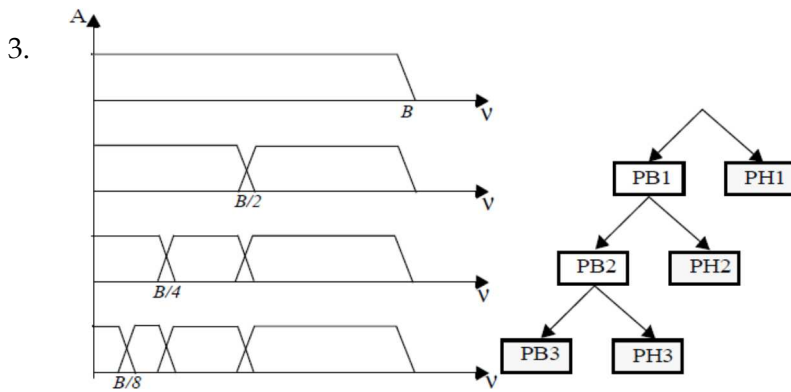
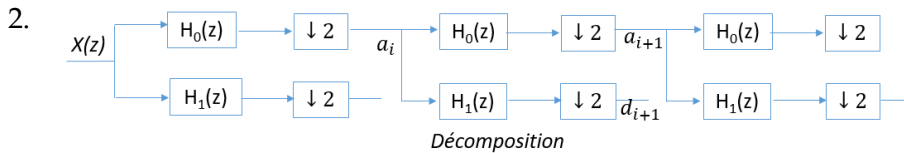


Exercice 1 : Soit le signal suivant : $x(n) = \{11, 9, 5, 7, 5, 11, 7, 9\}$

1. Citer un inconvénient de l'ondelette continue.
2. Donner le schéma de décomposition en ondelettes discrètes pour 2 niveaux.
3. Donner le schéma correspondant pour la répartition en fréquences.
4. Donner sa décomposition en ondelettes au niveau 2 en employant les filtres suivants :
 $h_0 = \{0.5, 0.5\}$, $h_1 = \{-0.5, 0.5\}$, $f_0 = 2 * \{0.5, 0.5\}$, $f_1 = 2 * \{0.5, -0.5\}$
5. L'énergie se conserve-t-elle ?
6. Reconstruire le signal à partir du niveau 2.

Solution

1. Redondante, longue à calculer



4. Décomposition

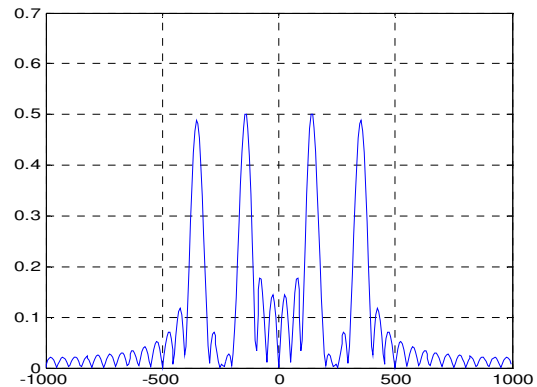
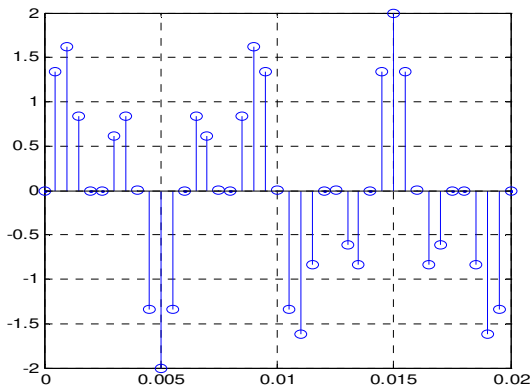
	Approximation $h_0[-k] = \{0.5, 0.5\}$	Détail $h_1[-k] = \{0.5, -0.5\}$
Niveau 0	11, 9, 5, 7, 5, 11, 7, 9	
Niveau 1	10, 6, 8, 8	1, -1, -3, -1
Niveau 2	8, 8	2, 0
Sig. décomp	8, 8, 2, 0, 1, -1, -3, -1	

5. Non $E_x = 11^2 + 9^2 + 5^2 + 7^2 + 5^2 + 11^2 + 7^2 + 9^2 \neq E_{sig.decomp} = 8^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2$

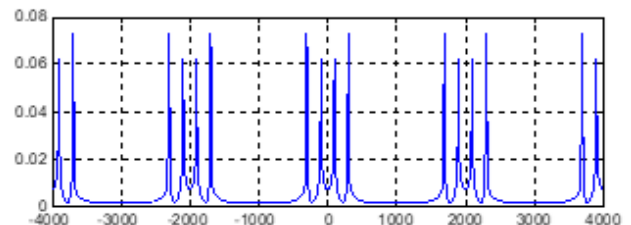
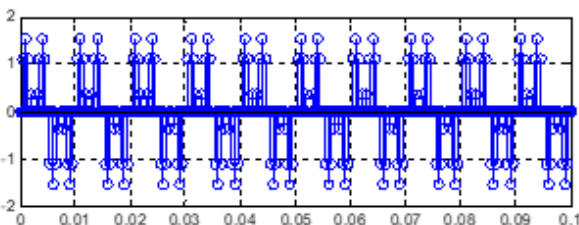
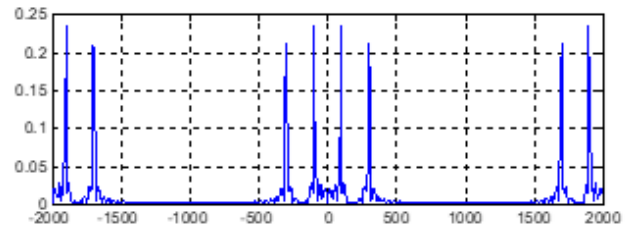
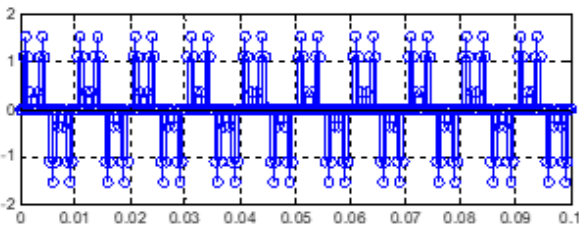
6. Reconstruction

	Approximation $f_0[-k] = \{1, 1\}$	Détail $f_1[-k] = \{-1, 1\}$
Niveau 2	8, 8 0, 8, 0, 8, 0 [8, 8, 8, 8]	2, 0 0, 2, 0, 0, 0 [2, -2, 0, 0]
Niveau 1	10, 6, 8, 8 0, 10, 0, 6, 0, 8, 0, 8, 0 [10, 10, 6, 6, 8, 8, 8, 8]	1, -1, -3, -1 0, 1, 0, -1, 0, -3, 0, -1, 0 [1, -1, -1, 1, -3, 3, -1, 1]
Signal reconstruit	11, 9, 5, 7, 5, 11, 7, 9	

Exercice 2 : Soit le signal suivant : $h(n) = \sin(2\pi \cdot 150 \cdot n) + \sin(2\pi \cdot 350 \cdot n)$ et le module de la TFD dont les tracés respectifs sont donnés ci-après :



1. Déterminer $T_e = 1/f_e = 1/2000 = 0,0005$ s
2. Quel est l'intérêt de l'interpolation ? **Augmenter le nombre d'échantillons pour gagner en précision**
3. Tracer le signal (les 20 premières valeurs) et la TF obtenue pour une interpolation de 2 puis de 4 (sans filtrage passe-bas)



4. Pourquoi emploie-t-on un filtre passe-bas lors l'interpolation, où le place-t-on ? **Enlever les fréquences supplémentaires (spectres miroirs). Après l'interpolation ($f_c = 1000$ Hz)**
5. Quel est le type du filtre de Tchebeychev employé dans ce cas et pourquoi ? **Type 1 (pas d'ondulations dans la bande atténuée)**
6. Donner la décomposition polyphases finale pour une interpolation de 2 en donnant l'expression des filtres polyphases

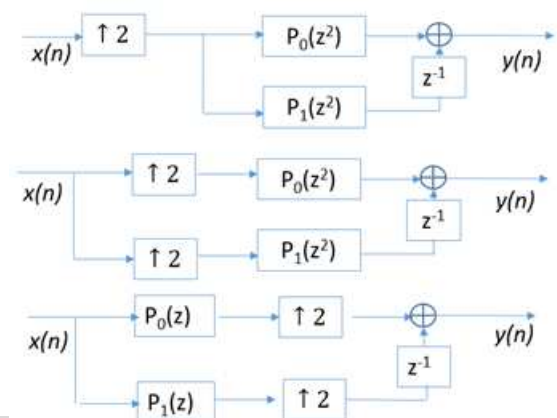
$$M=2 \Rightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

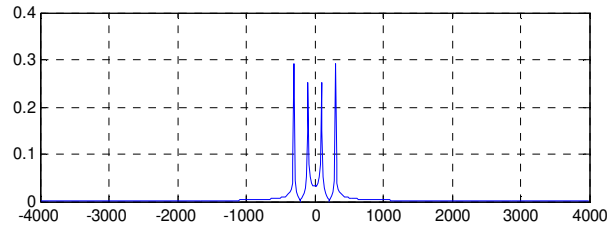
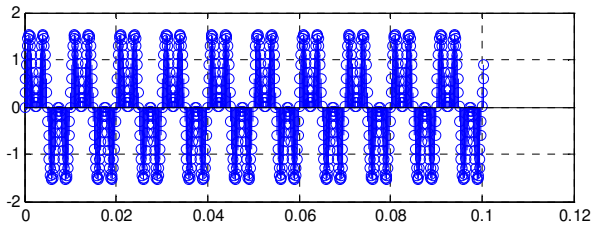
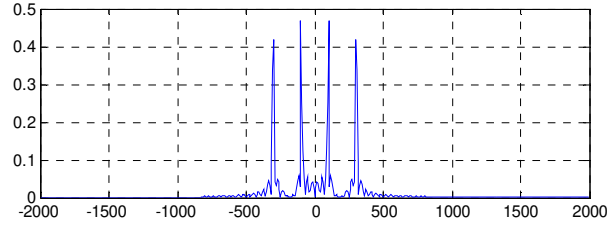
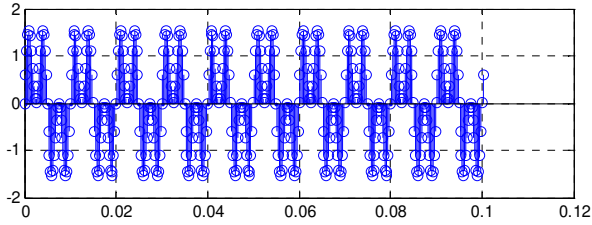
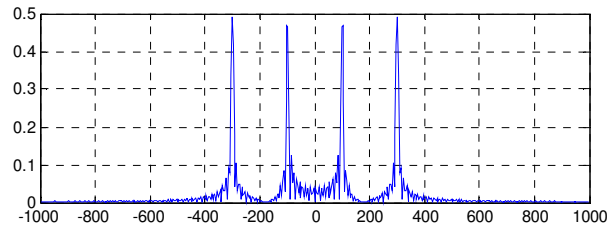
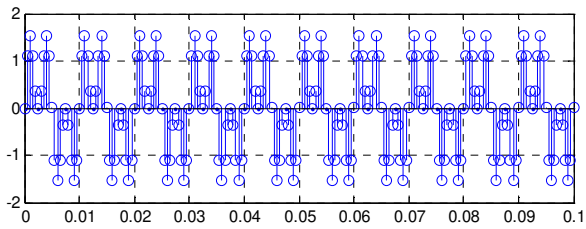
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n)z^{-2n} + z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1)z^{-2n}$$

On pose $P_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n)z^{-n}$

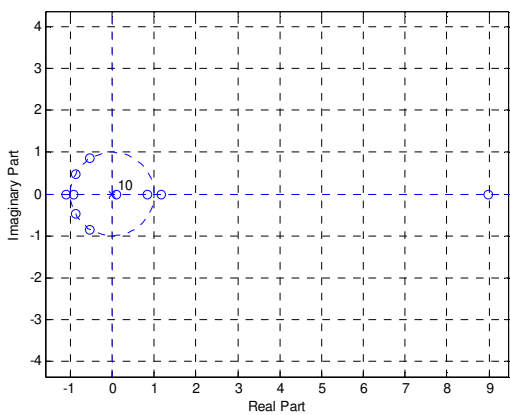
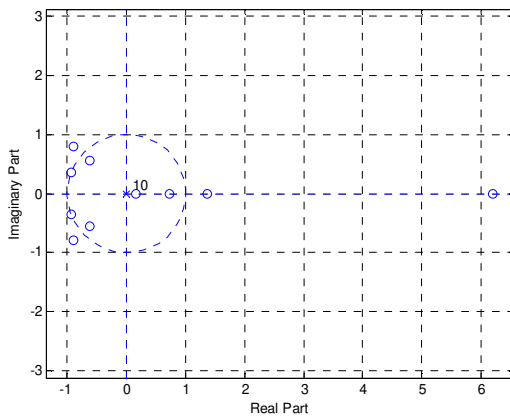
$$P_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1)z^{-n}$$

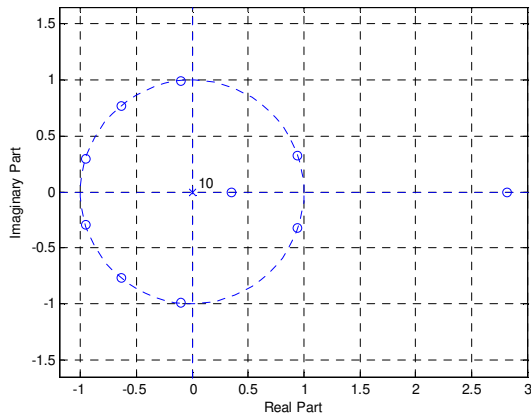
$$\Rightarrow H(z) = P_0(z^2) + z^{-1}P_1(z^2)$$



Remarque

Exercice 3 : Les tracés des pôles et zéros, correspondant à un filtre numérique passe-bande synthétisé par la méthode des fenêtres obtenus pour différentes fenêtres (Rectangulaire, Hanning et Hamming), sont donnés comme suit :





1. C'est un filtre RII ou RIF (Justifier)
2. Déterminer l'ordre du filtre. _____
3. Identifier pour chaque tracé des pôles et zéros, la fenêtre employée.
4. On suppose que $f_e=1000$, tracer le module de la réponse en fréquence pour chaque fenêtre.
5. Donner la structure de réalisation de ce filtre.

Exercice 4 : On veut déterminer le filtre numérique $h(n)$ équivalent par la méthode de l'invariance impulsionnelle en employant le filtre d'ordre 2 ci-dessous. La fréquence de coupure est $f_c=500$ Hz et la fréquence d'échantillonnage $f_e=2$ kHz.

$$H_N(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

1. Citer deux caractéristiques des filtres de Tchebychev.
2. Déterminer la fonction de transfert dénormalisée.
3. Déterminer $H(z)$.
4. Donner le tracé des pôles et zéros de $H(z)$.
5. Sans faire de calcul, esquisser le module de la réponse en fréquence $|H(f)|$
6. Sans faire de calcul, esquisser la réponse impulsionnelle $h(n)$

Quelques Rappels

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n k / N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X(k) e^{2\pi j n k / N}$$

Fenêtres	Largeur Lobe Principale : Δf	Lobe prin -Lobe sec (db)	Largeur Bande Trans : $2\Delta f / f_c$	Atténuation en bande atténuée : A_a (db)
$w_{Rect}(n) = \Pi(n) = 1$ pour $ n \leq \frac{N-1}{2}$	$2f_c/N$	-13	$1.8/N$	21
$w_{Ham}(n) = \left(0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right) \Pi(n)$	$4f_c/N$	-41	$6.6/N$	53
$w_{Han}(n) = \left(0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right) \Pi(n)$	$4f_c/N$	-31	$6.2/N$	44
$w_{Black}(n) = \left(0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)\right) \Pi(n)$	$6f_c/N$	-57	$11/N$	74

$$r_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x(n)|^{1/n} \quad r_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |x(-n)|^{-1/n}$$

$x(n)$	$X(z)$	RDC	$x(n)$	$X(z)$	RDC
$\delta(n)$	1	$\forall z$	$U(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n U(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $	$-a^n U(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$na^n U(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $			
$\cos(\omega_0 n) U(n)$	$\frac{1-z^{-1} \cos(\omega_0)}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$	$\sin(\omega_0 n) U(n)$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n \cos(\omega_0 n) U(n)$	$\frac{1-az^{-1} \cos(\omega_0)}{1-2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $	$a^n \sin(\omega_0 n) U(n)$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1-2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

$$x(n) = \sum_{p_i \text{ poles de } z^{n-1} X(z)} \text{Re } s \left[z^{n-1} X(z) \right]_{z=p_i} \quad \text{Re } s \left[z^{n-1} X(z) \right]_{z=p_i} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-p_i)^m z^{n-1} X(z) \right]_{z=p_i}$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \left(H(0) + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H(k) \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right) \quad \text{pour } -(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2$$

Passe-bas	$p = p / \omega_A$	Passe-bande	$p = \frac{1}{B} \left(\frac{p}{\omega_A} + \frac{\omega_A}{p} \right)$	Avec : Pulsation centrale $\omega_A = \sqrt{\omega_{A1} \omega_{A2}}$ Largeur de Bande $B = (\omega_{A2} - \omega_{A1})$
Passe-haut	$p = \omega_A / p$	Coupe-bande	$p = \left[\frac{1}{B} \left(\frac{p}{\omega_A} + \frac{\omega_A}{p} \right) \right]^{-1}$	

$H(p)$	$T_e H(z)$
$\frac{1}{p+a}$	$T_e \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$T_e \frac{1 - e^{-aT_e} \cos(\omega_0 T_e)}{1 - 2e^{-aT_e} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2aT_e}}$
$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$T_e \frac{e^{-aT_e} \sin(\omega_0 T_e)}{1 - 2e^{-aT_e} \cos(\omega_0 T_e) + e^{-2aT_e}}$

$$H(z) = T_e \sum_{p \text{ pôles pi de } H_a(p)} \text{Résidus} \left(\frac{H_a(p)}{1 - z^{-1} e^{pT_e}} \right) \Bigg|_{z=pi}$$

$$\bar{g}[k] = (-1)^k \bar{h}[-k]$$

$$h[k] = \bar{h}[-k]$$

$$g[k] = \bar{g}[-k]$$