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$

alors

$$S_k = \sum_{n=0}^3 s_n W_4^{nk}$$



$$\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

✓ Pour la TFD<sup>-1</sup>  $W_N = \exp\left(j \frac{2\pi}{N}\right)$

Inverser le sens de rotation !!



# V. Transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT)

L'algorithme suppose que N est pair : posons  $N=2^P$ .

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j \frac{2\pi nk}{N}}$$

Introduisons les 2 sous-suites de  $s_n$  en fonction de la parité de n

$$u_n = \{s_{2n}\}_{n=0, \dots, P-1}$$

$$v_n = \{s_{2n+1}\}_{n=0, \dots, P-1}$$

✓ On obtient 
$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n W_N^{nk} = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_{2^P}^{2ik} + \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_{2^P}^{(2i+1)k}$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_P^{ik} + W_N^k \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_P^{ik}$$

$$S_k = U_k + W_N^k V_k$$

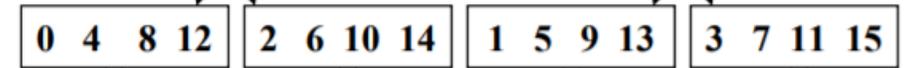
1 signal de 16 points



2 signaux de 8 points



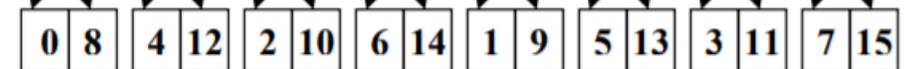
4 signaux de 4 points



8 signaux de 2 points



16 signaux de 1 point



<http://nicolas.thiery.name/DESS/Notes/Cours4.pdf>

✓ On réitère ce raisonnement pour les 2 sous-suites.

✓ Ainsi de suite jusqu'à arriver à ne calculer que des TFD de 1 points.

# V. Transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT)

L'algorithme suppose que N est pair : posons  $N=2 P$ .

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{P-1} s_{2n} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} + \sum_{n=0}^{P-1} s_{2n+1} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

Introduisons les 2 sous-suites de  $s_n$  en fonction de la parité de n

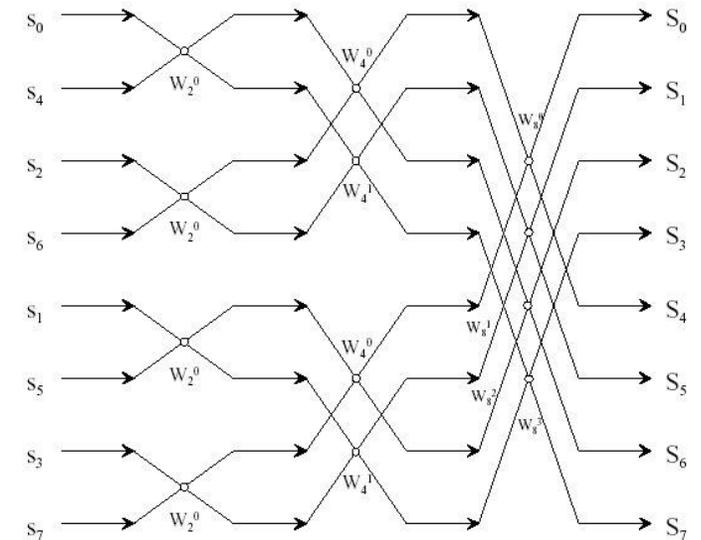
$$u_n = \{s_{2n}\}_{n=0,\dots,P-1}$$

$$v_n = \{s_{2n+1}\}_{n=0,\dots,P-1}$$

✓ On obtient 
$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n W_N^{nk} = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_{2P}^{2ik} + \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_{2P}^{(2i+1)k}$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{P-1} u_i W_P^{ik} + W_N^k \sum_{i=0}^{P-1} v_i W_P^{ik}$$

$$S_k = U_k + W_N^k V_k$$



<http://pageperso.univ-lr.fr/pierre.courtellemont/TD4.pdf>

✓ On réitère ce raisonnement pour les 2 sous-suites.

✓ Ainsi de suite jusqu'à arriver à ne calculer que des TFD de 1 points.

# VI. TFD des Signaux Illimités

Le nombre d'éléments d'une séquence transformée par la TFD est implicitement limité :  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2\pi j n k / N}$

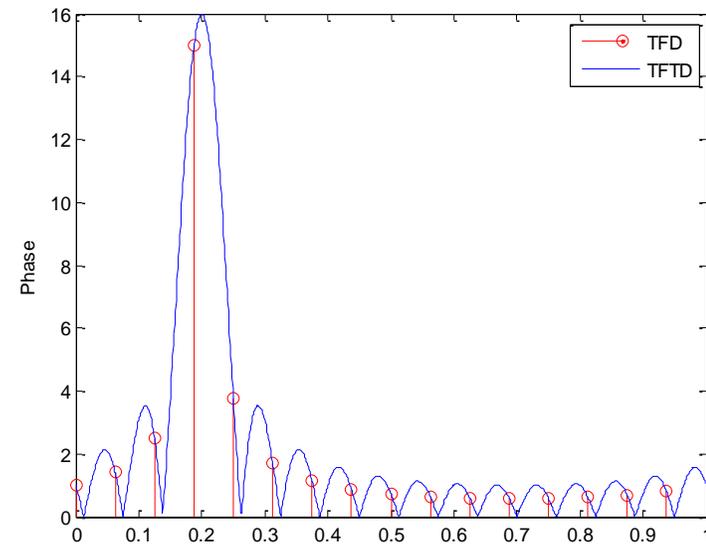
➤ La fenêtre intrinsèque à la TFD est donc la fenêtre rectangulaire de durée  $T_0 = NT_e$ .

$$\left| TFTD \left\{ x(n) \cdot \underset{T_0 = NT_e}{\text{Rect}(n)} \right\} \right| \approx |X(f) * N \text{sinc}(fT_0)|$$

➤ Troncation du signal échantillonné par une fenêtre de largeur  $T_0 \Rightarrow$  Convoluer le spectre avec un sinus cardinal qui s'annule tous les  $1/T_0$  avec  $T_0 = NT_e$  soit tous les  $f_e/N$ .

## Exemple

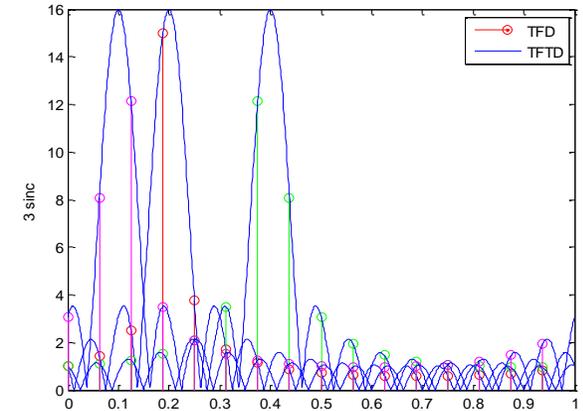
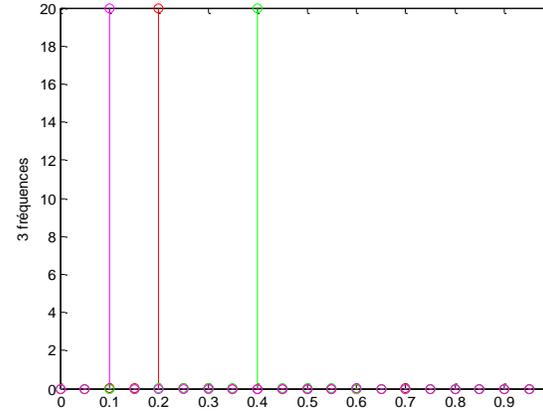
- ✓ Rouge : TFTD de  $\{x(n) = e^{2\pi j f_0 n}\}$ , pour  $n = \{0, \dots, N - 1\}$  avec  $N = 16$  et  $f_0 = 0,2$
- ✓ En bleu  $X(f)$ , le module de la TFTD de  $x(n)$ .



L'allure de  $X(f)$  : Un lobe principal de largeur  $2/N$  (ou  $2f_e/N$ ) autour de la fréquence  $f_0$  et des lobes secondaires de largeur  $1/N$  (ou  $f_e/N$ ).

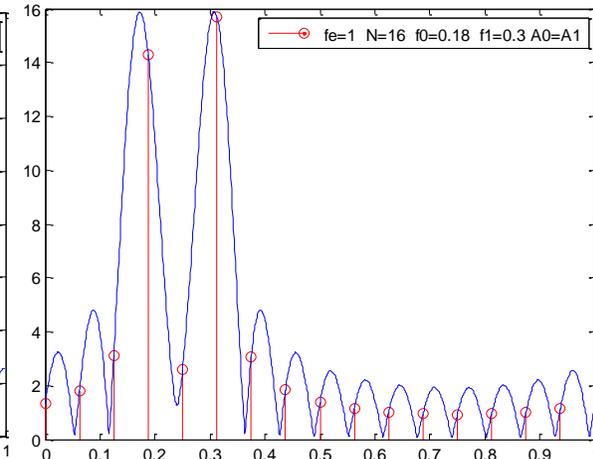
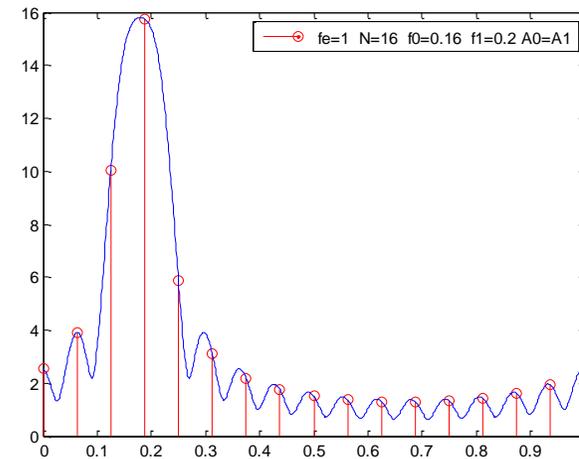
# VI. TFD des Signaux Illimités

✓ Dans le cas général, le spectre, obtenu par TFD est donc un ensemble de fonctions  $\text{sinc}(T_0 f)$  centrées sur les fréquences qui composent le signal théorique initial.



**Exemple 1 :**  $x(n) = A_0 e^{2\pi j f_0 n} + A_0 e^{2\pi j f_1 n}$  pour  $n (0:N-1)$  où  $f_0$  et  $f_1 \in [-f_e/2, f_e/2]$

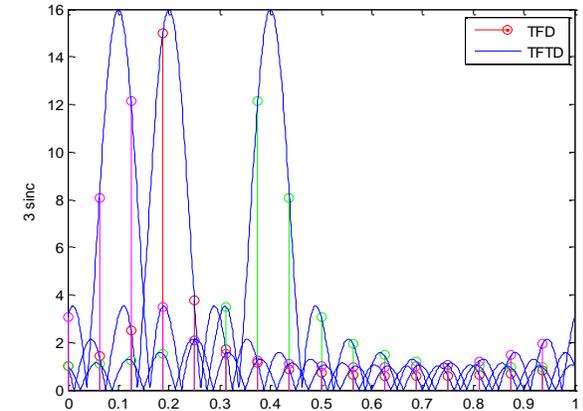
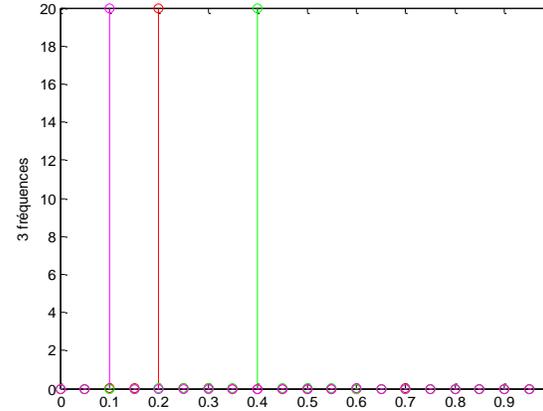
Si l'écart en valeur absolue entre  $f_0$  et  $f_1$  est  $>$  à  $f_e/N$ , il sera possible de distinguer les deux fréquences sur le tracé.



Cette résolution en fréquence est liée au nombre de points  $N$  du signal

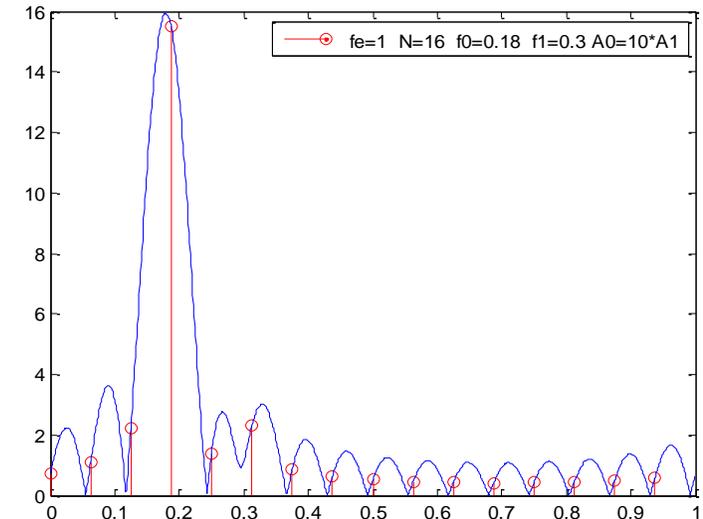
# VI. TFD des Signaux Illimités

✓ Dans le cas général, le spectre, obtenu par TFD est donc un ensemble de fonctions  $\text{sinc}(T_0 f)$  centrées sur les fréquences qui composent le signal théorique initial.



**Exemple 2 :**  $x(n) = A_0 e^{2\pi j f_0 n} + A_0 e^{2\pi j f_1 n}$  pour  $n (0:N-1)$  où  $f_0$  et  $f_1 \in [-f_e/2, f_e/2]$

$A_0 > A_1$  Un masquage du lobe principal de la composante en  $f_1$  peut survenir en raison des ondulations présentes (Le premier lobe secondaire) dans le spectre de  $A_0 \exp(2j\pi f_0 n)$



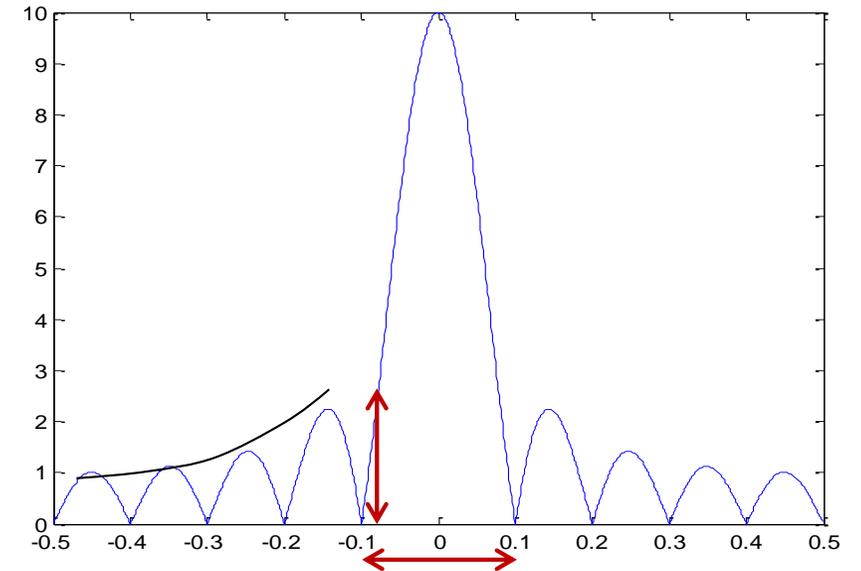
L'importance des lobes secondaires peut être réduite par l'emploi d'autres fenêtres 24

# VII. Fenêtres de Pondération

Pour ne pas altérer le spectre original, il faudrait que  $W(f)$  (spectre de la fenêtre) se rapproche le plus possible d'une distribution de Dirac.

Deux éléments importants pour se rapprocher de la distribution de Dirac : La  **finesse du lobe principale**  et la  **hauteur des lobes secondaires**  :

- ✓ Plus la largeur du pic principal est fine, plus la résolution est grande, c'est-à-dire que l'on peut séparer des raies proches.
- ✓ Plus les lobes secondaires sont élevés plus on dégrade la forme du spectre et la détection d'un signal d'amplitude faible en présence d'un signal d'amplitude élevée sera difficile.



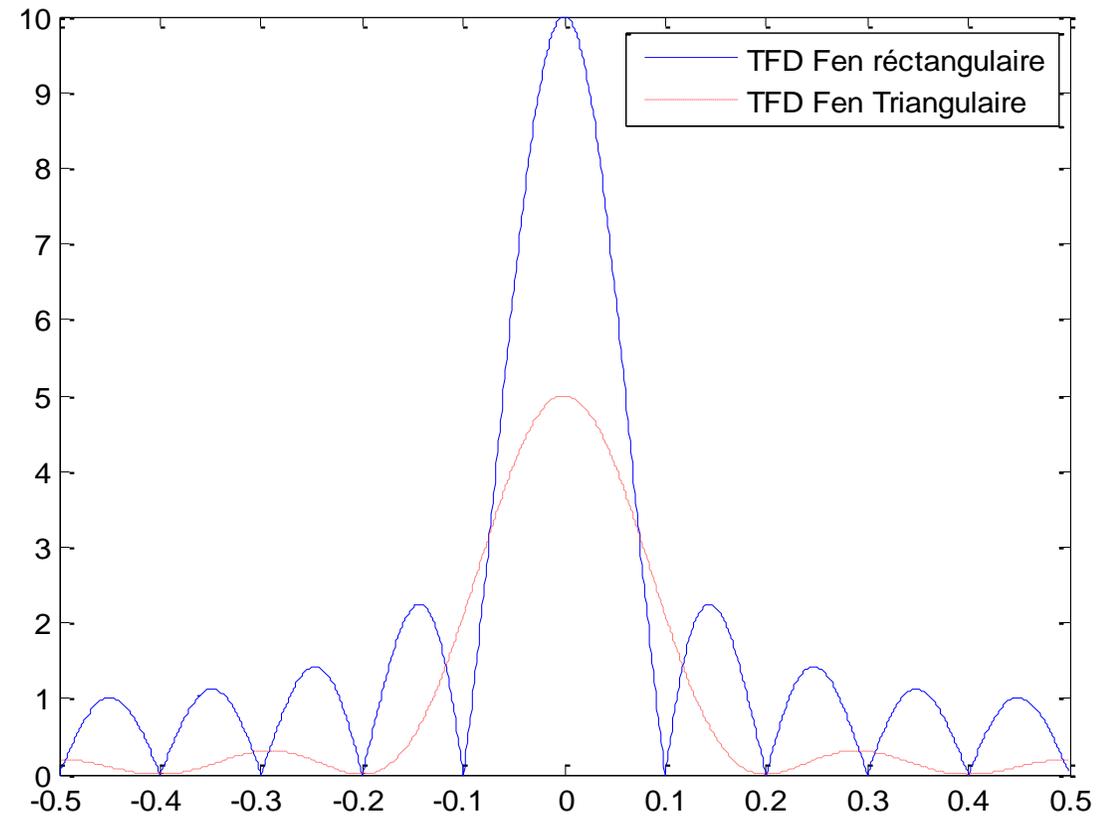
# VII. Fenêtres de Pondération

## Fenêtre Rectangulaire

La finesse du lobe principale ( $2 f_e/N$ ) peut être réglée par le nombre d'échantillons  $N$ . Ainsi, plus on observe le signal longtemps, plus la résolution du spectre augmente  
 Par contre,  $\lambda_R$  varie très peu en fonction de  $N$  (-13dB) donc toujours une distorsion de spectre.

## Fenêtre Triangulaire

On peut exprimer cette fenêtre sous la forme d'une convolution de deux rectangles de largeur  $N.T_e/2$ .  
 On observe une atténuation des lobes secondaires (-24dB) par rapport à la fenêtre rectangulaire au prix de l'élargissement du pic central ( $4f_e/N$ ).



# VII. Fenêtres de Pondération

## Fenêtre Rectangulaire & Fenêtre Triangulaire

### Rappels

$$\text{Rect}_N(n) * \text{Rect}_N(n) = N \cdot \Lambda_N(n)$$

$$\Rightarrow \text{Rect}_{N/2}(n) * \text{Rect}_{N/2}(n) = N/2 \cdot \Lambda_{N/2}(n)$$

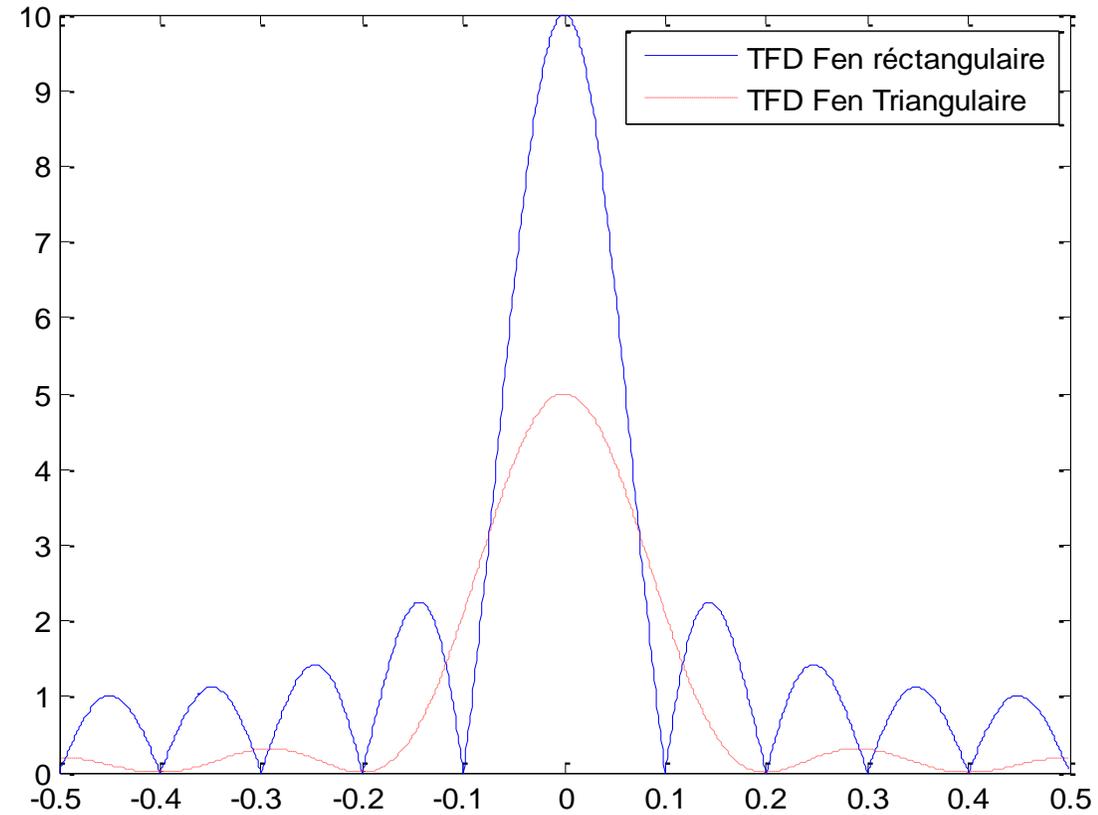
$$\Rightarrow 2/N \text{Rect}_{N/2}(n) * \text{Rect}_{N/2}(n) = \Lambda_{N/2}(n)$$

Par ailleurs

$$X(f) = \text{TFTD}\{\text{Rect}_N(n)\} \approx N \text{sinc}(NfT_e) e^{-\pi j(N-1)fT_e}$$

$$\Rightarrow \text{TFTD}\{\text{Rect}_{N/2}(n)\} \approx \frac{N}{2} \text{sinc}\left(\frac{N}{2}fT_e\right) e^{-\pi j\left(\frac{N}{2}-1\right)fT_e}$$

$$\text{TFTD}\left\{\frac{2}{N} \text{Rect}_{N/2}(n) * \text{Rect}_{N/2}(n)\right\} \approx \frac{2}{N} \cdot \frac{N}{2} \text{sinc}\left(\frac{N}{2}fT_e\right) e^{-\pi j\left(\frac{N}{2}-1\right)fT_e} \cdot \frac{N}{2} \text{sinc}\left(\frac{N}{2}fT_e\right) e^{-\pi j\left(\frac{N}{2}-1\right)fT_e}$$



# VII. Fenêtres de Pondération

## Autres fenêtres

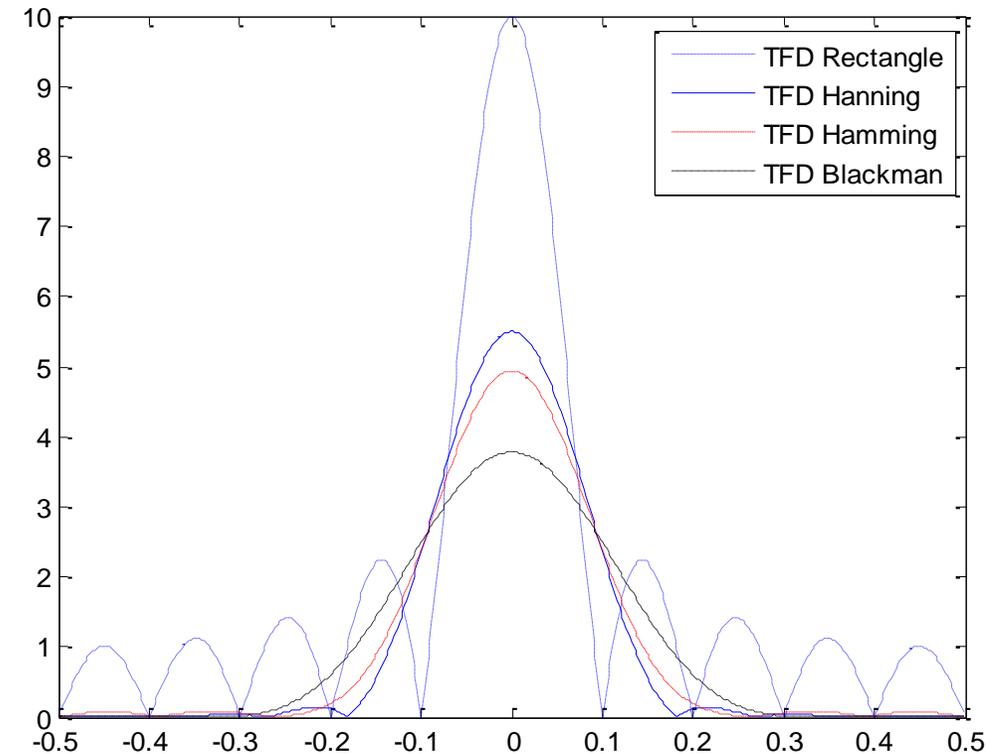
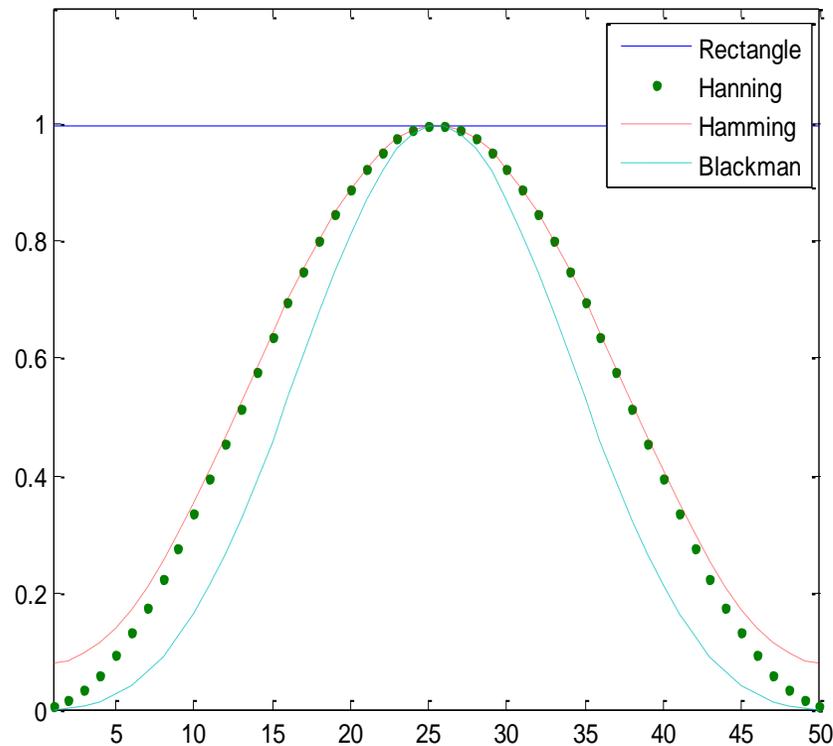
+

<u>Fenêtres</u>		Largeur de Transition : $L\Delta f$	Lobe Principale/Secondaire
<u>Rectangle</u>	$w_{Rect}(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour }  n  \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$2 f_e / N$	-13 db
<u>Triangulaire</u>	$w_{Trian}(n) = \begin{cases} 1 - 2 n /(N-1) & \text{pour }  n  \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4 f_e / N$	- 25 db
<u>Hanning</u>	$w_{Han}(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour }  n  \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4 f_e / N$	- 31 db
<u>Hamming</u>	$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & \text{pour }  n  \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4 f_e / N$	- 41 db
<u>Blackman</u>	$w_{Black}(n) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & \text{pour }  n  \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$6 f_e / N$	- 57 db

# VII. Fenêtres de Pondération

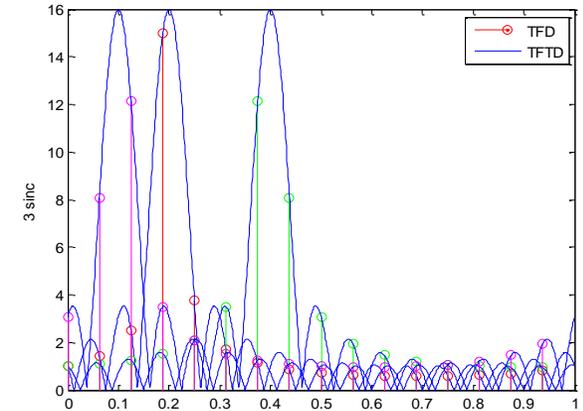
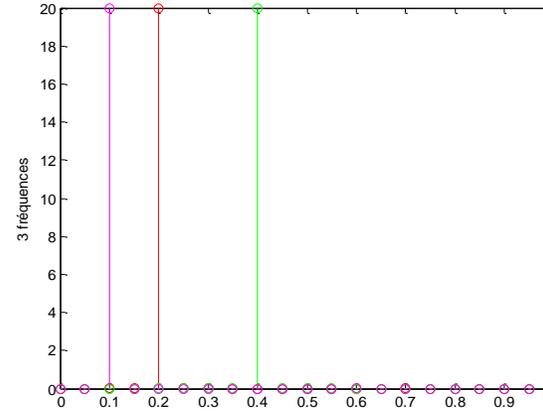
## Autres fenêtres

Dans un problème d'analyse spectrale, on utilise généralement plusieurs fenêtres l'une après l'autre afin d'obtenir un bon compromis résolution/déformation.



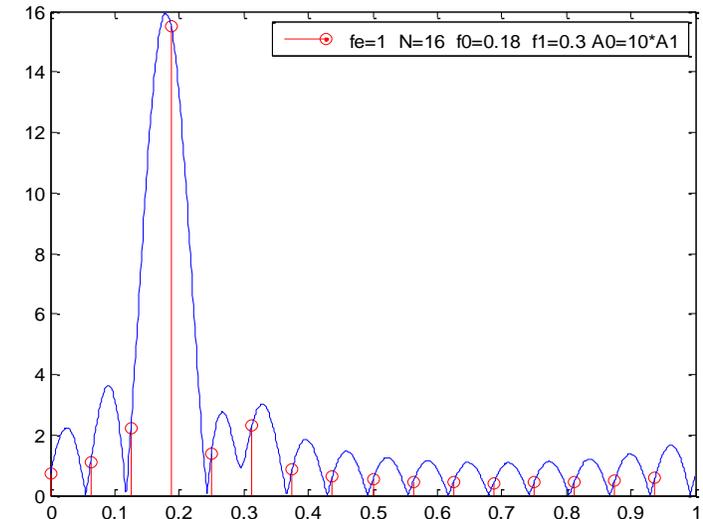
# VI. TFD des Signaux Illimités

✓ Dans le cas général, le spectre, obtenu par TFD est donc un ensemble de fonctions  $\text{sinc}(T_0 f)$  centrées sur les fréquences qui composent le signal théorique initial.



**Exemple 2** :  $x(n) = A_0 e^{2\pi j f_0 n} + A_0 e^{2\pi j f_1 n}$  pour  $n (0:N-1)$  où  $f_0$  et  $f_1 \in [-f_e/2, f_e/2]$

$A_0 > A_1$  Un masquage du lobe principal de la composante en  $f_1$  peut survenir en raison des ondulations présentes (Le premier lobe secondaire) dans le spectre de  $A_0 \exp(2j\pi f_0 n)$



Prendre  $N = 10$  et observer

## II. Analyse des Filtrés Numériques par la TZ (Transformée en Z)